πολυώνυμα μέχρι τετάρτου βαθμού έχουν τύπο (π.χ. πρώτου βαθμού: είναι γραμμικά)

11/3/14

2. Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

Δεδομένα: Μία συνάρτηση f, που ορίζεται σε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (και παίρνει πραγματικές τιμές)

θα υποθέτουμε εν τω μεταξύ συνέχεια: (f ομαλή)

Ζητούμενο: x^* στο πεδίο ορισμού της f τ.ω.

$$f(x^*) = 0$$

x^* ρίζα της f πραγματικές ρίζες

Αριθμητικές μέθοδοι:
Για δεδομένη f και αρχική τιμή x_0, οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν συνήθως, μία ακολουθία αναλόγως τη μέθοδο
$x_1, x_2, \ldots$,
η οποία, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, συγκλίνει σε μία ρίζα x^* της f.
πότε συγκλίνει σε ρίζα, και πόσο γρήγορα συγκλίνει
Τότε προσεγγίζουμε την x^* με κάποιον όρο x_n, που επιλέγεται με βάση εμπειρικά κριτήρια τερματισμού.

θέλω ομαλότητα

I διάστημα
$C(I) := \{ f: I \to \mathbb{R},\ f \text{ συνεχής} \}$

Παρόμοια

$C^n(I) = \{ f: I \to \mathbb{R},\ f$ n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $I \}$

$I = (a, b)$

$C(a,b) \quad C^n[a,b]$

Μέθοδος της διχοτόμησης

(του διαστήματος)

Η μέθοδος βασίζεται στο:

Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής:

Έστω $g \in C[a,b]$ και K αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τ.ω. $g(x) = K$

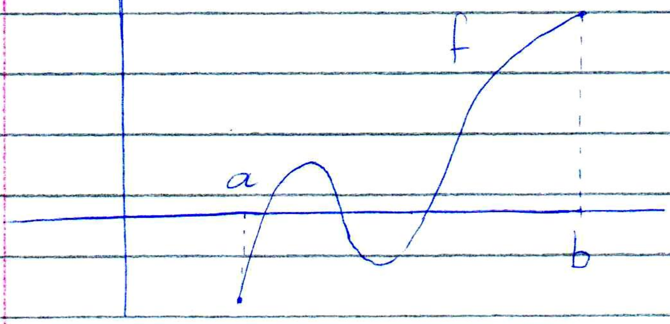
χρειάζομαι ακριβώς αυτή την υπόθεση

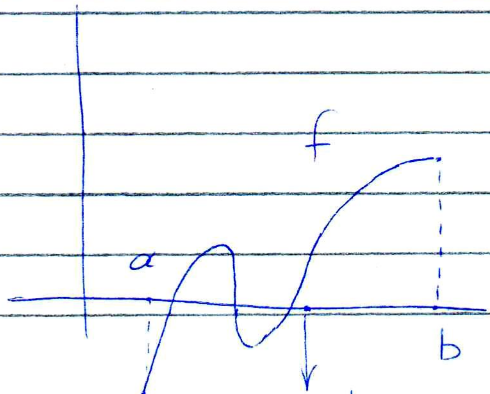
Ιδέα $f \in C[a,b]$ $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

Ενδιαφέρουσα περίπτωση: $f(a) f(b) < 0$

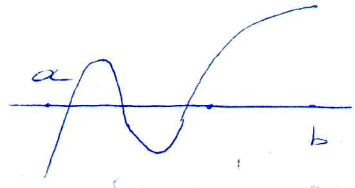
$$\boxed{\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}}$$

συνεχής και στα άκρα ετερόσημες τιμές ⇒ κάπου παίρνει την τιμή μηδέν





$c = \frac{a+b}{2}$

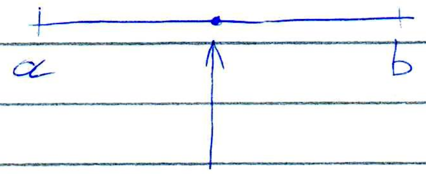


πρακτική προσέγγιση: το μέσο
οποιοδήποτε σημείο ανήκει [illegible] του διαστήματος

Τότε υπάρχει ρίζα x^* της f στο $[a,b]$

- $f(c)=0$, c ρίζα! (και τέλος)
- $f(c)f(a)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[a,c]$
- $f(c)f(a)>0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο $[c\ b]$

μήκος το μισό του προηγουμένου



$\dfrac{a+b}{2}$

η οποία διαφορά θα είναι το πολύ από το μέσο το μισό του όλου

$$x^* \in [a,b] \Rightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

Δεδομένα του αλγορίθμου:

a, b, f τ.ω. $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$
$f \in C[a,b]$, και $\varepsilon > 0$
(ε: μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα, ανοχή σφάλματος)

πόσο σφάλμα μπορώ να ανεχτώ π.χ. 10^{-6} ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων

το σφάλμα που κάνω
αν το $\delta < \varepsilon$, σταματώ

Αλγόριθμος:

υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \dfrac{\delta}{2}$

αρκετά μικρό

αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε τα a, b.
Έξοδος

ως ρίζα το μέσο του διαστήματος

διαφορετικά (δηλαδή αν $\delta > \varepsilon$):

υπολόγισε $c = \dfrac{a+b}{2}$, $f(c)$

τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$

αν $f(c)=0$, έξοδος

διαφορετικά (δηλαδή $f(c) \neq 0$):

αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$

$a \leftarrow c$, $f(a) \leftarrow f(c)$

διαφορετικά (δηλαδή αν $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$):

$b \leftarrow c$

πήγαινε στο 1

Πρακτικά ζητήματα για τον αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης

το διάστημα μικραίνει) πλησιάζω τη ρίζα
Άρα, οι τιμές της συνάρτησης στα άκρα όλο και πιο μικρές

1 Το ερώτημα $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$ δεν πρέπει να τίθεται στη μορφή

$f(c)\, f(a) > 0$

γιατί οδηγεί σε υπερχείλιση!

2. Το $c = \dfrac{a+b}{2}$ καλό είναι να υπολογίζεται ως $c = a + \dfrac{b-a}{2}$

Διαφορετικά, μπορεί να οδηγηθούμε σε c έξω από το διάστημα $[a,b]$

<u>Παράδειγμα</u> $B=10$, $t=2$, $U=-L=10$,

<u>αποκοπή</u>

$\alpha = 0.61, \; b = .66$

$fl(\alpha + b) = fl(1.27) = 1.2$

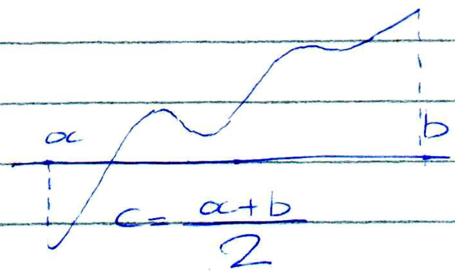
$\Rightarrow c = 0.6 < \alpha !$

3. $c = \alpha + \dfrac{b-\alpha}{2}$

Για πολύ μικρό ε, μπορεί να οδηγηθούμε σε αποτέλεσμα $c = \alpha$.

Μάθημα FORTRAN
Παρασκευή, 21-3-14
Ώρα: 12:00

13/3/14



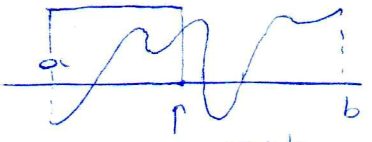
<u>Πρόταση</u> (εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

Έστω $f \in C[\alpha, b]$, $\operatorname{sgn} f(\alpha) \neq \operatorname{sgn} f(b)$, και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε, είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$, $n \to \infty$, όπου x^* ρίζα της συνάρτησης f στο $[\alpha, b]$. Μάλιστα ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-\alpha}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $\alpha_1 := \alpha$, $b_1 := b$, και συμβολίζουμε με $I_i := [\alpha_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος της διχοτόμησης.
Έστω x_i το μέσον του I_i.
Προφανώς, $I_{i+1} \subset I_i$.
Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει ρίζα της



$c = \frac{a+b}{2}$

f, υπάρχει μία ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος

Τώρα

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Αλλά

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2}$$

$$= \dots = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = \frac{b - a}{2^{n-1}}$$

οπότε

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Πλεονεκτήματα:

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες στην f: απαιτεί μόνο συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου της f σε μία περιοχή μιας ρίζας της.
2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
3. Απαιτεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα
4. Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων ένα πλήθος

βημάτων που εξασφαλίζει την προσέγγιση μίας ρίζας με μία προκαθορισμένη ακρίβεια

Μειονέκτημα: Συγκλίνει αργά, οπότε το συνολικό κόστος είναι υψηλό.

Στην πράξη χρησιμοποιείται για έναν χονδρικό εντοπισμό ριζών.

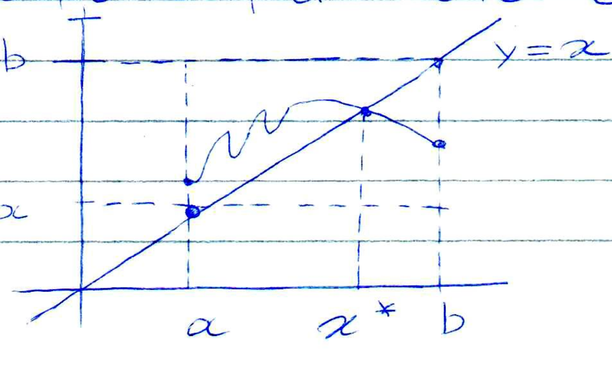
Επαναληπτικές μέθοδοι

Βασική ιδέα: $f(x)=0 \iff \boxed{x=\varphi(x)}$

$$x_{n-1},\ x_n := \varphi(x_{n-1})$$

Ορισμός: Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης φ τω $\varphi(x^*)=x^*$, λέγεται σταθερό σημείο της φ.

Πρόταση: Έστω $\varphi:[a,b]\to[a,b]$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε, η φ έχει (τουλάχιστον ένα) σταθερό σημείο στο $[a,b]$



Απόδειξη

1. $\varphi(a) = a$ ✓
2. $\varphi(b) = b$ ✓
3. $\varphi(a) > a$, $\varphi(b) < b$

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) : \varphi(x) - x$

Τότε η g είναι συνεχής, και
$g(a) = \varphi(a) - a > 0$, $g(b) = \varphi(b) - b < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα
της ενδιάμεσης τιμής
υπάρχει $x^* \in (a,b)$ τ.ω
$g(x^*) = 0$, οπότε
$\varphi(x^*) - x^* = 0$ δηλαδή
$\varphi(x^*) = x^*$

(2/2)

Ορισμός (Συνθήκη του Lipschitz)

Έστω $I \subset \mathbb{R}$. Λέμε ότι μία συνάρτηση
$\varphi : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί στο I τη συνθήκη του
Lipschitz, αν υπάρχει σταθερά $L \geq 0$ τ.ω.

$$\forall x, y \in I \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L\,|x - y|$$

Αν η σταθερά L μπορεί να επιλεγεί μικρότε-
ρη της μονάδας, τότε η φ λέγεται συστολή
στο I.

Παρατήρηση: Αν $\varphi \in C^1[a,b]$,

τότε η φ ικανοποιεί στο $[a,b]$ τη συνθήκη του Lipschitz:

$x, y \in [a,b]$ $x \neq y$.

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} = \varphi'(\xi)$$

με ξ μεταξύ x και y.

Άρα

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x-y|$$

οπότε με $L := \max_{a \leq \xi \leq b} |\varphi'(\xi)|$,

έχουμε

$$\forall x,y \in [a,b] \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq L|x-y|$$

Αυτή η L είναι η μικρότερη δυνατή σταθερά.

Μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα όχι κλειστό διάστημα, ΔΕΝ ικανοποιεί αναγκαστικά τη συνθήκη του Lipschitz

π.χ. $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0,1]$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty, \quad x \to 0$$

Άρα <u>δεν υπάρχει</u> σταθερά L τω.

$\forall x,y \in (0,1]$ $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq L|x-y|$

Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\varphi:[a,b] \longrightarrow [a,b]$ μία συστολή με σταθερά L ($L<1$). Τότε η φ έχει στο $[a,b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή

$$\exists_1\, x^* \in [a,b] \quad \varphi(x^*) = x^*$$

Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [a,b]$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, είναι καλά ορισμένη,

(δηλαδή $x_n \in [a,b]$, για κάθε n) συγκλίνει στο x^*, και για τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:

$$(1) \quad |x_n - x^*| \le L^n |x_0 - x^*|$$

$$\le L^n \max(x_0 - a,\, b - x_0)$$

$$(2) \quad |x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

και

$$(3) \quad |x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

Απόδειξη

Μοναδικότητα σταθερού σημείου. Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$ τ.ω. $\varphi(x^*) = x^*$, $\varphi(y^*) = y^*$ και $x^* \neq y^*$.

Τότε:

$$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)|$$
$$\leq \underbrace{L}_{<1} \underbrace{|x^* - y^*|}_{\neq 0} < |x^* - y^*|,$$

άτοπο.

<u>Ύπαρξη + εκτίμηση (2):</u>

Αφού το $x_0 \in [a,b]$, έχουμε $x_1 = \varphi(x_0) \in [a,b]$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι

$$x_n \in [a,b],$$

άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη.
Επιπλέον,

$$|x_n - x_{n-1}| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})|$$
$$\leq L\,|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

Επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n\,|x_1 - x_0|,\ n = 1, 2, \dots$$

$\overset{\downarrow}{}$

$\longrightarrow (\; | \;) \longrightarrow$ $\quad a$

$a_n \longrightarrow a, \; n \to \infty$:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \; |a_n - a| \leq \varepsilon$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία
ή ακολουθία Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N \; |a_n - a_m| \leq \varepsilon$

<u>Ισχυρισμός:</u> Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy:

$$|x_{n+k} - x_n| = |(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq L^{n+k-1} |x_1 - x_0| + L^{n+k-2} |x_1 - x_0| + \dots + L^n |x_1 - x_0|$$

$$= L^n |x_1 - x_0| \underbrace{(1 + L + \dots + L^{k-1})}_{= \frac{1 - L^k}{1 - L}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{|x_{n+k} - x_n| \leq \frac{1}{1-L} L^n |x_1 - x_0|}$$

Το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο ∞, οπότε η $|x_{n+k} - x_n|$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε, για n αρκετά μεγάλο

Έστω $x_n \to \tilde{x}$, $n \to \infty$

Τότε

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

φ συνεχής

$$= \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)$$

$$= \varphi(\tilde{x})$$

οπότε $\tilde{x} = x^*$

$$|x_{n+k} - x_n| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x^* - x_n| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$k \to \infty$ (2)

$|x^* - x_n|$

26/3/14

Θεώρημα (της συστολής)

Έστω $\varphi: [\alpha, b] \to [\alpha, b]$ μία συστολή με σταθερά L ($L < 1$). Τότε η φ έχει στο $[\alpha, b]$ ακριβώς ένα σταθερό σημείο, $\exists_1\, x^* \in [\alpha, b]$ $\varphi(x^*) = x^*$. Για τυχαία αρχική τιμή $x_0 \in [\alpha, b]$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ με $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι καλά ορισμένη (δηλ. $x_n \in [\alpha, b]$, για κάθε n), και για τα σφάλματα $x_n - x^*$ ισχύουν οι εκτιμήσεις:

(1) $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*| \leq L^n \max(x_0 - \alpha, b - x_0)$

(2) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|$

(3) $|x_n - x^*| \leq \dfrac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|$

Απόδειξη

- Μοναδικότητα: ✓
- Ύπαρξη και (2): ✓
- Απόδειξη (1):

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)|$$
$$\leq L\, |x_{n-1} - x^*|$$

$\xRightarrow{\text{Επαγωγικά}}$ $|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|$

$|x_0 - x^*| \leq \max(x_0 - \alpha, b - x_0)$

Απόδειξη (3):

$y_0 := x_{n-1}$

$y_1 := \varphi(y_0) = \varphi(x_{n-1}) = x_n$

Σύμφωνα με τη (2), έχουμε

$$|y_1 - x^*| \leq \frac{L^1}{1-L}|y_1 - y_0|,$$

δηλαδή:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$$

Παρατηρήσεις:

α) Το πρώτο φράγμα στην εκτίμηση (1) δεν μπορεί γενικά να υπολογιστεί, αφού εξαρτάται από το x^*.

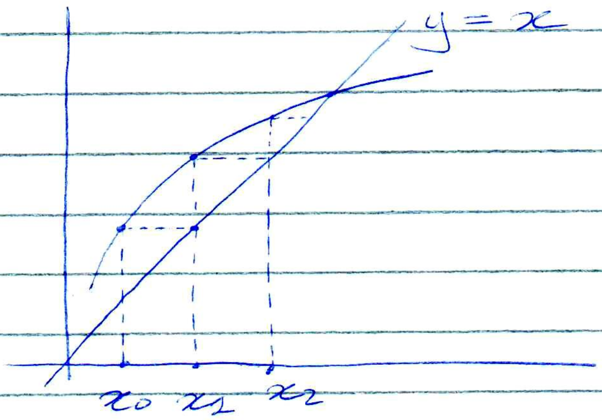
Όμως $x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0)$

$$= [\varphi(x_0) - \varphi(x^*)] + (x^* - x_0)$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \leq L|x_0 - x^*| + |x_0 - x^*|$$
$$= (1+L)|x_0 - x^*|$$

Άρα το φράγμα στη (2) είναι το πολύ $\frac{L+1}{1-L}$ φορές μεγαλύτερο από το πρώτο φράγμα στην (1) β) Έχουμε $|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1} |x_1 - x_0|$

Άρα το φράγμα στην (3) είναι καλύτερο από το φράγμα στη (2). Όμως οι (2) και (3) είναι διαφορετικής φύσης: η (2) είναι εκτίμηση εκ των προτέρων, ενώ η (3) είναι εκτίμηση εκ των υστέρων.



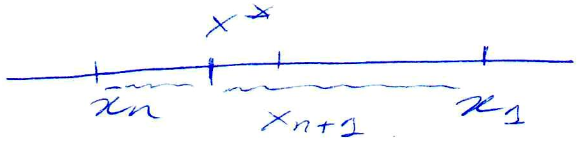
γ) $\varphi(x) := -x$, $x \in [-1, 1]$. Τότε $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$ $(\Rightarrow L = 1)$

Για $x_0 \neq 0$, παίρνουμε την ακολουθία $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots$ Δεν συγκλίνει!

Ταχύτητα σύγκλισης ακολουθίας

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία συγκλίνουσα ακολουθία, $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

Ορισμός: Λέμε ότι η ακολουθία



$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) γραμμικά (ή ότι η ταχύτητα σύγκλισής της είναι τουλάχιστον ένα), αν υπάρχει $\boxed{C<1}$ και $N\in\mathbb{N}$ τω.

$$|x_{n+1}-x^*| \le C\,|x_n-x^*| \quad \forall n\ge N$$

Λέμε ότι η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p (με $p>1$), αν υπάρχει σταθερά C τω.

$$|x_{n+1}-x^*| \le C\,|x_n-x^*|^p \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$p=2$: τετραγωνική
$p=3$: κυβική σύγκλιση

Στην περίπτωση που η ακολουθία δίνεται στη μορφή $x_n=\varphi(x_{n-1})$, και η φ είναι αρκετά ομαλή η ακριβής τάξη σύγκλισης είναι φυσικός αριθμός και μπορεί να υπολογιστεί εύκολα (Άσκηση)

Παρατηρήσεις:

1. Έστω ότι η τάξη είναι τουλάχιστον $p>1$, και $1\le q<p$. Τότε η τάξη σύγκλισης είναι και τουλάχιστον q. (Όσο μεγαλύτερη η τάξη σύγκλισης, τόσο ταχύτερα συγκλίνει η ακολουθία)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x^*| \le C_1 \, |\underbrace{x_n - x^*}_{>0}|^p$$

$$= \underbrace{\left(C_1 |x_n - x^*|^{p-q}\right)}_{\le C_2} |x_n - x^*|^q$$

Στην περίπτωση $q=1$, για αρκετά μεγάλο n, μπορώ να επιλέξω τη σταθερά C_2 μικρότερη του 1, γιατί $C_1 |x_n - x^*|^{p-q} \longrightarrow 0, \; n \to \infty$

(2/2)

$p=2$: τετραγωνική σύγκλιση
$p=3$: κυβική

$$|x_{n+1} - x^*| \le C \, |x_n - x^*|^p$$

<u>1η Περίπτωση</u>: $x_n = x^*$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x^* \quad \text{κ.λ.π.}$$

<u>2η Περίπτωση</u> Υποθέτουμε ότι $x_n \neq x^*$ για κάθε n.

$$|x_{n+1} - x^*| \le C \, |x_n - x^*|^p \Rightarrow$$

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} \le C \Rightarrow \left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \le C$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}$ είναι φραγμένη

<u>Ειδική περίπτωση:</u> $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = a.}$

Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον p.

Μάλιστα, αν $a \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p. Πραγματικά, αν η τάξη ήταν $p+\varepsilon$, με $\varepsilon>0$, τότε θα είχαμε

$$|x_{n+1}-x^*| \leq \tilde{C}_1 |x_n-x^*|^{p+\varepsilon} \Longrightarrow$$

$$\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \leq \tilde{C}_1 |x_n-x^*|^{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow |a| \leq 0 \quad \lightning$$

<u>Θεώρημα της συστολής:</u>

$$x_{n+1}-x^* = \varphi(x_n)-\varphi(x^*) \Longrightarrow$$

$$|x_{n+1}-x^*| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ <1}}{L} |x_n-x^*|$$

$\Longrightarrow$ η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον ένα

Πότε είναι μεγαλύτερη του ένα;

<u>Υπόθεση:</u> $\varphi \in C^1[a,b]$

Τότε

$$x_{n+1}-x^* = \varphi(x_n)-\varphi(x^*)$$
$$= \varphi'(\xi_n)(x_n-x^*)$$

με ξ_n ανάμεσα στα x_n και x^*

Επομένως

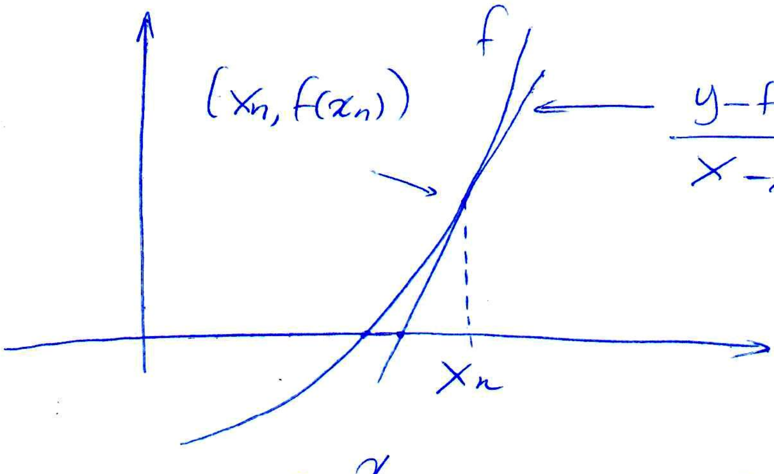
$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \varphi'(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \varphi'(x^*)$$

Για να είναι η τάξη μεγαλύτερη του ένα, πρέπει να ισχύει $\boxed{\varphi'(x^*)=0}$

Η μέθοδος του Νεύτωνα

Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής:



$$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n} = f'(x_n)$$

$$y = f(x_n) + (x-x_n)\,f'(x_n)$$

$$\Rightarrow 0 = f(x_n) + (x-x_n)\,f'(x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{x}_{x_{n+1}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\boxed{f'(x_n) \neq 0}$$

<u>Αναλυτικός τρόπος κατασκευής:</u>

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{x + f(x)g(x)}_{\varphi(x)}$$

$$f(x^*)=0 \quad \varphi'(x^*)=;$$

$$\varphi'(x) = 1 + f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi'(x^*)}_{=0} = 1 + f'(x^*)g(x^*) + 0$$

$$\Rightarrow g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}$$

Λογική επιλογή: $g(x) = -\frac{1}{f'(x^*)}$

Τότε $\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

Η μέθοδος του Νεύτωνα είναι επαναληπτική με <u>συνάρτηση επανάληψης</u>

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Απορίες

Τετάρτη, 2-4-14

Ώρες: 12-13

Παρασκευή, 4-4-14

Ώρες: 13-14

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

<u>Υπόθεση</u>: Η f είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή] μιας ρίζας της x^* και $f'(x^*) \neq 0$

<u>Ισχυρισμός</u>: $\varphi'(x^*) = 0$

Πράγματι

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$= \frac{f(x) f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \boxed{\varphi'(x^*) = 0}$$

<u>Θεώρημα</u> (<u>Τοπικά</u> τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* <u>απλή</u> ρίζα μιας συνάρτησης f (δηλ. τ.ω. $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)=0$)

Έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* τ.ω για κάθε $x_0 \in I$, η ακολουθία x_n,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

που κατασκευάζει η μέθοδος του Νεύτωνα να συγκλίνει στο x^*

Μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)},$$

δηλ η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 2, και στην περίπτωση $f''(x^*) = 0$ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς 2

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_1 |x_n - x^*|$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C_2 |x_n - x^*|^2$$

27/3/14

Θεώρημα (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$. Έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*. Τότε, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^* τ.ω. για κάθε αρχική τιμή $x_0 \in I$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

αν συγκλίνει στο x^*.

Μάλιστα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)},$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον δύο, και στην περίπτωση $f''(x^*)\neq 0$ είναι ακριβώς δύο

Απόδειξη

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Η φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

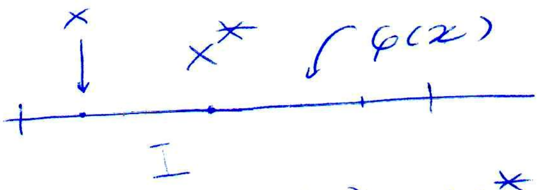
Επί πλέον $\boxed{\varphi'(x^*)=0}$

Επομένως, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω. $\max_{x \in I} |\varphi'(x)| = L < 1$

$$\varphi : I \longrightarrow I ,$$

συστολή ✓

Αρκεί να αποδείξω ότι $\varphi : I \to I$ και το αποτέλεσμα έπεται μετά από το θεώρημα της συστολής



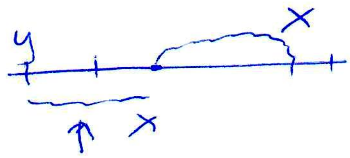
$x \in I$

$$\varphi(x) - x^* = \varphi(x) - \varphi(x^*)$$
$$\Rightarrow |\varphi(x) - x^*| \le \underbrace{L}_{<1} |x - x^*|$$

$\Rightarrow \varphi(x) \in I$

$$\Rightarrow \boxed{|\varphi(x) - x^*| \le |x - x^*|}$$

$$|y - x^*| \le |x - x^*| \not\Rightarrow y \in I$$



$$|\varphi(x) - x^*| \le \frac{|I|}{2}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) \in I$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor: $f(x_n) = \underbrace{f(x^*)}_{=0} + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n1})$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n2})$$

με ξ_{n1}, ξ_{n2} μεταξύ του x_n και του x^*.

Επομένως

$$x_{n+1}-x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n-x^*)f'(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^2}{2}f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n2})}$$

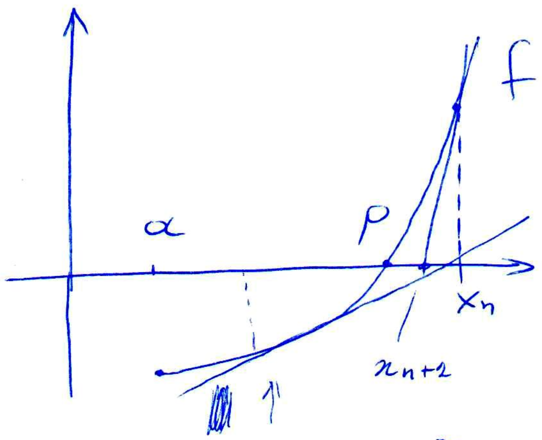
$$\Rightarrow x_{n+1}-x^* = (x_n-x^*)^2\, \frac{f''(\xi_{n2})-\frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2})-\frac{1}{2} f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n2})}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{f''(x^*)-\frac{1}{2} f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

<u>Πρόταση</u> (<u>Ολική</u> σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω $a\in\mathbb{R}$, $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω. $f(a)<0$ και $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$, για κάθε $x\geq a$.



Τότε, η f έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho > a$, και για $x_0 \geq a$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x)=0$ συγκλίνει στην ρ.

$$\xi \geq a : \begin{cases} f(\xi)<0 \iff a\leq \xi < \rho \\ f(\xi)>0 \iff \xi > \rho. \end{cases}$$

Απόδειξη

Μοναδικότητα της ρίζας:

Προφανής, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Ύπαρξη ρίζας: Αφού η f είναι συνεχής και $f(\alpha)<0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $b>\alpha$ τ.ω. $f(b)>0$.

Έχουμε

$$f(b) = f(\alpha) + (b-\alpha) f'(\alpha) + \underbrace{\frac{(b-\alpha)^2}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{>0}}_{\geq 0}$$

$$\geq f(\alpha)+(b-\alpha)f'(\alpha).$$

Όμως

$$f(\alpha)+(b-\alpha)f'(\alpha)>0$$

$$\iff \boxed{b > \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}}$$

Συμπέρασμα: για $b>\alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ έχουμε $f(b)>0$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\underbrace{[f'(x)]^2}_{>0}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x)>0 & \text{για } x>\rho \\ \varphi'(x)<0 & \text{για } \underset{\substack{\vee\!| \\ \alpha}}{x}<\rho \end{cases}$$

$x_{n+1}-\rho=\varphi(x_n)-\varphi(\rho)$

$=\varphi'(\xi_n)(x_n-\rho)$

ξ_n μεταξύ x_n και ρ

- $x_n>\rho \Rightarrow x_{n+1}>\rho$
- $x_n<\rho \Rightarrow x_{n+1}>\rho$

Συμπέρασμα: $\boxed{x_n \geq \rho, \ n \geq 1}$

$x_n>\rho$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}<x_n$$

Συμπέρασμα: Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, και φραγμένη προς τα κάτω από το ρ

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Έστω $x_n \to y$, $n\to\infty$ (Προφανώς, $y\geq\rho$)

Όμως

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\cancel{y}=\cancel{y}-\frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y)=0 \Rightarrow \boxed{y=\rho}$$

(2/2)

Ερώτημα: Τί μπορούμε να πούμε για την ταχύτητα σύγκλισης στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας;

Παράδειγμα $f(x) = x^2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Επαγωγικά ~~κλπ~~

Ιδιαίτερα: $x_n \to 0, \; n \to \infty.$

$$x_{n+1} - \underset{\substack{\| \\ 0}}{x^*} = \frac{x_n}{2} = \frac{x_n - x^*}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \frac{1}{2}}$$

Τάξη σύγκλισης = 1

Γενικά: Έστω x^* ρίζα τάξης $m \geq 2$ μιας συνάρτησης f, δηλ.

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$$

και $f^{(m)}(x^*) \neq 0$.

Τάξη σύγκλισης;

$$x_{n+1}-x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Taylor: $$f(x_n) = f(x^*) + (x_n-x^*)f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^{m}}{m!} f^{(m)}(\xi_{n1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n-x^*)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m)}(\xi_{n2})$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{\frac{(x_n-x^*)^{\cancel{m}}}{m\cancel{!}} f^{(m)}(\xi_{n2})}{\frac{\cancel{(x_n-x^*)^{m-1}}}{\cancel{(m-1)!}} f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - (x_n-x^*)\frac{f^{(m)}(\xi_{n2})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = 1 - \frac{f^{(m)}(\xi_{n2})}{m f^{(m)}(\xi_{n2})} \xrightarrow{n\to\infty} 1-\frac{1}{m} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{τάξη} = 1}$

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Μέθοδος της τέμνουσας

Νεύτων: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Προσεγγίζουμε την $f'(x_n)$ με

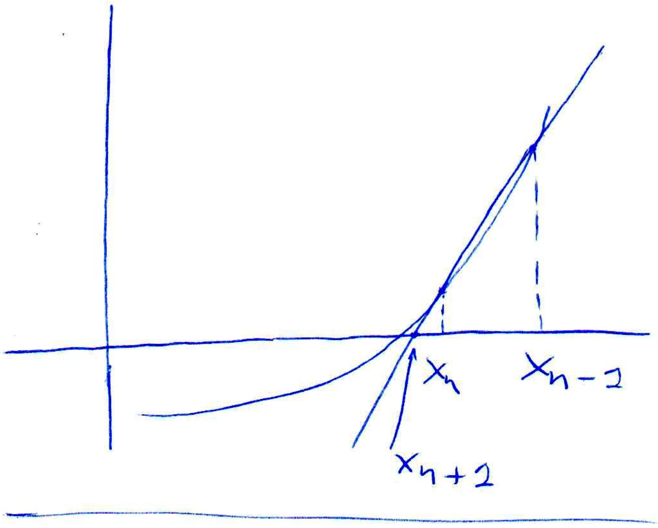
$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

και παίρνουμε:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-2})}{x_n - x_{n-2}}}$$

μέθοδος
της τέμνουσας

Η μέθοδος χρησιμοποιεί <u>δύο</u> αρχικές τιμές x_0 και x_1



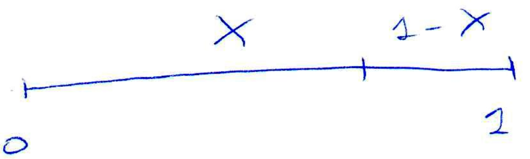
<u>Κόστος ανά βήμα:</u> Ένας υπολογισμός της f

Θεώρημα (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)

Έστω x^* ρίζας μιας συνάρτησης f, και $(a,b) \subset \mathbb{R}$ τ.ω. $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$ και $f'(x^*) \neq 0$ και $f''(x^*) \neq 0$.

Τότε υπάρχει ένα διάστημα I, που περιέχει το x^*, τ.ω. για κάθε αρχικές τιμές $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας συγκλίνει στο x^*.

Η τάξη σύγκλισης είναι $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62$



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη συχνότερα από τη μέθοδο του Νεύτωνα. Ο λόγος: Δεν χρησιμοποιεί την παράγωγο και χρησιμοποιεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα. Συγκλίνει λίγο πιο αργά από τη μέθοδο του Νεύτωνα.

Υπόθεση: Το κόστος υπολογισμού τιμών της f και της f' είναι το ίδιο:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Newton

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέμνουσα

Θεωρούμε την ακολουθία (y_{2n})

Τάξη σύγκλισης $= p^2 \simeq 2.62 > 2$ ← Newton

Ισχυρισμός: $y_n \to x^*$ τάξη $= p$

$z_n = y_{2n} \to x^*$ τάξη p^2

$$|y_{n+1} - x^*| \leq C_1 (y_n - x^*)^p$$

$$|z_{n+1} - x^*| = |y_{2n+2} - x^*| \leq C_1 |y_{2n+1} - x^*|^p$$

$$\leq C_1 \left(C_1 |y_{2n} - x^*|^p \right)^p$$

$$= C_1^{p+1} |\underbrace{y_{2n}}_{z_n} - x^*|^{p^2}$$

$$\Rightarrow |z_{n+1} - x^*| \leq C_1^{p+1} |z_n - x^*|^{p^2}$$

28/3/14

<u>Άσκηση 1.12</u>

$$y_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+\alpha}\,dx, \quad n=0,1,2,\dots$$

α) $y_{n+1} < y_n$

$$0 \le y_n \le \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{n+1}$$

β) ...

γ)
$$\begin{cases} y_0 = \log\dfrac{\alpha+1}{\alpha} \\ y_n = \dfrac{1}{n}(-\alpha)y_{n-1}, \quad n \ge 1 \end{cases}$$

ασταθής αλγόριθμος

$$y_n - \tilde{y}_n = (-\alpha)(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

δ) Ευσταθής αλγόριθμος για τον υπολογισμό του y_{10}:

Ξεκινάμε με την προσέγγιση $\tilde{y}_{20} \approx 0$ (μέγιστο σφάλμα $\le \frac{1}{21\alpha}$)

Υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις $\tilde{y}_{19}, \tilde{y}_{18}, \dots, \tilde{y}_{10}$ αναδρομικά από τον τύπο

$$\tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \tilde{y}_n\right), \quad n = 20, \dots, 11.$$

Ευστάθεια;

$$y_{n-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$$

$$\Rightarrow y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1} = -\frac{1}{\alpha}\left(y_n - \tilde{y}_n\right)$$

$$\Rightarrow y_{10} - \tilde{y}_{10} = \frac{1}{(-\alpha)^{10}}\left(y_{20} - \tilde{y}_{20}\right)$$

$$\Rightarrow \left|y_{10} - \tilde{y}_{10}\right| = \frac{1}{\alpha^{10}}\left|y_{20} - \tilde{y}_{20}\right|$$

ευσταθής αλγόριθμος

Άσκηση 1.13 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + (1-\alpha)y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \tilde{x} + \tilde{y} = 1 + \varepsilon_1 \\ \tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{y} = \varepsilon_2 \end{array}\right\}$$

$\boxed{\alpha \neq 0}$ $\alpha = 0$ αδύνατο!

Θέτουμε $u := \tilde{x} - x$ και $v = \tilde{y} - y$, και έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} u + v = \varepsilon_1 \\ u + (1-\alpha)v = \varepsilon_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u = \varepsilon_1 - \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha} \\ v = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\alpha} \end{array}\right\}$$

Συμπέρασμα: Το σύστημα έχει καλή κατάσταση για $|\alpha|$ μεγάλη, ενώ έχει κακή κατάσταση για $|\alpha|$ μικρή.

Άσκηση 2.18

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x^*) = x^*$

Η φ είναι $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

<u>Υπόθεση:</u> $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$

και $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$

<u>Ν.Δ.Ο.:</u> για x_0 αρκετά κοντά στο x^*, ισχύει $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \underbrace{\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)}_{\neq 0}$$

Δηλ. η τάξη σύγκλισης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακριβώς p.

<u>Απόδειξη:</u>

Αφού $\varphi'(x^*) = 0$, υπάρχει κλειστό διάστημα I, με μέσον το x^*, τ.ω.

$$\max_{x\in I} |\varphi'(x)| = L < 1 \quad (\text{Θεώρημα } 2.2)$$

Τότε $\varphi : I \to I$, και σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής,

- η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη
- $x_n \to x^*$, $n\to\infty$

<u>Τάξη σύγκλισης:</u>

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$= \underbrace{\varphi(x^*)}_{= x^*} + (x_n - x^*)\cancel{\varphi'}^{\,0}(x^*) + \dots$$

Taylor

$$\dots + \frac{(x_n-x^*)^{p-1}}{(p-1)!}\cancel{\varphi^{(p-1)}}^{\,0}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$$

με ξ_n μεταξύ των x_n και x^*

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n-x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$$

<u>Άσκηση 2.14</u>

$f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3$$

Μέθοδος διχοτόμησης:

Ν.Δ.Ο. $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

Η f είναι συνεχής στο $[-1, \sqrt{2}]$.

$$f(-1) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 < 0$$

$$f(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^3 > 0$$

Άρα

$$x_n \to x^*, \ n \to \infty$$

με x^* ρίζα της f

Όμως, η f έχει μόνο μία ρίζα στο $[-1, \sqrt{2}]$,

την $x^* = \frac{1}{2}$,

συνεπώς

$$x_n \to \frac{1}{2}, \ n \to \infty.$$

<u>Άσκηση 2.7</u>

$\varphi : [a, b] \to [a, b]$

$\varphi \in C^1[a, b]$

$\underbrace{\max_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1}$

$\Downarrow$

(Η φ απεικονίζει το $[a, b]$ στο $[a, b]$ και είναι συστολή)

$x_0 \in [a, b]$

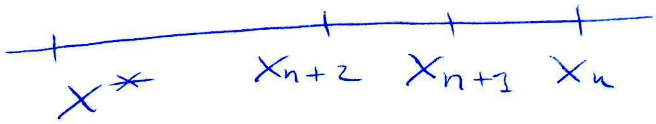
$x_{n+1} = \varphi(x_n), \ n \in \mathbb{N}_0$

καλά ορισμένη

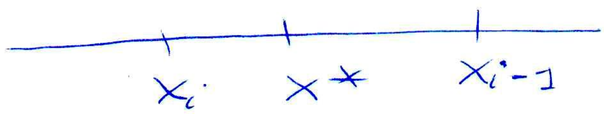
και $x_n \to x^*, \ n \to \infty$,

όπου x^* το μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο $[a, b]$

α) Αν $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, b]$,
Ν.Δ.Ο. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα στο x^*.



β) Αν $\varphi'(x) < 0$, για κάθε $x \in [a, b]$,
τότε το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i



$$
\begin{aligned}
x_i - x^* &= \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x^*) \\
&= \underline{\varphi'(\xi_i)}\,(x_{i-1} - x^*)
\end{aligned}
$$

- $\varphi'(x) > 0 \Rightarrow (x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) > 0$
- $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow (x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) < 0$

$$
\begin{aligned}
|x_i - x^*| &= |\varphi'(\xi_i)|\,|x_{i-1} - x^*| \\
&\le |x_{i-1} - x^*|
\end{aligned}
$$

1/4/14

Άσκηση 2.8

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$

N.Δ.Ο.: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in [0,1]$

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

$(x_{n+1} = \varphi(x_n))$

Αρκεί να δείξουμε:

- $\varphi : [0,1] \to [0,1]$
- φ συστολή

$\varphi'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$

$\Rightarrow \varphi$ αύξουσα

$\Rightarrow \underbrace{\varphi(0)}_{= \frac{1}{2} \geq 0} \leq \boxed{\varphi(x)} \leq \underbrace{\varphi(1)}_{\frac{1}{2}\sqrt{e} \leq 1} \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \varphi : [0,1] \to [0,1]$ ✓

$$L = \max_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \max_{0\leq x \leq 1} \left(\frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{e} \leq \frac{1}{2}$$

Η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος της συστολής επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και το όριό της $x^* \in [0,1]$

Άσκηση 2.9

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n}), \; n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in [0,1]$

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) := \frac{1}{3}(2 + x - e^{x})$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}\underbrace{(1 - e^{x})}_{\leq 0} \leq 0$$

$\Rightarrow$ φ φθίνουσα

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(1)}_{\frac{3-e}{3} \geq 0} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(0)}_{\frac{1}{3} \leq 1} \quad \forall x \in [0,1]$$

$\Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi : [0,1] \to [0,1]$

$\varphi''(x) = -\frac{1}{3}e^{x} < 0$

$\Rightarrow$ φ' φθίνουσα

$$\Rightarrow L = \max_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \max(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|)$$

$$= \max\left(0, \frac{e-1}{3}\right) = \frac{e-1}{3} < 1$$

Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$

$x_{n+1} := \frac{1}{6}\left(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}\right),\ n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^* \in [0,1]$

και $$|x_n - x^*| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_1 - x_0|$$

με $\alpha := \frac{8-e}{6}$

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) := \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 - e^x\right)$

$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\left(8x - e^x\right)$

$\varphi'(0) = -\frac{1}{6} < 0$

$\varphi'(1) = \frac{1}{6}(8-e) > 0$

$\Rightarrow$ Η φ δεν είναι μονότονη

$$\varphi(x) \le \max_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right) + \max_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(-e^x)\right)$$

$$= \frac{1}{6}7 + \left(-\frac{1}{6}e^0\right) = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1 \le 1$$

$$\varphi(x) \ge \min_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(3+4x^2)\right) + \min_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{6}(-e^x)\right)$$

$$= \frac{3}{6} - \frac{e}{6} = \frac{3-e}{6} \ge 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3-e}{6}}_{\geq 0} \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \varphi : [0,1] \to [0,1]$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{6}(8-e^x) > 0$$

$\Rightarrow \varphi'$ αύξουσα

$$\Rightarrow L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)|$$

$$= \max\left(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)| \right)$$

$$= \max\left(\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6} \right) = \frac{8-e}{6} < 1$$

Απορίες
Αίθουσα: 12-13
Παρασκευή:
13-14

Το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα της συστολής

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$

$x_{n+1} := \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$ $(\cos x^* = x^*)$

και

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(x) := \cos x$

Προφανώς $\varphi : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\varphi'(x) = -\sin x$

$\Rightarrow \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = 1$ (όχι συστολή)

Παρατηρούμε ότι $x_n \in [-1,1]$, $n \geq 1$.

$\varphi : [-1,1] \longrightarrow \cancel{\mathbb{R}}\ [-1,1]$

$\varphi(x) = \cos x$

$\max_{-1\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| = \max_{0\leq x\leq 1} \sin x = \underline{\sin 1} < 1$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$ και $\boxed{\cos x^* = x^*}$

$\boxed{\cdot\ x^* > 0}$

$x_{n+1} - x^* = \cos x_n - \cos x^*$

$= (-\sin(\xi_n))\ (x_n - x^*)$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

$\Rightarrow \dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin \xi_n \xrightarrow{n\to\infty} -\sin x^* = -\sqrt{1-\cos^2 x^*}$

$= -\sqrt{1-(x^*)^2}$