6. Αριθμητική Ολοκλήρωση

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

Ζητούμενο: $\int_a^b f(x)\,dx$

Έστω F παράγουσα της f, δηλαδή $F' = f$. Τότε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Προβλήματα

α) Κατά κανόνα δεν μπορούμε να βρούμε την F.

β) Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η f έχει απλή μορφή και η F πολύπλοκη.

π.χ.: $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan \frac{x}{\sqrt{2}-x} + \arctan \frac{x}{\sqrt{2}+x}\right] + c$$

198

Τύποι (κανόνες) αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$: κόμβοι του τύπου

$w_0, w_1, \ldots, w_n$: βάρη

$$\boxed{I(f) \approx Q_{n+1}(f)}$$

Τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes

Χαρακτηριστικό: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

<u>ομοιόμορφος διαμερισμός</u>

$n \in \mathbb{N}$, (βήμα) $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$

Έστω $p_n \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Ορίζουμε:

$$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Ιδιότητα:

$$\forall f \in \mathbb{P}_n : Q_{n+1}(f) = I(f)$$

<u>χωρίς σφάλμα</u>

Ο Q_{n+1} ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού το πολύ n <u>ακριβώς</u>.

Στόχος: Να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx$ στη μορφή:

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$$

200

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n$$

τα πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Τότε:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)}$$

Άρα:

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{= w_i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Πώς βρίσκουμε τα w_i;

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx =$$

$$\underset{x=a+hs}{=} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-x_j}{x_i-x_j}\, h\, ds =$$

$$= h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-(a+jh)}{(a+ih)-(a+jh)}\,ds =$$

$$= h \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds =: w_i^*$$

Τα w_i^* είναι ανεξάρτητα από το $[a,b]$.
Τα υπολογίζουμε μία φορά και μετά βρίσκουμε τα w_i από τη σχέση:

$$w_i = h\, w_i^* = \frac{b-a}{n}\, w_i^*\,, \quad i=0,\dots,n$$

$f \in C[a,b]$

<u>Ερώτημα:</u> $Q_{n+1}(f) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$, $n \to +\infty$

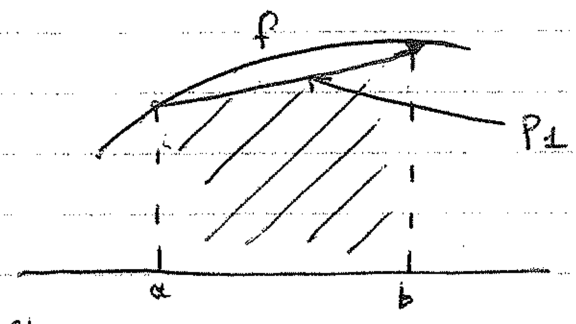
<u>Απάντηση:</u> Γενικά όχι!

Πρακτικό ενδιαφέρον έχουν οι τύποι των Newton - Cotes με μικρό n.
Εφαρμόζονται ως εξής:
Παίρνουμε έναν διαμερισμό του $[a,b]$ και εφαρμόζουμε έναν τύπο σε κάθε υποδιάστημα.

Οι τύποι που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο λέγονται σύνθετοι.

$n=1$: $Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$

<u>Τύπος του τραπεζίου (απλός)</u>



$$\int_a^b P_1(x)dx = (b-a)\,\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$n=2$: $Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$

<u>Τύπος του Simpson</u>

★ Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)}_{=R_2(f)} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Απόδειξη

• $Q_2(f) = Q_2(p_1)$

$p_1 \in \mathbb{P}_1$ τέτοιο ώστε: $p_1(a) = f(a)$
$p_1(b) = f(b)$

• $Q_2(p_1) = \int_a^b p_1(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_2(p_1) =$$
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx =$$
$$= \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\,dx$$

Τώρα:

$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi(x) \in (a,b)$:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)(x-b)$$

Οπότε:

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(\xi(x))\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx$$

Γενικά ισχύει:

$$(b-a)\min_{a\le x\le b}\varphi(x) \le \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \max_{a\le \xi\le b}\varphi(\xi)\,dx = (b-a)\max_{a\le x\le b}\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \min_{a\le x\le b}\varphi(x) \le \underbrace{\frac{\int_a^b \varphi(x)\,dx}{b-a}}_{=\varphi(\theta)} \le \max_{a\le x\le b}\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi(\theta)$$

Άρα έχουμε:

$$\min_{a\le\theta\le b} f''(\theta)\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{>0} \le \int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\ge 0} f''(\xi(x))\,dx \le$$

$$\le \int_a^b (x-a)(b-x)\max_{a\le\theta\le b} f''(\theta)\,dx = \max_{a\le\theta\le b} f''(\theta)\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \min_{a\le\theta\le b} f''(\theta) \le \frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} \le \max_{a\le\theta\le b} f''(\theta)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής έχουμε:

$$\frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)dx} = f''(n)$$

Οπότε έχουμε:

$$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = -\frac{f''(n)}{2} \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)dx}_{=\frac{(b-a)^3}{6}}$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(n)$$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

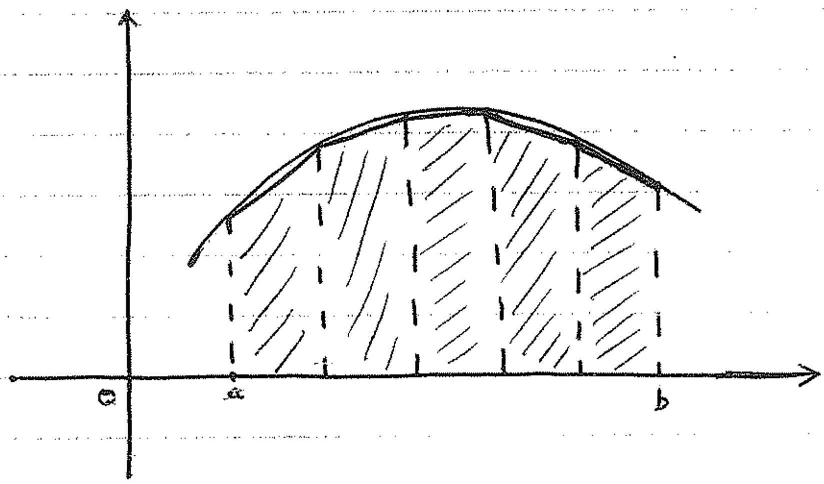
$n\in\mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$

Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα.
Παίρνουμε τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου:

$$Q^T_{n+1}(f) = \frac{x_1-x_0}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] +$$

$$+\frac{x_2-x_1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\dots+\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right]$$



Πρόταση (Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q^T_{n+1} ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου στο $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q^T_{n+1}(f) = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

Απόδειξη

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q^T_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}_{= -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i),\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})} \Big\} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) =$$

$$= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) =$$

$$= \underbrace{-\frac{h^3}{12} n}_{= -\frac{b-a}{12} h^2} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$\min_{a \le x \le b} f''(x) \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \max_{a \le x \le b} f''(x) = \max_{a \le x \le b} f''(x)$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής: $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = f''(\xi)$ με $\xi \in (a,b)$

(208)

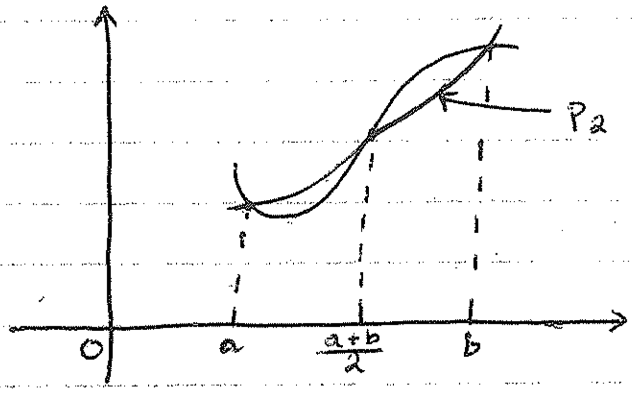
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}^T(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}^T(f) \right| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \|f''\|_\infty$$

Ιδιαίτερα $Q_{n+1}^T(f) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$, $n \to +\infty$

Ο τύπος είναι τάξης δύο.

Ο τύπος του Simpson



$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad x_i := a + ih, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$p_2 \in \mathbb{P}_2$, $\quad p_2(x_i) = f(x_i)$, $\quad i = 0, 1, 2$

- $Q_3(p_2) = \int_a^b p_2(x)\,dx$

- $Q_3(p_2) = Q_3(f)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(p_2) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - p_2(x)\right]dx$$

(210)

$\forall x \in [a, b] \quad \exists \xi(x) \in (a, b):$

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{6}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

Άρα:

$$\int_a^b f(x)dx - Q_3(f) = \frac{1}{6}\int_a^b \underbrace{(x-a)}_{>0}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\underbrace{(x-b)}_{<0} f'''(\xi(x))dx$$

Δεν μπορώ να βγάλω την παράγωγο έξω από το ολοκλήρωμα επειδή το $x - \frac{a+b}{2}$ αλλάζει το πρόσημο!

Ο Q_3 ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και δευτέρου βαθμού. Ισχύει όμως ότι και για το $q_3(x) = x^3$

$$\int_a^b q_3(x)dx = Q_3(q_3)$$

<u>Συμπέρασμα:</u> Ο Q_3 ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμο μέχρι και τρίτου βαθμού.

$$q_3(x) = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + P_2(x) \quad \text{με } P_2 \in \mathbb{P}_2$$

$$\int_a^b q_3(x)dx - Q_3(q_3) = \Big[\underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 dx}_{= p(x) = 0} - \underbrace{Q_3(p)}_{=0}\Big] +$$

$$+ \underbrace{\Big[\int_a^b P_2(x)dx - Q_3(P_2)\Big]}_{=0}$$

$$Q_3(p) = \frac{h}{3}\left[p(a) + \underbrace{p(b)}_{\substack{\parallel \\ -p(a)}}\right] = 0$$

$p_3 \in \mathbb{P}_3$

$p_3(x_i) = f(x_i)\ ,\quad i=0,1,2$
$p_3'(x_1) = f(x_1)$

(Άσκηση 4.15)

- $Q_3(p_3) = Q_3(f)$

- $Q_3(p_3) = \int_a^b p_3(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(p_3) =$$

$$= \int_a^b [f(x) - p_3(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4!}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\underbrace{\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx}_{=\frac{(b-a)^5}{2^3\cdot 15}} =$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2^4\cdot 180} f^{(4)}(\xi(x))$$

(212)

Σύνθετος τύπος του Simpson

$n \in \mathbb{N}$, άρτιος

$h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$

Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του Simpson στα διαστήματα $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{n-2}, x_n]$ και αθροίζουμε τα αποτελέσματα.

Έτσι προκύπτει ο σύνθετος τύπος του Simpson:

$$Q^S_{n+1}(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$f \in C^4[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx - Q^S_{n+1}(f) =$$

$$= -\frac{(x_2-x_0)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_1) - \frac{(x_4-x_2)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_2) - \ldots - \frac{(x_{n-2}-x_n)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_{n/2}) =$$

$$= -\frac{(2h)^5}{2^4 \cdot 180} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) =$$

$$= -\frac{2^5 h^5}{2^4 180} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) =$$

$$= -\frac{h^4}{180} nh \cdot \frac{1}{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) =$$

$$= -\frac{b-a}{180} h^4 \left[\frac{1}{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)\right] =$$

$$= -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

Τύποι του Gauss

$[a,b]$, $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους

$w(x)\geq 0$, $0<\int_a^b w(x)\,dx<+\infty$

$$I(f)=\int_a^b w(x)f(x)\,dx$$

Ερώτημα: Έστω $x_1,\ldots,x_n\in[a,b]$ τυχαίοι κόμβοι και $w_1,\ldots,w_n$ βάρη

$$Q_n(f)=\sum_{i=1}^{n} \underbrace{w_i}_{\substack{\text{εξαρτώνται από}\\ \text{τη συνάρτηση } w}} f(x_i)$$

Ισχυρισμός: Για καμμία επιλογή των x_i και w_i δεν μπορεί να ισχύει:

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = Q_n(p)\quad \forall p\in\mathbb{P}_{2n}$$

$$p(x):=(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2$$

$p\in\mathbb{P}_{2n}$, $Q_n(p)=0$

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx=\int_a^b w(x)\underbrace{(x-x_1)^2\ldots(x-x_n)^2}_{\geq 0}\,dx>0$$

(214)

Βοηθητικό αποτέλεσμα από το $5^{ο}$ κεφάλαιο:

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p_n βαθμού <u>ακριβώς n</u> με συντελεστή του x^n <u>ίσον με τη μονάδα</u>, τέτοιο ώστε:

$$\int_a^b w(x) p_n(x) r_{n-1}(x) dx = 0 \quad , \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Το p_n έχει n ρίζες, πραγματικές, απλές όλες στο (a,b).

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα των τύπων του Gauss)

Έστω $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $w:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση βάρους και $n\in\mathbb{N}$

α) Με κόμβους $\boxed{x_1,\dots,x_n}$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1,\dots,w_n$ τέτοια ώστε ο $Q_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ να ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$ ακριβώς, δηλαδή:

$$(*)\qquad \forall p\in\mathbb{P}_{2n-1}:\int_a^b w(x)p(x)\,dx=Q_n(p)$$

Επιπλέον ισχύει $w_i>0$, $i=1,\dots,n$

β) Αν ένας τύπος Q_n, $Q_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ έχει την ιδιότητα $(*)$, τότε τα $x_1,\dots,x_n$ είναι ρίζες του p_n.

216

Απόδειξη

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$

Έστω $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τέτοιο ώστε $q(x_i) = p(x_i)$, $i=1,\dots,n$

Τότε $p(x) - q(x) = \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{=p_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)$,

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Συμπέρασμα: $p = q + p_n r_{n-1}$, $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Άρα:

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx + \underbrace{\int_a^b w(x)p_n(x)r_{n-1}(x)dx}_{=0}$$

Άρα:

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx$$

$p \in \mathbb{P}_{2n-1}$, $q \in \mathbb{P}_{n-1}$, $q(x_i) = p(x_i)$, $i=1,\dots,n$

Αν $L_1,\dots,L_n \in \mathbb{R}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_1,\dots x_n$ τότε

$$q(x) = \sum_{i=1}^n p(x_i) L_i(x)$$

Άρα:

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)\sum_{i=1}^n p(x_i)L_i(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\int_a^b w(x)L_i(x)dx\right)}_{=w_i \text{, ανεξάρτητα του } p} p(x_i)$$

Υπάρχει άλλη επιλογή;

Έστω $\widetilde{Q}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{w}_i f(x_i)$ με την ιδιότητα (*).

Τότε για $j \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε:

$$w_j = Q_n(L_j^2) = \int_a^b w(x) \underbrace{(L_j(x))^2}_{\in \mathbb{P}_{2n-2}} dx =$$

$$= \widetilde{Q}_n(L_j^2) = \widetilde{w}_j$$

$$\Longrightarrow \widetilde{w}_j = w_j \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

Ιδιαίτερα $w_j > 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$

β) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Θέτουμε $p(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n) r_{n-1}(x)$

Τότε $Q_n(p) = 0$, $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

Άρα, σύμφωνα με την (*):

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = 0$$

δηλαδή

$$\int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{=q_n} r_{n-1}(x) dx = 0, \ \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Επομένως, $q_n = p_n$, άρα $x_1, \dots, x_n$ ρίζες του p_n.

★ Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w:(a,b) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους, $n \in \mathbb{N}$, και Q_n ο τύπος του Gauss.
Έστω $f \in C^{2n}[a,b]$
Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\,dx$$

(220)

Απόδειξη

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τέτοιο ώστε
$p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$, $i=1,\dots,n$
Τότε $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, \xi(x) \in (a,b)$:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \underbrace{(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2}_{=[p_n(x)]^2}$$

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) =$$

$$= \int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(p) =$$

$$= \int_a^b w(x) f(x)\,dx - \int_a^b w(x) p(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b w(x) [f(x) - p(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b w(x) \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} [p_n(x)]^2\,dx =$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\,dx$$

$$\min_{a \le \theta \le b} f^{(2n)}(\theta) \underbrace{\int_a^b w(x) [p_n(x_i)]^2\,dx}_{\geq 0} \le \int_a^b \underbrace{w(x)}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x)) \underbrace{[p_n(x)]^2}_{\geq 0}\,dx \le$$

$$\le \int_a^b w(x) [\max_{a \le \theta \le b} f^{(2n)}(\theta)] [p_n(x)]^2\,dx = \max_{a \le \theta \le b} f^{(2n)}(\theta) \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \min_\theta f^{(2n)}(\theta) \le \underbrace{\frac{\int_a^b w(x) f^{(2n)}(\xi(x)) [p_n(x)]^2\,dx}{\int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\,dx}}_{= f^{(2n)}(\xi)} \le \max_\theta f^{(2n)}(\theta)$$