4. Παρεμβολή

Κατά κανόνα για να υπολογίσουμε τιμές μιας συνάρτησης f στον υπολογιστή, για να την παραστήσουμε γραφικά, να την ολοκληρώσουμε, να την παραγωγίσουμε κλπ. την προσεγγίζουμε με άλλες απλές συναρτήσεις, συνήθως με πολυώνυμα ή με τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ένας τρόπος προσέγγισης είναι η Παρεμβολή.

Δύο είδη παρεμβολής:

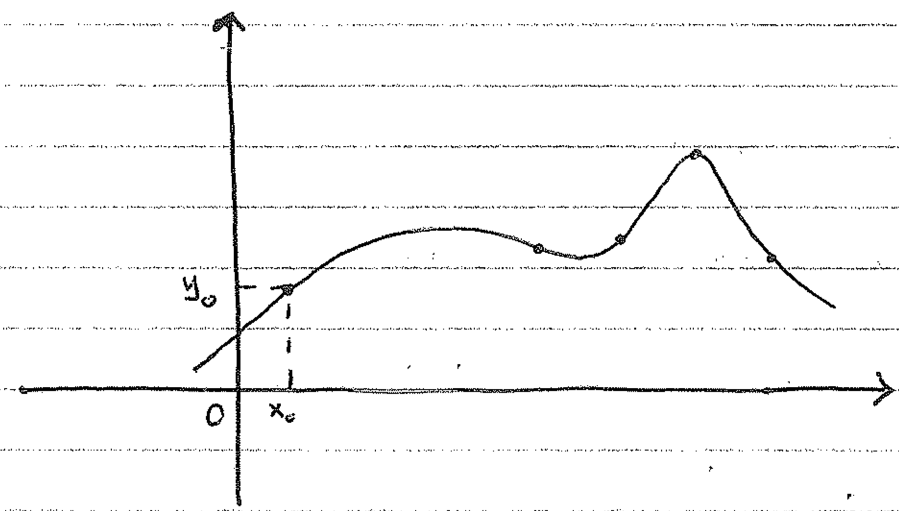
- Παρεμβολή τύπου Lagrange
- Παρεμβολή τύπου Hermite

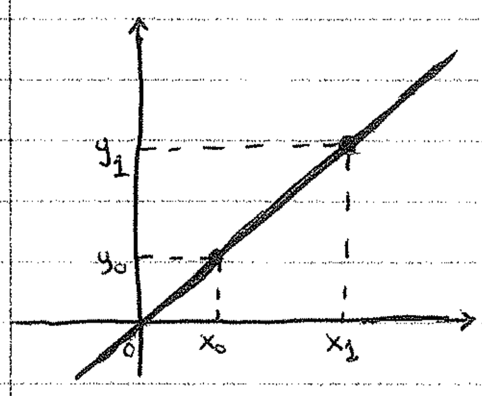
Πολυωνυμική παρεμβολή

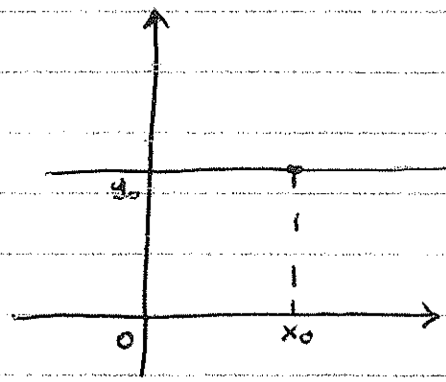
Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange)

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.
Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

(*) $p(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, \dots, n$







Απόδειξη

$p \in \mathbb{P}_n$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
με $n+1$ άγνωστους συντελεστές.

Το (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα με $n+1$ εξισώσεις και $n+1$ αγνώστους.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι αυτό το γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση.

Θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα (δηλαδή $y_i = 0$, $i = 0, \ldots, n$)
Ζητείται $q \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:
$q(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$
Επομένως, αναγκαστικά, $q = 0$, αφού είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n και έχει $n+1$ ρίζες.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

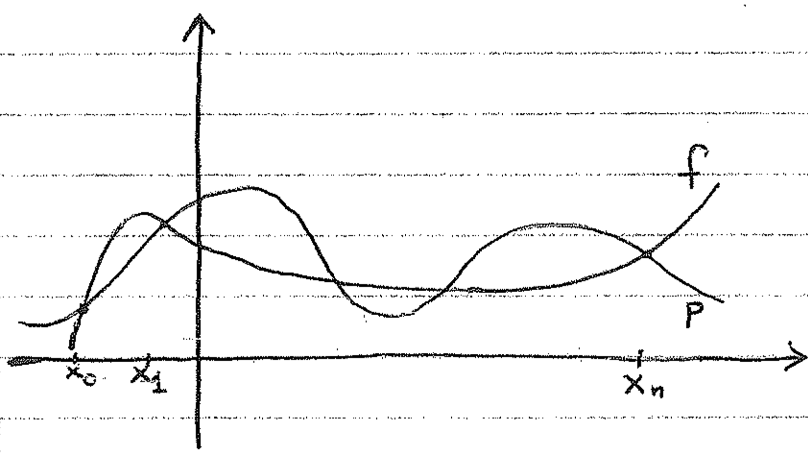
Ένα πολυώνυμο p βαθμού ακριβώς n έχει ακριβώς n ρίζες (λαμβάνοντας υπ' όψιν και την πολλαπλότητα).

Έστω f μία συνάρτηση, και $x_0, \dots, x_n$ σημεία του πεδίου ορισμού της, ανά <u>δύο</u> διαφορετικά μεταξύ τους.
Τότε το $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$.

- Το p είναι παρεμβάλλουσα της f
- Το p παρεμβάλλεται στην f.



★★★ **Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)**

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

Τότε:

(*)
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b): \\ f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \end{array}}$$

Απόδειξη

1η περίπτωση: $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$

Τότε η (*) ισχύει για όλα τα ξ

2η περίπτωση: $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i=0,\dots,n$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\Phi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

$$\varphi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t)$$

$t \in [a,b]$

- $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$

- $$\varphi(x_i) = \underbrace{f(x_i) - p(x_i)}_{=0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi(x_i)}_{=0} = 0 \,, \quad i=0,\dots,n$$

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \Phi(x) = 0$$

Άρα η φ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες

Rolle: η φ' έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες
η φ'' έχει τουλάχιστον n ρίζες
⋮
η $\varphi^{(n+1)}$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα.

Έστω $\xi \in (a,b)$ ρίζα της $\varphi^{(n+1)}$,
δηλαδή $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

Τώρα:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \underbrace{p^{(n+1)}(t)}_{=0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!}$$

$$\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) = t^{n+1} + q(t), \text{ με } q \in \mathbb{P}_n$$

$$\Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0 = (n+1)!$$

Άρα:

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} (n+1)! = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \Phi(x)}$$

Πόρισμα

$$\|f-p\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \max_{a\le x\le b} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής

- Lagrange
- Νεύτων
- Aitken - Neville

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange

Ζητείται $L_i \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad j=0,\dots,n$$

Τα x_j, για $j \ne i$, είναι ρίζες του L_i, άρα

$$L_i(x) = a \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} (x-x_j)$$

άγνωστος

$$L_i(x_i) = 1$$

$$\Rightarrow a \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} (x_i - x_j) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} (x_i-x_j)}$$

Άρα:

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n}$$

Τα $L_0, \ldots, L_n$ λέγονται <u>πολυώνυμα του Lagrange</u> ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$

<u>Ισχυρισμός:</u> $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτω $q(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

Τότε:

$q \in \mathbb{P}_n$

$$q(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{=\delta_{ij}} =$$

$$= f(x_j) \underbrace{L_j(x_j)}_{=1} =$$

$$= f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n$$

<u>Συμπέρασμα:</u> $q = p$ (λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής)

Πλεονεκτήματα

- Απλή μορφή, κατάλληλη για θεωρητικούς σκοπούς

Μειονεκτήματα

- Πρόσθεση (ή αφαίρεση) έστω και ενός σημείου παρεμβολής απαιτεί τον εκ νέου υπολογισμό όλων των L_i.
- Για τον υπολογισμό της τιμής του p σε ένα σημείο απαιτούνται πολλές πράξεις.

β) Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα

Δεδομένα: $x_0, \ldots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά

$y_0, \ldots, y_n$

Ζητούμενο: $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε

$p(x_i) = y_i\ ,\ i = 0, \ldots, n$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$p(x_0) = y_0 \implies \boxed{a_0 = y_0}$$

$$p(x_1) = y_1 \Rightarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

...

Πλεονεκτήματα

- Το $p_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots +$ $a_k(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$, (με τα ίδια a_i) είναι βαθμού το πολύ k και παρεμβάλλεται στα (x_i, y_i) για $i = 0, \ldots, k$. Αυτό κάνει την πρόσθεση ενός σημείου παρεμβολής τετριμμένη (αρκεί να βρούμε έναν μόνο συντελεστή a_{n+1}).

- Με το σχήμα του Horner υπολογίζεται η τιμή $p(x)$, για δεδομένο x, με $O(n)$ πράξεις.

$$p(x)=a_0+(x-x_0)(a_1+(x-x_1)(a_2+\dots+a_n(x-x_{n-1})\dots)$$

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε συστηματικά τους συντελεστές a_i;

Απάντηση: Με διαιρεμένες διαφορές

Διαιρεμένες Διαφορές

$f\in C[a,b]$, $x_0, x_1, \dots \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$

Ορίζουμε επαγωγικά:

$$\Delta^0(x_0)(f)=f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0,x_1,\dots,x_i)(f)=$$
$$=\frac{\Delta^{i-1}(x_1,\dots,x_i)(f)-\Delta^{i-1}(x_0,\dots,x_{i-1})(f)}{x_i-x_0}$$

Ο αριθμός $\Delta^i(x_0,\dots,x_i)(f)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία $x_0,\dots,x_i$

$$\boxed{a_i=\Delta^i(x_0,\dots,x_i)(f)}$$

Πρόταση (Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές)

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά και $f \in C[a,b]$. Το $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , \; i = 0, \dots, n$$

παριστάνεται στη μορφή

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0,x_1)(f)}_{a_1}(x-x_0) + \dots$$

$$+ \underbrace{\Delta^n(x_0,x_1,\dots,x_n)(f)}_{a_n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Πίνακας διαιρεμένων διαφορών

	$n=0$	$n=1$	$n=2$ ...
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f) \longrightarrow$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$	
x_2	$\Delta^0(x_2)(f) \longrightarrow$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f) \longrightarrow$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$
$\vdots$			

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken - Neville

Πρόβλημα: $x_0, \dots, x_n$
$p \in \mathbb{P}_n \quad p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$

Ζητούμενο: Για δεδομένο x να βρούμε την τιμή του p στο x, (χωρίς να βρούμε τους συντελεστές του p)

Ιδέα: Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n}$ και $x_{m+1}, \dots, x_{m+n+1}$, αντίστοιχα.

Θεωρούμε το $q \in \mathbb{P}_{n+1}$

$$q(x) := \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες του $q \in \mathbb{P}_{n+1}$

$$q(x_m) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x_m) & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1} - x_m \end{vmatrix} =$$

$$= p_1(x_m) = f(x_m)$$

$$q(x_{m+n+1}) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x_{m+n+1}) & x_m - x_{m+n+1} \\ p_2(x_{m+n+1}) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= p_2(x_{m+n+1}) = f(x_{m+n+1})$$

Συμπέρασμα

Το q είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, x_{m+n+1}$

Για $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$

$$q(x_i) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overset{=f(x_i)}{p_1(x_i)} & x_m - x_i \\ \underset{=f(x_i)}{p_2(x_i)} & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{f(x_i)}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} 1 & x_m - x_i \\ 1 & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix} =$$

$$=$$

x_i	y_i	$p \in \mathbb{P}_1$	$p \in \mathbb{P}_2$	$p \in \mathbb{P}_3$ ...
x_0	y_0			
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$		
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2; \xi)$	
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, x_3; \xi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$p(x_i, \dots, x_{i+n}; \xi)$
τιμή στο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής
στα $x_i, \dots, x_{i+n}$

Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n

Θεώρημα του Faber

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$, $i = 0, \dots, n$, υπάρχει $f \in C[-1, 1]$ τέτοια ώστε $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, \dots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$$\limsup_{n \to +\infty} \| f - p_n \|_\infty = +\infty$$

$$\begin{array}{lll} x_{00} & & \\ x_{10} & x_{11} & \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Πέρα από το Θεώρημα του Faber, τα πολυώνυμα παρεμβολής p_n με μεγάλο n παρουσιάζουν και υπολογιστικά προβλήματα. <u>Άρα δεν χρησιμοποιούνται.</u>

Τι χρησιμοποιείται;

Σχεδόν αποκλειστικά κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις (<u>splines</u>) μικρού βαθμού.

Παρεμβολή τύπου Hermite

Θεώρημα

Έστω $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$,

$N := m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$; και

$M := \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$.

Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C^M[a,b]$, τότε το πρόβλημα παρεμβολής Hermite, ζητείται $p \in \mathbb{P}_N$ τέτοιο ώστε:

$$(*) \quad \begin{cases} p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) & , \quad i = 0, \dots, m_0 \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1) & , \quad i = 0, \dots, m_1 \\ \quad \vdots & \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n) & , \quad i = 0, \dots, m_n \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

(Ειδική περίπτωση: $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 0$ τότε έχουμε παρεμβολή Lagrange).

Απόδειξη

Το (*) είναι ένα γραμμικό σύστημα με $N+1$ αγνώστους (τους συντελεστές του p) και

$(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=$

$=\underbrace{(m_0+m_1+\dots+m_n)+n}_{=N}+1=N+1$

εξισώσεις.

Θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές.
Έστω $q\in\mathbb{P}_{N+1}$ μία λύση του.
Πόσες ρίζες (τουλάχιστον) έχει το q;

Το x_0 ρίζα τάξης m_0+1 του q
Το x_1 ρίζα τάξης m_1+1 του q

$\vdots$

Το x_n ρίζα τάξης m_n+1 του q

Άρα το q έχει τουλάχιστον

$(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=N+1$

(μετράμε και την πολλαπλότητα)

Συνεπώς το q είναι βαθμού το πολύ N και έχει $N+1$ ρίζες, οπότε $q=0$

Δηλαδή, το ομογενές σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση, οπότε το αρχικό έχει ακριβώς μία λύση.

178

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση:

$m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$

<u>Πρόβλημα:</u> Ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τέτοιο ώστε:

(**) $p(x_i) = f(x_i) \quad , \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία και $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν οι (**) με $f \in C^{2n+2}[a, b]$

Τότε, για το σφάλμα παρεμβολής $f - p$ ισχύει:

$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi = \xi(x) \in (a,b):$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

Απόδειξη

1η περίπτωση: $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$

Τότε η παράσταση ισχύει για κάθε ξ.

2η περίπτωση: $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$

(Σταθεροποιούμε το x)

$$\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$$

και

$$\psi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi(t)$$

Ιδιότητες της ψ:

$\psi \in C^{2n+2}[a, b]$

$\psi(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$

$$\psi'(x_i) = f'(x_i) - p'(x_i) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi'(x_i) = 0,$$

$i = 0, \ldots, n$

ρίζες της ψ (μετρώντας και την πολλαπλότητα): $2n+2$

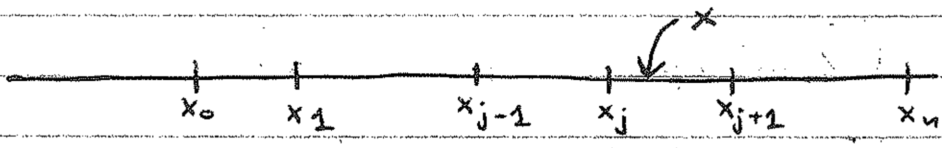
$$\psi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi(x) = 0$$

Άρα η ψ έχει τουλάχιστον $2n+3$ ρίζες

Έστω x.π.τ.γ. $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

<u>Υπόθεση</u>: $x \in (x_j, x_{j+1})$ για κάποιο j

(Στις περιπτώσεις $x < x_0$ ή $x > x_n$ η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη)



$$\psi(x_0) = \psi(x_1) = \dots = \psi(x_j) = \psi(x) = \psi(x_{j+1}) = \\ = \dots = \psi(x_n) = 0$$

Η ψ έχει $n+2$ ανά δύο διαφορετικές ρίζες. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle έχουμε

$\psi'(\xi_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, με

$$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < \xi_{j-1} < x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < \\ < x_{j+1} < \dots < \xi_n < x_n$$

Επιπλέον $\psi'(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, $(x_i \neq \xi_j)$

Η ψ' έχει τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες (διαφορετικές μεταξύ τους)

Άρα: ψ'' έχει $2n+1$ ρίζες

$\vdots$

$\psi^{(2n+2)}$ έχει 1 ρίζα, έστω ξ

Έχουμε

$$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - 0 - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} \cdot (2n+2)!$$

οπότε

$$\psi^{(2n+2)}(\xi) = 0 \iff$$

$$f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} (2n+2)! = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \Psi(x)}$$

Στην γενική περίπτωση ισχύει:

$f \in C^{N+1}[a,b]$

$\forall x \in [a,b] \; \exists \xi \in (a,b):$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)^{m_i+1}$$

Παρεμβολή με splines

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
ένας διαμερισμός του.
Splines ως προς αυτόν τον διαμερισμό λέγονται γενικά συναρτήσεις που σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ έχουν μία ορισμένη μορφή, π.χ. είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ m (με δεδομένο m).

Συχνά απαιτείται και κάποια ομαλότητα.

Ειδική περίπτωση:

Ορισμός (Ομαλές splines)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα,
$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
ένας διαμερισμός του και $m \in \mathbb{N}$.

Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta) = \{ s \in C^{m-1}[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m,\ i = 0, \dots, n-1 \}$$

λέγονται ομαλές (πολυωνυμικές) splines βαθμού το πολύ m (ως προς Δ).

Για $x \in (x_i, x_{i+1})$ η s είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Η συνθήκη $s \in C^{m-1}[a,b]$ σημαίνει ότι η s είναι $m-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και στα σημεία $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Η συγκεκριμένη ομαλότητα είναι η μέγιστη που επιτρέπει να περιέχει ο $S_m(\Delta)$ και στοιχεία που δεν είναι (τα ίδια) πολυώνυμα σε όλο το $[a,b]$. (βλ. Ασκήσεις)

Οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις:

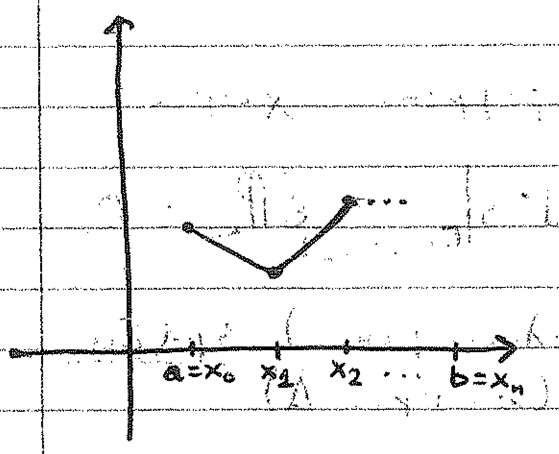
$m=1$: $S_1(\Delta)$, γραμμικές splines

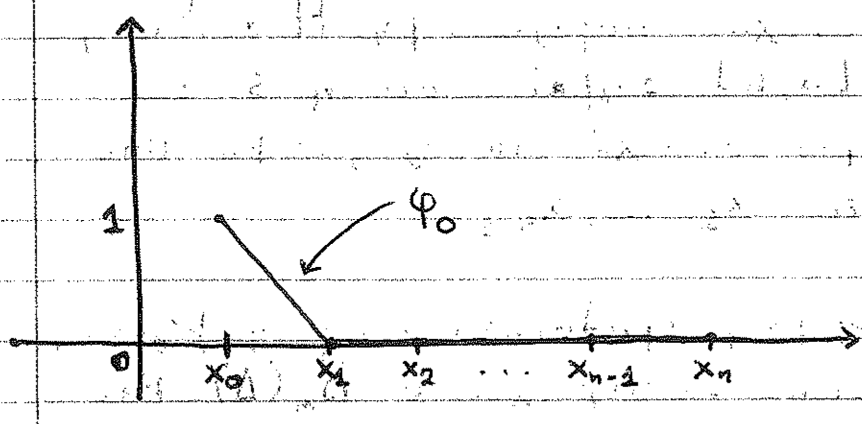
$m=3$: $S_3(\Delta)$, κυβικές splines

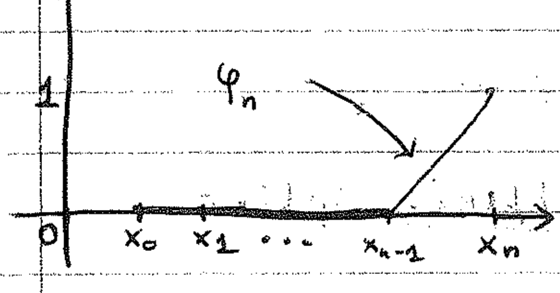
Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

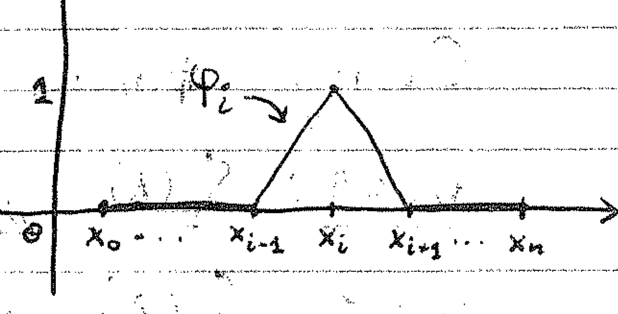
$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$S_1(\Delta) = \{ s \in C[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \ i = 0, \dots, n-1 \}$









Ποιά είναι η διάσταση του $S_1(\Delta)$;
Μπορούμε να βρούμε μία (καλή)
βάση του;

Ζητούμε στοιχεία του $S_1(\Delta)$ τέτοια
ώστε να παίρνουν την τιμή 1 στο
σημείο x_i και την τιμή 0 σε όλα τα
άλλα x_j, $j \neq i$.

Ορίζουμε:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & x_0 \leq x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\boxed{\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 0,\dots,n}$$

$\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in S_1(\Delta)$

<u>Ισχυρισμός:</u> Οι $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_j) = 0 \quad , \quad j = 0, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \delta_{ij} = 0 \quad , \quad j = 0, \ldots, n$$

$$\Rightarrow c_j = 0 \quad , \quad j = 0, \ldots, n$$

Έστω $s \in S_1(\Delta)$

<u>Ισχυρισμός:</u> $\boxed{s = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i}$

$$\tilde{s}(x_j) = s(x_j)$$

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ τα s και $\tilde{s}$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 1 και έχουν τις ίδιες τιμές στα x_i και x_{i+1}.
Άρα συμπίπτουν.

<u>Συμπέρασμα:</u> $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ "καλή" βάση του $S_1(\Delta)$

$$\boxed{\dim S_1(\Delta) = n+1}$$

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

Τότε υπάρχει ακριβώς μία $s \in S_1(\Delta)$ τέτοια ώστε:

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

Αν $p_i \in \mathbb{P}_1$ τέτοιο ώστε $p_i(x_i) = f(x_i)$ και $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$, τότε:

$$s(x) = p_i(x) \quad , \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Τώρα:

$$p_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Η τοπική συμπεριφορά της s στο $[x_i, x_{i+1}]$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στα x_i, x_{i+1} (δηλαδή δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την f έξω από το $[x_i, x_{i+1}]$).

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος)

Έστω $f \in C^2[a,b]$,

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

ένας διαμερισμός του $[a,b]$,

και $s \in S_1(\Delta)$ τέτοια ώστε:

$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Αν $h_i := x_i - x_{i-1}$ και $h := \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$,

τότε:

$$\boxed{\|f - s\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty}$$

Απόδειξη

$x \in [x_i, x_{i+1}]: f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x)$

$\exists \xi \in (x_i, x_{i+1}): f(x) - s(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_i)(x-x_{i+1})$

$\Rightarrow |f(x) - s(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \underbrace{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left((x-x_i)(x_{i+1}-x)\right)}_{= \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}}$

$\Rightarrow |f(x) - s(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} \underbrace{(x_{i+1}-x_i)^2}_{=(h_{i+1})^2}$

$\Rightarrow \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{8} h^2$

$\Rightarrow \|f-s\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

190

Παρεμβολή με κυβικές splines

Ομοιόμορφος διαμερισμός (για ευκολία):
$n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \dots, n$

Συμβολίζουμε με Δ_h αυτόν τον διαμερισμό.

$S_3(\Delta_h) = \{ s \in C^2[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 , i = 0, \dots, n-1 \}$

Πρόβλημα παρεμβολής:

Ζητείται $s \in S_3(\Delta_h)$ τέτοιο ώστε:

$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Ελεύθερες παράμετροι: $4n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Συνθήκες παρεμβολής: } 2n \\ \text{Συνέχεια της } s' \text{ στα } x_i : n-1 \\ \text{Συνέχεια της } s'' \text{ στα } x_i : n-1 \end{array}\right\} = 4n-2$$

Για να υπάρχει πιθανότητα να έχει το πρόβλημα μοναδική λύση χρειάζονται δύο επιπλέον συνθήκες.

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines για διάφορες συνοριακές συνθήκες)

Έστω $f:[a,b]$ αρκετά ομαλή συνάρτηση, $n \in \mathbb{N}$ και Δ_h ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$.

Τότε τα παρακάτω 3 προβλήματα λύνονται μονοσήμαντα:

Ζητείται $s \in S_3(\Delta)$ τέτοιο ώστε:

$s(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$

και είτε:

α) $s'(x_0) = f'(x_0)$
$\quad s'(x_n) = f'(x_n)$

είτε:

β) $s''(x_0) = f''(x_0)$
$\quad s''(x_n) = f''(x_n)$

είτε:

γ) $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

Στοιχεία $s \in S_3(\Delta_h)$ τέτοια ώστε $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, λέγονται φυσικές κυβικές splines.

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines)

Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$,

$h := \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$,

$M := \dfrac{h}{\min_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})}$,

$f \in C^4[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ τέτοια ώστε:

$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$,

$s'(x_0) = f'(x_0)$

$s'(x_n) = f'(x_n)$

Τότε ισχύουν οι εκτιμήσεις:

$$\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_\infty \leq C_m h^{4-m} \|f^{(4)}\|_\infty,$$

$m = 0, 1, 2, 3$ με

$C_0 = \frac{5}{384}$

$C_1 = \frac{1}{24}$

$C_2 = \frac{3}{8}$

$C_3 = \max\{2, \frac{1}{2}(M + \frac{1}{M})\}$

Κυβικές splines Hermite

Ορισμός (Κυβικές splines του Hermite)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$
ένας διαμερισμός του.
Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$$

για $i = 0, \ldots, n-1$, λέγονται κυβικές splines Hermite ως προς Δ.

* Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
ένας διαμερισμός του $[a,b]$.
Τότε υπάρχει ακριβώς μία κυβική spline Hermite s ως προς Δ τέτοια ώστε:

(*) $s(x_i) = f(x_i) \;,\; s'(x_i) = f'(x_i) \;,\; i = 0, \dots, n$

Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$, τότε

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

όπου $h := \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$

Απόδειξη

Έστω $p_i \in \mathbb{P}_3$ τέτοιο ώστε:

$$\left.\begin{aligned} p_i(x_j) &= f(x_j) \\ p_i'(x_j) &= f'(x_j) \end{aligned}\right\} \quad j = i, i+1$$

Το p_i υπάρχει και είναι μοναδικό (σύμφωνα με την παρεμβολή Hermite με πολυώνυμα).

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$s : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad s(x) = p_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Τότε $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$ και $s \in C^1[a,b]$,

συνεπώς η s είναι η (μοναδική) κυβική spline Hermite που ικανοποιεί τις (*).

Εκτίμηση σφάλματος:

Έστω $x \in [x_i, x_{i+1}]$, τότε

$$f(x) - s(x) = \boxed{f(x) - p_i(x)}$$

Τώρα, σύμφωνα με την (4.16) έχουμε

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]\ \exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$:

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$

Άρα:

$$f(x) - s(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$

$$\Rightarrow |f(x)-s(x)| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \left[(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\right]$$

$$\Rightarrow |f(x)-s(x)| \leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{4!} \frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16} \leq$$

$$\leq \frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} [\underbrace{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}_{\geq 0}]^2 =$$

$$= \{\underbrace{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} [(x-x_i)(x_{i+1}-x)]}_{= \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}}\}^2$$

$$= \frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16}$$

Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του i, οπότε:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)-s(x)| \leq \frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$