# 6. Αριθμητική Ολοκλήρωση

## Ασκήσεις

**6.1** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, της οποίας το ολοκλήρωμα του Riemann στο διάστημα $[a,b]$ υπάρχει. Αν $Q_n^T$ είναι ο σύνθετος τύπος ολοκλήρωσης του τραπεζίου με $n$ ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους στο διάστημα $[a,b]$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^T(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**6.2** Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και $\xi : [a,b] \to (a,b)$ μια τυχούσα απεικόνιση. Αν η συνάρτηση $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ δεν αλλάζει πρόσημο, αποδείξτε ότι υπάρχει $\vartheta \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b k(x)\,\varphi\big(\xi(x)\big)\,dx = \varphi(\vartheta)\int_a^b k(x)\,dx,$$

υποθέτοντας ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν. [Το γεγονός αυτό χρησιμοποιήθηκε επανειλημμένα σε αυτό το κεφάλαιο, π.χ. στην απόδειξη των σχέσεων (6.3), (6.5), (6.12) και (6.24)· θα χρειαστεί επίσης σε μερικές από τις ασκήσεις που ακολουθούν.] Γιατί δεν ικανοποιείται η σχέση

$$\int_{-1}^1 k(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(\vartheta)\int_{-1}^1 k(x)\,dx,$$

για κανένα $\vartheta \in [-1,1]$, για τις συναρτήσεις $\varphi(x) := k(x) := x$, $x \in [-1,1]$;

**6.3** Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ μη αρνητικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Έστω $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, και $x_1,\dots,x_n$ σημεία στο διάστημα $[a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad \lambda_1\varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(x_n) = \varphi(\xi).$$

[*Σημείωση*. Κάθε παράσταση της μορφής $\lambda_1\varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(x_n)$, με $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ όπως σε αυτήν την άσκηση, λέγεται *κυρτός συνδυασμός* τιμών της $\varphi$. Μια ειδική περίπτωση του αποτελέσματος για $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη των σχέσεων (6.4) και (6.9)· χρειάζεται επίσης στις Ασκήσεις 6.13, 6.14, 6.15 και 6.16.]

**6.4** Για $\varphi$ και $x_1, \dots, x_n$ όπως στην προηγούμενη Άσκηση και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *ομόσημους* αριθμούς, αποδείξτε ότι

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad \lambda_1\varphi(x_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(x_n) = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\varphi(\xi).$$

**6.5** Στο Παράδειγμα 6.3, ποιο πλήθος κόμβων εξασφαλίζει ότι ο σύνθετος τύπος του Simpson δίνει το αποτέλεσμα με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων;

**6.6** Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f$, $f(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, στο διάστημα $[0,1]$ με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου ως προς έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h$. Αποδείξτε ότι η τάξη της μεθόδου είναι $3/2$.
[*Υπόδειξη*: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = 1/n$ και $x_i := ih$, $i = 0, \dots, n$. Έστω $r_i$ το σφάλμα του τύπου του τραπεζίου στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$. Αποδείξτε ότι $r_0 = h^{3/2}/6$ και

$$\frac{h^{3/2}}{48} \cdot \frac{1}{(i+1)^{3/2}} \le r_i \le \frac{h^{3/2}}{48} \cdot \frac{1}{i^{3/2}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Χρησιμοποιήστε επίσης τη σύγκλιση της σειράς $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}}$. ]

**6.7** α) Προσδιορίστε τα βάρη $w_1$ και $w_2$, έτσι ώστε ο τύπος $Q$, $Q(f) = w_1 f(1/2) + w_2 f(1)$, να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1,1]$ πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού ακριβώς.

β) Προσδιορίστε τα βάρη $w_1, w_2$ και τους κόμβους $x_1$ και $x_2$, έτσι ώστε ο τύπος $Q$, $Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, να ολοκληρώνει στο διάστημα $[-1,1]$ ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $n$ για τη μέγιστη δυνατή τιμή του $n$.

**6.8** Έστω $Q_n^T$ και $Q_m^S$ ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου και του Simpson, αντίστοιχα, με $n$ και $m$ ομοιόμορφα κατανεμημένους κόμβους στο διάστημα $[-1,1]$, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση $f$, $f(x) := (x^6/30) - x^2$, ισχύει

$$Q_n^T(f) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le Q_m^S(f).$$

**6.9** Έστω $Q$ ένας τύπος ολοκλήρωσης στο διάστημα $[a,b]$, και $R$ το αντίστοιχο συναρτησιακό σφάλματος, $R(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει το πολύ ένας φυσικός αριθμός $k$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\exists C_k \in \mathbb{R} \;\; \forall f \in C^k[a,b] \;\; \exists \xi \in [a,b] \quad R(f) = C_k f^{(k)}(\xi).$$

**6.10** Έστω $Q_n$ ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton–Cotes σε ένα διάστημα της μορφής $[-a, a]$ με $n$ κόμβους. Αν $Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \cdots + w_{n-1} f(x_{n-1})$ και $x_i, x_j$ δύο κόμβοι τέτοιοι ώστε $x_i = -x_j$, αποδείξτε για τα αντίστοιχα βάρη ότι $w_i = w_j$. (Πρόκειται δηλαδή, όπως λέμε, για έναν *συμμετρικό τύπο* ολοκλήρωσης.)

**6.11** Έστω $Q_n$ ο τύπος ολοκλήρωσης των Newton–Cotes σε ένα διάστημα της μορφής $[-a, a]$. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη Άσκηση για να αποδείξετε ότι ο $Q_n$ ολοκληρώνει ακριβώς κάθε περιττή και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[-a, a]$.

**6.12** Αποδείξτε ότι υπάρχουν βάρη $w_1$, $w_2$, $w_3$, τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης

$$Q(f) := w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1),$$

$f \in C^1[0, 1]$, να ολοκληρώνει στο $[0, 1]$ πολυώνυμα μέχρι και δευτέρου βαθμού ακριβώς, δηλαδή με

$$R(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - Q(f)$$

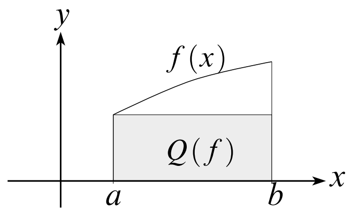
να ισχύει

$$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad R(p) = 0.$$

Προσδιορίστε μια σταθερά $c$ τέτοια ώστε

$$\forall f \in C^3[0, 1] \ \exists \xi \in (0, 1) \quad R(f) = c f^{(3)}(\xi).$$

**6.13** Θεωρούμε τον (*αριστερό*) *τύπο του ορθογωνίου* $Q$, $Q(f) := (b - a) f(a)$, $f \in C[a, b]$. Έστω $R$ το σφάλμα του,




$$R(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q(f).$$

α) Αποδείξτε ότι ο $Q$ ολοκληρώνει ακριβώς σταθερές συναρτήσεις.

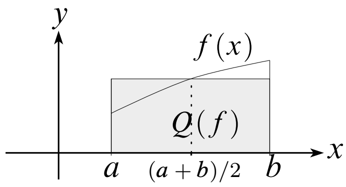
β) Αποδείξτε ότι

$$\forall f \in C^1[a, b] \ \exists \xi \in (a, b) \quad R(f) = \frac{(b - a)^2}{2} f'(\xi).$$

γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := (b - a)/n$, και $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$. Αποδείξτε ότι για $f \in C^1[a, b]$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b - a}{2} h\, f'(\xi).$$

**6.14** Θεωρούμε τον *τύπο του μέσου* $Q$, $Q(f) := (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f \in C[a,b]$. Έστω $R$ το σφάλμα του,




$$R(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q(f).$$

α) Αποδείξτε ότι ο $Q$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού, δηλαδή για $p \in \mathbb{P}_1$ ισχύει $R(p) = 0$.

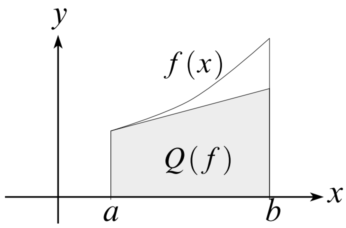
β) Αποδείξτε ότι

$$\forall f \in C^2[a,b] \;\; \exists \xi \in (a,b) \quad R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/n$, και $x_i := a + ih, i = 0,\dots,n$. Αποδείξτε ότι για $f \in C^2[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(x_i + \frac{h}{2}\Big) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi).$$

**6.15** Θεωρούμε τον τύπο ολοκλήρωσης $Q$, $Q(f) := (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$, $f \in C^1[a,b]$, που προκύπτει ολοκληρώνοντας το πολυώνυμο Taylor $p$, $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, στο διάστημα $[a,b]$. Έστω $R$ το σφάλμα του,




$$R(f) := \int_a^b f(x)\,dx - Q(f).$$

α) Αποδείξτε ότι ο $Q$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και πρώτου βαθμού, δηλαδή για $p \in \mathbb{P}_1$ ισχύει $R(p) = 0$.

β) Αποδείξτε ότι

$$\forall f \in C^2[a,b] \;\; \exists \xi \in (a,b) \quad R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi).$$

γ) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/n$, και $x_i := a + ih$, $i = 0,\dots,n$. Αποδείξτε ότι για $f \in C^2[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\Big[hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\Big] = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi).$$

**6.16** Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := (b-a)/n$, και $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$, και $Q_{n+1}$ ο τύπος ολοκλήρωσης

$$Q_{n+1}(f) := h\Big[\frac{1}{2}\, f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\, f(x_n)\Big] - \frac{h^2}{12}\big[f'(x_n) - f'(x_0)\big],$$

$f \in C^1[a,b]$. Αποδείξτε ότι για $f \in C^4[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1}(f) = \frac{b-a}{720}\, h^4\, f^{(4)}(\xi).$$

[*Υπόδειξη*: Προσδιορίστε πρώτα έναν ‘απλό’ τύπο ολοκλήρωσης, ο οποίος εφαρμοζόμενος σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, οδηγεί στον $Q_{n+1}$.]

**6.21** Θεωρούμε ένα διάστημα της μορφής $[-a,a]$ και μια άρτια συνάρτηση βάρους $w : [-a,a] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss $Q_n$ με $n$ κόμβους ως προς $w$ είναι συμμετρικός, δηλαδή αν $x_i$ είναι ένας κόμβος του, τότε και το σημείο $-x_i$ είναι κόμβος και τα αντίστοιχα βάρη είναι ίσα.

[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.2 και το γεγονός ότι, για δεδομένη συνάρτηση βάρους $w$ και δεδομένο πλήθος κόμβων $n$, υπάρχει ακριβώς ένας τύπος ολοκλήρωσης του Gauss.]

**6.22** Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου του Legendre βαθμού $n$. Αν $L_i$, $i = 1, \dots, n$, είναι τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς $x_1, \dots, x_n$,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

αποδείξτε ότι

$$\int_{-1}^{1} L_i(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \big[L_i(x)\big]^2\,dx, \quad i = 1, \dots, n.$$

**6.24** Έστω $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $Q_n$ ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss με $n$ κόμβους ως προς $w$. Αποδείξτε ότι

$$\forall f \in C[a,b] \quad \lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,dx.$$

[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, τη θετικότητα των βαρών των τύπων του Gauss, και το γεγονός ότι $Q_n(1) = \int_a^b w(x)\,dx$.]

**6.25** Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα και $Q_n$ ένας τύπος ολοκλήρωσης με κόμβους $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, ανά δύο διαφορετικούς μεταξύ τους, και βάρη $w_1, \dots, w_n$,

$$Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) \approx \int_a^b f(x)\,dx.$$

Υποθέτουμε ότι ο $Q_n$ είναι *παρεμβολικός*, δηλαδή ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $n-1$ ακριβώς,

$$\forall\, p \in \mathbb{P}_{n-1} \quad Q_n(p) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Αν $k \in \mathbb{N}_0$, αποδείξτε ότι ο $Q_n$ ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $n+k$ ακριβώς, αν και μόνο αν

$$\forall r \in \mathbb{P}_k \quad \int_a^b (x - x_1)\cdots(x - x_n) r(x)\,dx = 0.$$

Ποιος τύπος προκύπτει στην περίπτωση $k = n-1$;

[*Υπόδειξη*: Έστω $p \in \mathbb{P}_{n+k}$ και $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής του $p$ στα σημεία $x_1, \dots, x_n$. Τότε, $p(x) = q(x) + (x - x_1)\cdots(x - x_n) r(x)$ με $r \in \mathbb{P}_k$, $Q_n(q) = Q_n(p)$ και

$$\int_a^b (p - q)(x)\,dx = \int_a^b (x - x_1)\cdots(x - x_n) r(x)\,dx.]$$

**6.26** Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα και $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τύπος ολοκλήρωσης $Q_n$, με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$ και $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_n$, της μορφής

$$Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n) + \widetilde{w}_1 f'(x_1) + \cdots + \widetilde{w}_n f'(x_n),$$

ο οποίος ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$ ακριβώς. Για ποια επιλογή των κόμβων $x_1, \dots, x_n$ μηδενίζονται τα βάρη $\widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_n$;