Αριθμητική Ολοκλήρωση

$f \in C[a,b]$

Ζητούμενο: $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

Αν F είναι μια παράγουσα της f, δηλαδή $F' = f$

Τότε: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Προβλήματα: Η F είναι σπάνια γνωστή

- Είναι δυνατόν η f να είναι απλή και η F πολύπλοκη συνάρτηση
  π.χ.: $f(x) = \dfrac{1}{1-x^4}$

Προσεγγίζουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$ με

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$$

$x_i \in [a,b]$ κόμβοι
w_i βάρη.

Q_{n+1} τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης με $n+1$ κόμβους.

• Τύποι των Newton-Cotes

Ένα $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x_i = a + ih$, $i = 0 \dots n$.
με $h = \dfrac{b-a}{n}$

Έστω $f \in C[a,b]$ και $p_n \in \mathbb{P}_n$ τω: $p_n(x_i) = f(x_i)$
$i = 0 \dots n$

Θέτουμε: $Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx$

$f \in \mathbb{P}_n \Rightarrow p_n = f$

Συμπέρασμα:

$\forall f \in \mathbb{P}_n \,, \underline{Q_{n+1}(f) = \int_a^b} f(x)\,dx$

Δηλαδή με $R_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_{n+1}(f)$

έχουμε:

$\forall p \in \mathbb{P}_n \,, R_{n+1}(p) = 0$

Ο τύπος Q_{n+1} ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n.

Θέλουμε να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f)$ στη μορφή

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$

Έστω $L_i(x)$

$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \,, \quad i = 0 \dots n \,,$ τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots x_n$

Τότε:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

Άρα:

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \boxed{\underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{}} $$

$w_i =$

$$= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Τώρα:

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$$

(κάνω αλλαγή μεταβλητής)

$$\overset{\uparrow}{=} h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{\cancel{a}+hs-(\cancel{a}+jh)}{(\cancel{a}+ih)-(\cancel{a}+jh)}\,ds$$

$\underset{\text{παλιά}}{x} = a + h\underset{\text{νέα}}{s}$

$$= h\int_0^n \underbrace{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}}_{\varphi_i(s)}\,ds$$

$$= h \underbrace{\int_0^n \varphi_i(s)\,ds}_{= w_i^*}$$

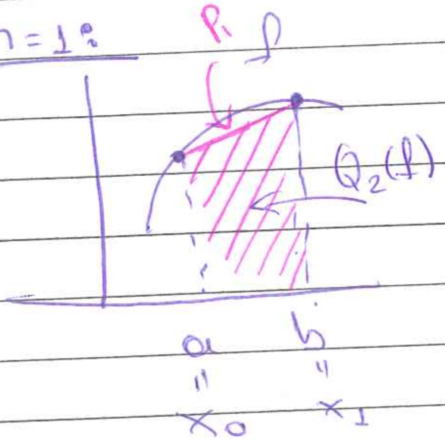
Τα w_i^* είναι ανεξάρτητα του διαστήματος $[a,b]$. Υπολογίζουμε μια φορά τα $w_0^*, w_1^*, \dots, w_n^*$ και στη συνέχεια για οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ βρίσκουμε τα w_i από τον τύπο

$$w_i = h \cdot w_i^*$$

Γενικά δεν ισχύει ότι $Q_{n+1}(f) \to \int_a^b f(x)\,dx$, $n \to \infty$

Συμπέρασμα: Χρήσιμοι είναι οι τύποι των Newton-Cotes μόνο για μικρό n.

$n=1$:



Τύπος του Τραπεζίου
(τύπος Newton-Cotes για $n=1$)

$$\underset{n+1}{Q_2}(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

Τι μπορούμε για το σφάλμα

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)$$

Ισχυρισμός: Έστω $f \in C^2[a,b]$

Τότε $\exists\, \xi \in (a,b)$ τω: $R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_2(f)}_{= Q_2(p_1)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 \in P_1 \\ p_1(a) = f(a) \\ p_1(b) = f(b) \end{array} \right.$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$(*) \quad = \int_a^b \left[f(x) - p_1(x)\right] dx$$

$\forall x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} (x-a)(x-b)$$

$$\circledast = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, f''(\xi(x))\, dx$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = (b-a)\, \varphi(\xi) = \varphi(\xi) \cdot \int_a^b dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\, dx$$

$$\Rightarrow -2 R_2(f) = \int_a^b (x-a)\underbrace{(b-x)}_{\geq 0}\, f''(\xi(x))\, dx$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x) \underbrace{\min_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi)}_{m}\, dx \leq \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0}\, f''(\xi(x))\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b (x-a)(b-x) \underbrace{\max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi)}_{M}\, dx$$

ανεξ. του x

$$\leq M \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx$$

$$\Rightarrow m \int_a^b (x-a)(b-x)\, dx \leq -2R_2(f) \leq M \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{>0}\, dx$$

$$\Rightarrow m \leq \boxed{\frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}} \leq M$$

Είναι ανάμεσα από min και max της f''

Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης αξίας υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.:

$$\frac{-2R_2(f)}{\int_a^b (x-a)(b-x)dx} = f''(\xi)$$

$$\Rightarrow R_2(f) = \frac{f''(\xi)}{2} \boxed{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} = \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

|22|05|2014|

Τύπος του Τραπεζίου (απλός)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx Q_2(f) = \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$

σφάλμα

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) \quad (*)$$

$$\forall f \in C^2[a,b]\ \exists \xi \in (a,b) : R_2(f) = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad (*)$$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

$n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$.

Ομοιόμορφος διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$ με βήμα h.

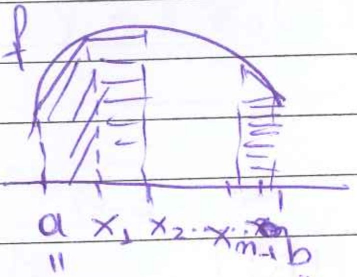
Τ. τραπέζιο

Εφαρμόζουμε τον (απλό) τύπο του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$ $i=0,\dots,n-1$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου Q^T_{n+1}, με:

$$Q^T_{n+1}(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right] + \dots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Δηλαδή:

$$Q^T_{n+1}(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$



$a = x_0$, $b = x_n$

$$R^T_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^T_{n+1}(f)$$

Τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα $R^T_{n+1}(f)$;

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Το σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του απλού τύπου του τραπεζίου στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. Σύμφωνα με την (*) έχουμε

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{(\overbrace{x_1-x_0}^{h})^3}{12}f''(\xi_1) - \frac{(\overbrace{x_2-x_1}^{h})^3}{12}f''(\xi_2) - \dots - \frac{(\overbrace{x_n-x_{n-1}}^{h})^3}{12}f''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12}\left[f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)\right]$$

$$\Rightarrow R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$= -\frac{h^3 \cdot n}{12}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \quad (+)$$

$$\rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max_{a\le x\le b} f''(x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\max_{a\le x\le b} f''(x)$$

$$= \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \ge \min_{a\le x\le b} f''(x)$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b) : \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi)$$

Θεώρημα
Ενδιάμεσης
τιμής

$$(+) \Rightarrow R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^2}{12}\,\overset{b-a}{nh}\, f''(\xi)$$

$$= -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

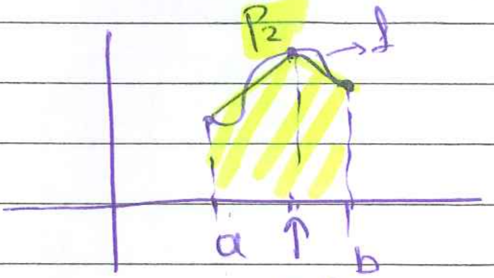
Άρα: $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b) : R^T_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$

Επομένως:

$$|R^T_{n+1}(f)| \leq \underbrace{\frac{b-a}{12} h^2 \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|}_{=\,C \text{ ανεξ. του } h}$$

Το σφάλμα είναι δεύτερης τάξης.

Ο τύπος του Simpson



$\frac{a+b}{2}$

Το άθροισμα των βαρών πρέπει να ισούται με το μήκος του διαστήματος για να ολοκληρώνονται ακριβώς

1ος τρόπος

$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b)\right]$$

2ος τρόπος

$h = \frac{b-a}{2}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2.$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Σφάλμα:

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

Παράσταση;

Απο την κατασκευή του τύπου προκύπτει ότι αυτός ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και δευτέρου βαθμού, δηλαδή

$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad : R_3(p) = 0$

1ος τρόπος

$q_3(x) = x^3$

$$R_3(q_3) = \int_a^b x^3\, dx - \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}a^3 + \frac{4}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \frac{1}{3}b^3\right]$$

$$= \cdots\cdots = 0$$

$$q_3(x) = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + q(x) \quad , \text{με } ~~είναι~~ \ q \in \mathbb{P}_2$$

$$R_3(q_3) = R_3(p) + \cancel{R_3(q)}^{\to 0}$$

$$= \cancel{\int_a^b \left(x - \frac{(a+b)}{2}\right)^3 dx}^{\to 0} - \cancel{Q_3(p)}^{\to 0}$$

ισούται με μηδέν καθώς είναι συμμετρικό ως προς το μέσον

Λήμμα: (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε:

$$\exists \xi \in (a,b) : R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη

Έστω $p_3 \in \mathbb{P}_3$ ώς:

$p_3(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$

$p_3'(x_1) = f'(x_1)$

Τότε:

$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi(x) \in (a,b)$:

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)$$

(Άσκηση 4.15) $\quad Q_3(p_3) \quad p_3(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,2.$

Άρα: $R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underset{\overset{\shortparallel}{Q_3(p_3)}}{Q_3(f)}$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_3(p_3)}_{= \int_a^b p_3(x)\,dx}$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_3(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - p_3(x)]\,dx$$

S

$$= -\frac{1}{4!}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))$$

$$= -\frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)\,dx$$

$$\text{''}\ \frac{(b-a)^5}{2^3 \cdot 15}$$

$$= -\frac{1}{2^4 \cdot 180}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi).$$

Σύνθετος τύπος ~~τραπεζίου~~ Simpson.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ άρτιος, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson.

Q^{S}_{n+1}

$$Q^{S}_{n+1}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

S = Simpson

$$R^{S}_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^{S}_{n+1}(f)$$

$$= -\frac{(\overbrace{x_2 - x_0}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_1) - \frac{(\overbrace{x_4 - x_2}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_2) +$$

$\xi_1 \in (x_0, x_2)$ $\xi_2 \in (x_2, x_4)$

$$= \dots - \frac{(\overbrace{x_n - x_{n-2}}^{2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_{n/2})$$

$\xi_{n/2} \in (x_{n-2}, x_n)$

$$\Rightarrow R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{\cancel{2^5} h^5}{\cancel{2^4} \cdot \cancel{180}_{90}} \left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_{n/2}) \right]$$

$$\Rightarrow R^{S'}_{n+1}(f) = -\frac{h^5}{90} \underbrace{\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)} \quad (1)$$

$$\min_{a \le x \le b} f^{(4)}(x) \le \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) \le \max_{a \le x \le b} f^{(4)}(x)$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : \frac{2n}{2} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = f^{(4)}(\xi)$$

$$(1) \Rightarrow R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{h^5}{90} \frac{n}{2} \underbrace{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)}_{= f^{(4)}(\xi)}$$

$$\Rightarrow R^{S}_{n+1}(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.
$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.
$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.
$x_1, \dots, x_n$ σημεία στο $[a,b]$

ΝΔΟ: $\exists\, \xi \in [a,b] : \underbrace{\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n)} = \varphi(\xi)$

κυρτός συνδυασμός των $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$

Απόδειξη.

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \lambda_1 \max_x \varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_x \varphi(x)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{1} \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Και: $\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \geq \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$

$\Longrightarrow$ $\exists\, \xi \in [a,b] : \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$

$\uparrow$
Θ. ενδιάμ. τιμής.

23 | 05 | 2014

Άσκηση 6.4

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι

ΝΔΟ:

$$\exists \xi \in [a,b] : \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \varphi(\xi)$$

Απόδειξη

1η Περίπτωση: $\lambda_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n.$

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \lambda_1 \cdot \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$$\leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \cdot \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Ομοίως:

(1) ~~xxxx~~

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

χ.π.τ.γ.: $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$

Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει η (1)

~~xxxxxxxx~~

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής:

~~$\varphi(x)$~~...

$$\min_{a\le x\le b} \varphi(x) \le \frac{\lambda_1 \varphi(x_1)+\dots+\lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} \le \max_{a\le x\le b} \varphi(x)$$

Άρα: $\frac{\lambda_1 \varphi(x_1)+\dots+\lambda_n\varphi(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = \varphi(\xi)$

~~Περίπτωση~~

Δηλαδή, $\lambda_1 \varphi(x_1)+\dots+\lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1+\dots+\lambda_n)\,\varphi(\xi)$

2η Περίπτωση: $\lambda_1 \le 0$

Ανάγεται στην προηγούμενη πολλαπλασιάζοντας με -1

Άσκηση 6.8

Q_n^T, Q_m^S, n, m κόμβοι

$[-1, 1]$

$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2$

ΝΔΟ:

$$Q_n^T(f) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le Q_m^S(f)$$

Απόδειξη:

$R_{n+1}^{T} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$ (γενικά) (για διάστημα $[a,b]$)

$R_{m+1}^{S} = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$

Άρα:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^T(f) = \boxed{-\frac{2}{12}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2} \underbrace{f''(\xi)}_{\leq 0}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^S(f) = \boxed{-\frac{2}{180}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4} \underbrace{f^{(4)}(\theta)}$$

με $\xi, \theta \in (-1,1)$

$$f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x$$

$$f''(x) = \frac{5x^4}{5} - 2 = x^4 - 2$$

$$f'''(x) = 4x^3$$

$$f^{(4)}(x) = 12x^2$$

Άρα : $f''(\xi) = \xi^4 - 2 < 0$

$f^{(4)}(\theta) = 12\theta^2 \geq 0$

Άρα:

- $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^T(f) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq Q_m^T(f)}$

- $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^S(f) \leq 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^S(f)}$

Άσκηση 6.9

Q (τύπος ολοκλήρωσης) $[a,b]$

$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

σφάλμα

ΝΔΟ: Υπάρχει το πολύ ένας φυσικός αριθμός $k \in \mathbb{N}_0$ τω:

$\exists\, C_k \in \mathbb{R},\ \forall f \in C^2[a,b] : \exists\, \xi \in (a,b)$

(*) $R(f) = C_k f^{(k)}(\xi)$

Απόδειξη

1η Περίπτωση: $C_k \neq 0$

$f \in \mathbb{P}_{k-1} \overset{(*)}{\Rightarrow} R(f) = 0$

$f(x) = x^k \overset{(*)}{\Rightarrow} R(f) = C_k \cdot k! \neq 0$

Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο για ένα k.

- - - - -

Έστω ότι ισχύει για $k = k_1$ και $k = k_2$ με $k_2 > k_1$

Τότε: $f(x) = x^k$. Από τη σχέση με $k = k_1$, παίρνουμε: $R(f) \neq 0$, ενώ από τη δεύτερη ότι $R(f) = 0 \Rightarrow$ άτοπο

- - - - - - - - - - - -

2η Περίπτωση: $c_k = 0$

Τότε:

$\forall f \in C^k[a,b] : R(f) = 0$

ιδιαίτερα, για κάθε πολυώνυμο p,

$R(p) = 0$

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$

$p(x) = (x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$

Τότε $Q_{n+1}(p) = 0$ και $\int_a^b (x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2 \, dx > 0$

Άρα το $R(p) \neq 0$

($\Rightarrow$ 2η Περίπτωση ΑΔΥΝΑΤΗ)

Άσκηση 6.10

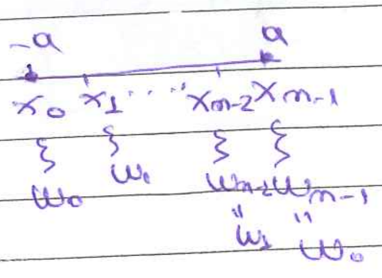
$[-a, a]$

Q_n τύπος των Newton-Cotes

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$

• x_i, x_j (κόμβους) τ.ω. $x_i = -x_j$

ΝΔΟ: $w_i = w_j$ (δηλαδή ότι αυτοί οι τύποι είναι συμμετρικοί)



Απόδειξη

Ξέρουμε ότι:

(*) $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} : \int_{-a}^{a} p(x)\,dx = Q_n(p)$

Για τα πολυώνυμα Lagrange: L_i και L_j,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k},$$

η (*) δίνει

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx, \quad w_j = \int_{-a}^{a} L_j(x)\,dx$$

Τώρα:

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}\,dx$$

$$\Rightarrow w_i = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{-x_j+x_k}\,dx \underset{t=-x}{=}$$

$$= -\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}\,dt = \int_{-a}^{a} L_j(t)\,dt = w_j$$

$$\Rightarrow \boxed{w_i = w_j}$$

Άσκηση 6.11

Q_n $[-a,a]$

ΝΔΟ: $\varphi:[-a,a]\to\mathbb{R}$ περιττή τότε $R(\varphi)=0$

Απόδειξη

- $\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx = 0.$

- $\varphi(0)=0.$

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx \underset{t=-x}{=} -\int_0^{-a}\varphi(-t)\,dt = \int_{-a}^{0} \varphi(-t)\,dt = -\int_{-a}^{0}\varphi(t)\,dt = -\int_{-a}^{0}\varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_0^a\varphi(x)\,dx = 0$$

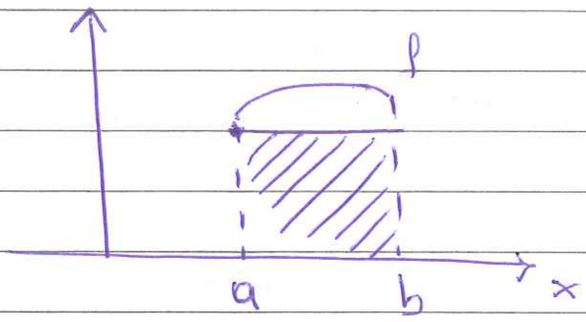
$$\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,dx = 0}$$

- $\cancel{Q_n(f) = w_0\varphi(x_0)+w_1\varphi(x_1)+\dots+\underset{\overset{\shortparallel}{w_1}}{w_{n-2}}\,\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(-x_1)}}{\varphi(x_{n-2})}+\underset{\overset{\shortparallel}{w_0}}{w_{n-1}}\,\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(-x_0)}}{\varphi(x_{n-1})}}$

- $Q_n(f) = w_1\varphi(x_1)+w_2\varphi(x_2)+\dots+\underset{\overset{\shortparallel}{w_2}}{w_{n-1}}\,\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(-x_2)}}{\varphi(x_{n-1})}+\underset{\overset{\shortparallel}{w_1}}{w_n}\,\underset{\overset{\shortparallel}{\varphi(-x_1)}}{\varphi(x_n)}$

$$= \sum_{i=1}^{[n/2]} w_i \underbrace{[\varphi(x_i) + \varphi(-x_i)]}_{0} = 0$$

Άσκηση 6.13



Τύπος του ορθογωνίου

$Q(f) = (b-a) f(a)$

$f \in C[a,b]$

αριστερός τύπος του ορθογωνίου.

$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

ⓐ ΝΔΟ: $\forall p \in \mathbb{P}_0$, $R(p) = 0$

(απόδειξη)

$p(x) = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (σταθερά)

$$R(p) = \int_a^b \gamma\,dx - (b-a)\gamma$$

$$= (b-a)\gamma - (b-a)\gamma$$

$$= 0$$

ⓑ ΝΔΟ: $\forall f \in C^1[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

τω: $R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

(απόδειξη)

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-a) f(a)}_{\int_a^b f(a)\,dx}$$

$$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx$$

$$= \int_a^b f'(\xi(x)) \underbrace{(x-a)}_{\geq 0}\,dx$$

$$\Rightarrow \min_{a\le\xi\le b} f'(\xi) \cdot \int_a^b (x-a)\,dx \le R(f) \le \max_{a\le\xi\le b} f'(\xi) \boxed{\int_a^b (x-a)\,dx}$$

$$\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \min_{a\le\xi\le b} f'(\xi) \le \frac{R(f)}{\frac{(b-a)^2}{2}} \le \max_{a\le\xi\le b} f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{R(f)}{\frac{(b-a)^2}{2}} = f'(\xi)$$

↑ θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

$$\Rightarrow R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

(δ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

ΝΔΟ:

$\forall f \in C^1[a,b]\ \exists \xi \in (a,b)$ τω:

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} \cdot h\, f'(\xi)$$

(απόδειξη)

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f(x_i)\right]$$

$$= \frac{h^2}{2} f'(\xi_i),\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

(πρέπει να το αποδείξω (max-min)

$$= \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{h^2}{2} n \cdot \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)}$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)} = f'(\xi)$$

$$= \frac{b-a}{2} \cdot h \cdot f'(\xi)$$

27 | 05 | 2014

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss.

$\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους.

- $\omega(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$
- $0 < \int_a^b \omega(x)\, dx < \infty$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I(f) = \int_a^b \omega(x) f(x)\, dx$$

με τύπους ολοκλήρωσης της μορφής:

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad (*)$$

Πρόβλημα: Προσδιορισμός των κόμβων x_i και των βαρών w_i έτσι ώστε ο Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού

Ισχυρισμός: Κανένας τύπος της μορφής (*) δεν ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι και βαθμού 2n

$p(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2$
$p \in \mathbb{P}_{2n}$

- $Q_n(p) = 0$
- $\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx > 0$

$\Rightarrow \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx \neq Q_n(p)$

($\Rightarrow$ δεν ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι και βαθμού 2n)

Ορθογώνια πολυώνυμα:

$\hat{\mathbb{P}}_n := \{ p \in \mathbb{P}_n : p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \}$

Υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τ.ω.:
$\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, r_{n-1}(x)\, dx = 0, \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Τα πολυώνυμα $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $p_0 = 1$, που έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση w.

Βασική ιδιότητα: Οι ρίζες $x_1, \dots, x_n$ του p_n είναι απλές και βρίσκονται στο (a,b).

Θεώρημα: (Ύπαρξη και μοναδικότητα τύπων ολοκλήρωσης του Gauss.)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.

Τότε:

(a) Με κόμβους τις ρίζες $x_1 < \dots < x_n$, τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \dots, w_n$. τ.ω: ο τύπος Q_n,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$ να ολοκληρώνει ~~[illegible]~~ πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $2n-1$ ακριβώς, δηλαδή $\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$, $\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx = Q_n(p)$

Επιπλέον τα βάρη w_i είναι θετικά.

(b) Αν ένας τύπος με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$ ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $2n-1$ ακριβώς, τότε οι κόμβοι $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n

Απόδειξη

(a) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ θεωρούμε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ παρεμβολής του p στα σημεία $x_1, \dots, x_n$, δηλαδή $q \in \mathbb{P}_{n-1}$: $q(x_i) = p(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

Τότε:

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}_{= p_n(x)} r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Άρα:

$$\int_a^b \omega(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b \omega(x) \left[q(x) + p_n(x)\, r_{n-1}(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b \omega(x)\, q(x)\, dx + \cancel{\int_a^b \omega(x)\, p_n(x)\, r_{n-1}(x)\, dx}^{\,0}$$

Άρα: $\displaystyle \int_a^b \omega(x) \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{P}_{2n-1}} dx = \int_a^b \omega(x) \underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{P}_{n-1}} dx$

Έστω $L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_1, \ldots, x_n$, δηλαδή:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Τότε:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, L_i(x)$$

Επομένως:

$$\int_a^b \omega(x)\, p(x)\, dx = \int_a^b \omega(x)\, q(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \omega(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, L_i(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b \omega(x)\, L_i(x)\, dx \right)}_{\omega_i} p(x_i)$$

(ανεξάρτητα του p)

Έστω $w_1', \dots, w_n'$ βάρη τω: για τον τύπο:
$Q_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i' f(x_i)$ να ισχύει:

$$\int_a^b w(x)\, p(x)\, dx = Q_n'(p), \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

Τότε $L_j^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, οπότε:

$$\underbrace{Q_n(L_j^2)}_{w_j} = \underbrace{\int_a^b w(x)\left(L_j(x)\right)^2 dx}_{>0} = \underbrace{Q_n'(L_j^2)}_{w_j'}$$

(b) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτουμε $p(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n)\, r_{n-1}(x)$

Προφανώς: $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p)=0$. Επομένως, $\forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ ισχύει: $\int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{=\tilde{p}_n(x)} r_{n-1}(x)\, dx = 0$

Αφού τα ορθογώνια πολυώνυμα είναι μονοσήμαντα ορισμένα, θα έχουμε $\tilde{p}_n = p_n$, άρα τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

<u>Θεώρημα:</u> (Παράσταση του σφάλματος τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\hat{w}: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους, και $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w. Αν Q_n είναι ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss ως προς w με n κόμβους, τότε για κάθε $f \in C^{2n}[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ <u>τω:</u> $\int_a^b w(x) f(x)\, dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\, dx$

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τω:

$$\left.\begin{array}{l} p(x_i) = f(x_i) \\ p'(x_i) = f'(x_i) \end{array}\right\} \quad i = 1, \dots, n$$

Τότε:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx - \underbrace{Q_n(f)}_{= Q_n(p) = \int_a^b w(x) p(x)\, dx}$$

$$= \int_a^b w(x) [f(x) - p(x)]\, dx$$

Από την παρεμβολή Hermite ξέρουμε ότι:
$\forall x \in [a,b] \ \exists \ \xi(x) \in (a,b)$

τω: $f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2}_{= [p_n(x)]^2}$

Επομένως:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \underbrace{w(x) [p_n(x)]^2}_{\geq 0} \cdot f^{(2n)}(\xi(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b w(x) [p_n(x)]\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 \cdot f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \le \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 \max_{a\le y\le b} f^{(2n)}(y)\,dx$$

$$= \max_{a\le y\le b} f^{(2n)}(y) \cdot \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx$$

Και:

$$\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 \cdot f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \ge \min_{a\le y\le b} f^{(2n)}(y) \underbrace{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 dx}_{>0}$$

$$\Rightarrow \min_{a\le y\le b} f^{(2n)}(y) \le \boxed{\frac{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 \cdot f^{(2n)}(\xi(x))\,dx}{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx}} \le \max_{a\le y\le b} f^{(2n)}(y)$$

$$\shortparallel$$

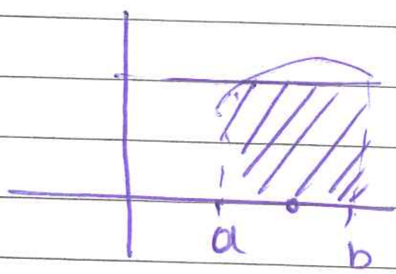
$$f^{(2n)}(\xi)$$

με $\xi \in (a,b)$
θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Άσκηση 6.14

$$Q(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

τύπος του μέσου



$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

~~(Τύπος του~~

(α) ΝΔΟ: $\forall p \in \mathbb{P}_1 : R(p) = 0$

(Τύπος του Gauss
με ένα κόμβο)

ⓐ $p(x) = \gamma x + \delta \quad , \gamma + \delta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \dots = \gamma \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} + \delta(b-a)$$

$$Q(p) = (b-a)\left[\gamma \frac{a+b}{2} + \delta\right]$$

$$\Rightarrow Q(p) = \int_a^b p(x)\,dx$$

|28|05|2014|

ⓑ $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists \xi \in (a,b) : R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$

Έστω $p \in \mathbb{P}_1$ τω: $\left.\begin{array}{l} p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{array}\right\}$

Τότε από την παράσταση του σφάλματος παρεμβολής Hermite ξέρουμε ότι $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi(x) \in (a,b)$

$$(*) \quad f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

(ένας άλλος τρόπος)

Taylor:

$$f(x) - p(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - p\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - p'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\left[f''(\xi(x)) - p''(\xi(x))\right]$$

Επομένως $R(f) = \int_\alpha^b f(x)\,dx - Q(f)$

$Q''(p) \leftarrow p\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)$

$\int_\alpha^b p(x)\,dx \leftarrow p \in \mathbb{P}_1.$

$$= \int_\alpha^b f(x)\,dx - \int_\alpha^b p(x)\,dx = \int_\alpha^b [f(x) - p(x)]\,dx$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_\alpha^b \underbrace{\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \underbrace{\int_\alpha^b \left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 dx}_{= \frac{1}{3}\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^3 \Big|_{x=\alpha}^{x=b}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(b - \frac{\alpha+b}{2}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{b-\alpha}{2}\right)^3 = \frac{(b-\alpha)^3}{12}$$

$$= \frac{1}{24}(b-\alpha)^3 f''(\xi)$$

2ος Τρόπος:

$$R(f) = \int_\alpha^b f(x)\,dx - \underbrace{(b-\alpha) f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)}_{= \int_\alpha^b f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) dx}$$

$$= \int_\alpha^b \left[f(x) - f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right)\right] dx = \int_\alpha^b \left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right) f'\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 \cdot f''(\xi(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^b \left(x - \frac{\alpha+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))\,dx$$

(Δ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$, $i=0\dots n$.

<u>ΝΔΟ:</u> $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\ \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

<u>Λύση</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg[\underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \overset{x_{i+1}-x_i}{h}\, f\Big(\underbrace{x_i + \frac{h}{2}}_{=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}}\Big)}_{=\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} f''(\xi_i) \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})} \Bigg]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{24} f''(\xi_i)$$

$$= \frac{h^3}{24} n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

(είναι φραγμένο (min - max))

$$= \frac{h^2}{24} \, \overset{b-a}{\overset{\shortparallel}{(n \cdot h)}} \, f''(\xi)$$

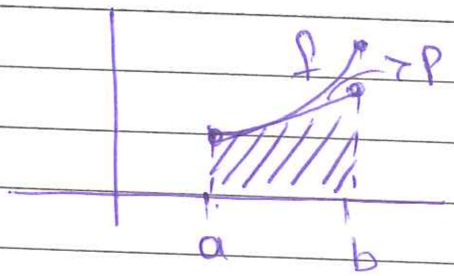
$$= \frac{b-a}{24} \, h^2 f''(\xi).$$

Άσκηση 6.15

$$Q(f) = (b-a)\cdot f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot f'(a)$$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)\cdot f'(a)}_{\overset{\shortparallel}{p(x)}} + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi(x))$$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \dots = Q(f)$$



(a) $\forall p \in \mathbb{P}_1 : R(p) = 0$, $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

• $p(x) = \gamma x + \delta$ πράξεις.

(b) ΝΔΟ: $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists \xi \in (a,b) : R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underset{\overset{\shortparallel}{\int_a^b [f(a) + (x-a)\cdot f'(a)]\,dx}}{Q(f)} ,$$

$$= \int_a^b \underbrace{[f(x) - f(a) - (x-a) \cdot f'(a)]}_{\substack{\| \\ \frac{1}{\;} (x-a)^2 f''(\xi(x))}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\, dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot \int_a^b (x-a)^2\, dx$$

$$= \frac{(b-a)^3}{6} \cdot f''(\xi)$$

"Άλλος" τρόπος: $p \in \mathbb{P}_1$, $p(a) = f(a)$
$p'(a) = f'(a)$

Τότε:

$$R(f) = \int_a^b f(x)\, dx - \underbrace{Q(f)}_{\substack{\| \\ \underbrace{Q(p)}_{\substack{\| \\ \int_a^b p(x)dx}}}}$$

$$\Rightarrow R(f) = \int_a^b [f(x) - p(x)]\, dx$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \int_a^b [f(a) - p(a) + (x-a)[f'(a) - p'(a)] + \frac{1}{2}(x-a)^2 [f''(\xi(x)) - p''(\xi(x))]\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (x-a)^2 f''(\xi(x))\, dx = \cdots$$

(δ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

ΝΔΟ: $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b)$ ώ:

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] = \frac{(b-a)}{6} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

(απόδειξη)

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx} - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \left(h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{h^3}{6}\, n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$= \frac{h^2}{6}\, (n \cdot h) \cdot f''(\xi)$$

$$= \frac{b-a}{6}\, h^2 \cdot f''(\xi)$$