4º Κεφάλαιο 18/4/13

Παρεμβολή

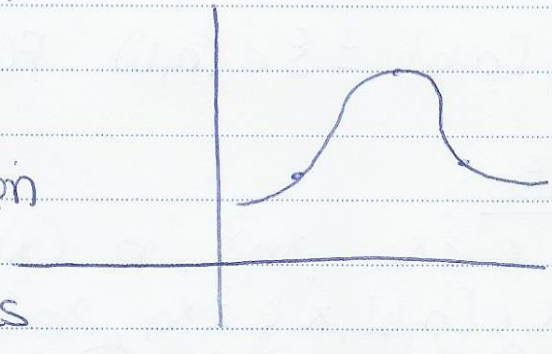
- Ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων
- Πολυωνυμική παρεμβολή
    - παρεμβολή τύπου Lagrange
    - " " Hermite
- Παρεμβολή με splines

Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange)

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά και $y_0, \dots y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p, βαθμού το πολύ n ($p \in \mathbb{P}_n$) τ.ω.

$(*)$ $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.



Απόδειξη

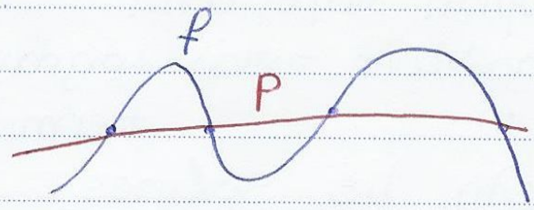
Γράφουμε το p στη μορφή $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με άγνωστους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$. Τότε το $(*)$ γράφεται ως ένα γραμμικό σύστημα με $n+1$ εξισώσεις για τους $n+1$ άγνωστους $a_0, \dots, a_n$.

$$\left(\begin{array}{c} p(x_i) = y_i \\ a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n (x_i)^n = y_i \end{array} \right)$$

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα είναι: ζητείται $q \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $q(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$

Το q ως πολυώνυμο βαθμού το πολύ n με (τουλάχιστον) $n+1$ ρίζες, αναγκαστικά είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Έστω f μια συνάρτηση, $x_0, \dots, x_n$ σημεία στο πεδίο ορισμού της f, ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.
Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.
$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.



Το p λέγεται <u>πολυώνυμο παρεμβολής</u> της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$.
Λέμε επίσης ότι το p <u>παρεμβάλλεται</u> στην f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$.

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)
Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.
$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$
Τότε:

$$(*) \quad \forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) \quad f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

<u>Απόδειξη</u>:
Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$, η $(*)$ ισχύει, για κάθε ξ.
Έστω $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$. Σταθεροποιούμε αυτό το x. Ορίζουμε $\Phi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$ και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(x), \quad t \in [a,b]$$

→ σταθερός αριθμός

<u>Ιδιότητες της φ</u>: $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$

$$\begin{cases} \varphi(x_i) = 0, & i = 0, \dots n \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

Η φ έχει (τουλάχιστον) $n+2$ ρίζες στο $[a,b]$.
Rolle: φ' έχει (τουλάχιστον) $n+1$ ρίζες στο (a,b)

φ'' έχει (τουλάχιστον) n ρίζες στο (a,b)

$\varphi^{(n+1)}$ " " 1 ρίζα στο (a,b)

<u>Συμπέρασμα:</u> $\exists\ \xi \in (a,b)\ \ \varphi^{(n+1)}(\xi)=0$.

Τώρα.

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi^{(n+1)}(t) \quad = (n+1)!$$

$$\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i) = t^{n+1} + q(t),\ \mu\varepsilon\ q \in \mathbb{P}_n$$

$$\Rightarrow \Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + 0 = \underline{(n+1)!}$$

Τελικά

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)!$$

$$\Rightarrow 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\,\Phi(x)}{(n+1)!}$$

22/4/13

$f \in C^{n+1}[a,b]$ και $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά.

$p \in \mathbb{P}_n$: $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Παράσταση του σφάλματος:

$\forall x \in [a,b]$ $\exists$ $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Εκτίμηση σφάλματος:

$$\|f-p\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

- Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής

a) Παράσταση σε μορφή Lagrange

$x_0, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους

Ζητείται $L_i \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 0, \dots, n$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$ (ονομάζεται σύμβολο του Kronecker)

Το L_i μηδενίζεται στα σημεία $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

Άρα

$$L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$ με κατάλληλη σταθερά a_i

Όμως ξέρουμε ακόμα ότι $L_i(x_i) = 1$, οπότε

$$a_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1, \text{ άρα } a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Συμπέρασμα:

Το $L_i(x) = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \cdot \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(x - x_j) =$

$$= \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n$$

Τα πολυώνυμα $L_0, \dots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, γράφεται στη μορφή

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)$$

Αυτή είναι η παράσταση του p σε μορφή Lagrange

Θέτω $q(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$. Επιπλέον $q(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{L_i(x_j)}_{\delta_{ij}} =$

$= f(x_j) \cdot 1 = f(x_j)$, για $j = 0, \dots, n$

Άρα q είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots x_n$, οπότε αναγκαστικά, $q = p$

Πλεονέκτημα: Η απλότητά της που την καθιστά ιδιαίτερα κατάλληλη για τη θεωρία.
Μειονεκτήματα: i) Παρεμβολή σε ένα επιπλέον σημείο, δηλαδή στα $x_0, \dots, x_n$ και x_{n+1} επηρεάζει όλα τα L_i.
ii) Το κόστος υπολογισμού της τιμής του p σε ένα σημείο είναι υψηλό.

β) Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα $p(x_i) = y$, $i = 0, \dots, n$

Γράφουμε το p στη μορφή
$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$
με άγνωστους τους συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_n$
Τότε:
$$p(x_0) = y_0 \rightsquigarrow a_0 = y_0$$
$$p(x_1) = y_1 \rightsquigarrow a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$p(x_2) = y_2 \longrightarrow a_2 = \left(\frac{y_2 - a_0}{x_2 - x_0} - a_1\right) \Big/ (x_2 - x_1)$$

Πλεονεκτήματα: 1) Ο υπολογισμός της τιμής του p σε ένα σημείο γίνεται πολύ εύκολα με το σχήμα του Horner.
$$p(x) = a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\cdot\big(a_2 \cdots\big)\Big)$$

2) Παρεμβολή σε ένα ακόμα σημείο, δηλαδή στα $x_0, \dots, x_n$ και x_{n+1} απαιτεί τον υπολογισμό ενός μόνο νέου συντελεστή a_{n+1}

γ) <u>Διαιρεμένες διαφορές</u>

$f \in C[a,b]$, $x_0, x_1, \ldots \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Τότε ορίζουμε επαγωγικά ως προς i:

$$\Delta^0(x_0)(f) := f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0, \ldots, x_i)(f) := \frac{\Delta^{i-1}(x_1, \ldots x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \ldots x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}, \quad i \geq 1$$

$\Delta^i(x_0 \ldots x_i)(f)$: η διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_i$.

<u>Πρόταση:</u> (Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές)

Έστω $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία και $f \in C[a,b]$. Τότε το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$, $p(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$,

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0, x_1)(f)}_{a_1}(x-x_0) + \ldots + \underbrace{\Delta^n(x_0, \ldots x_n)(f)}_{a_n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο <u>κατά Aitken-Neville</u>

(Δεν υπολογίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου. Σκοπός είναι να υπολογίσουμε την τιμή του σε ένα συγκεκριμένο σημείο.)

<u>Βασική ιδέα</u>: Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p_1(x_\ell) = f(x_\ell)$, $\ell = m, m+1, m+n$

τα ℓ είναι δείκτες του x.

$p_2(x_\ell) = f(x_\ell)$, $\ell = m+1, \ldots m+n, m+n+1$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_{n+1}$,

$$q(x) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix},$$

παρεμβάλεται στην f στα σημεία $x_m, x_{m+1}, \ldots x_{m+n}, x_{m+n+1}$

Για $\ell \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ έχουμε

$$q(x_\ell) = \frac{1}{x_{m+n+1}-x_m} \cdot \begin{vmatrix} f(x_\ell) & x_m - x_\ell \\ f(x_\ell) & x_{m+n+1}-x_\ell \end{vmatrix} = f(x_\ell)$$

Επίσης:

$$q(x_m) = \frac{1}{x_{m+n+1}-x_m} \cdot \begin{vmatrix} f(x_m) & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n-1}-x_m \end{vmatrix} = f(x_m)$$

και εντελώς αντίστοιχα

$$q(x_{m+n+1}) = f(x_{m+n+1})$$

Συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για μεγάλο n

Θεώρημα (του Faber): Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής

x_{00}

x_{10} x_{11}

x_{20} x_{21} x_{22}

$\vdots$

στο διάστημα $[-1,1]$,
υπάρχει $f \in C[-1,1]$ τ.ω. αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_{n0}, \ldots, x_{nn}$, τότε ισχύει
$\limsup_{n\to\infty} \|f-p_n\|_\infty = \infty$

- Runge: $f(x) = \dfrac{1}{1+24x^2}$, $x \in [-1,1]$ συνάρτηση Runge
- ομοιόμορφος διαμερισμός $\|f-p_n\|_\infty \to \infty$

σημεια του Chebyshev:
$\|f - p_n\|_\infty \to 0,\ n \to \infty$, αν $f \in C^1[-1,1]$

Παρεμβολή τύπου Hermite

25/4/13.

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $N := m_0 + \dots + m_n + n$, και $M := \max(m_0, \dots, m_n)$.
Αν $x_0, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[a,b]$ τότε το πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite:

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_N$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} p^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0), \ i=0,\dots,m_0, \\ p^{(i)}(x_1) &= f^{(i)}(x_1), \ i=0,\dots,m_1, \\ &\ \vdots \\ p^{(i)}(x_n) &= f^{(i)}(x_n), \ i=0,\dots,m_n, \end{aligned}\right\} (*)$$

λύνεται μονοσήμαντα.

Απόδειξη: Το $(*)$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με $N+1$ αγνώστους (τους συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_N$ του p) και $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1) = \underbrace{(m_0+m_1+\dots+m_n)+(n}_{N}+1) =$

$= N+1$ συνθήκες

Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα είναι:
Ζητείται $q \in \mathbb{P}$ τ.ω.

$$\begin{cases} q^{(i)}(x_0) = 0, \ i=0,\dots,m_0, \\ q^{(i)}(x_1) = 0, \ i=0,\dots,m_1, \\ \vdots \\ q^{(i)}(x_n) = 0, \ i=0,\dots,m_n \end{cases}$$

Πόσες ρίζες έχει το q (μετρώντας και την πολλαπλότητα):
Το x_0 είναι ρίζα τάξης m_0+1 του q
Το x_0 " " " m_1+1 "
⋮
Το x_n " " " m_n+1 "

Συνολικά το q έχει (τουλάχιστον): $(m_0+1)+\dots+(m_n+1) = N+1$
Άρα το $q=0$, οπότε το αρχικό σύστημα λύνεται

μονοσήμαντα.

Πλέον συνηθισμένη μορφή : $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω.

(*) $p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

<u>Θεώρημα</u> (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής Hermite)

Έστω $[a,b]$ και $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C^{2n+2}[a,b]$.
Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω. να ισχύουν οι (*). Τότε

$$(+) \quad \forall x \in [a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b) : \ f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 .$$

(το ξ εξαρτάται από το x)

<u>Απόδειξη</u>

<u>1η Περίπτωση</u> : $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ τότε η (+) ισχύει για κάθε ξ.

<u>2η Περίπτωση</u> : $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\Psi(t)$ και $\psi(t) = f(t) - p(t)$

$$\Psi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$$

$$(\Psi(t) = t^{2n+2} + q(t), \text{ με } q \in \mathbb{P}_{2n+1})$$

"διορθώνω" την $\psi(t)$:

$$\psi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot \Psi(t), \quad t \in [a,b]$$

Προφανώς $\psi \in C^{2n+2}[a,b]$.

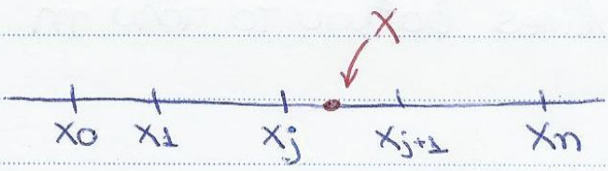
Έχουμε

$\psi(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$.

και

$$\psi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} \cdot \Psi(x) = 0$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, και $x_j < x < x_{j+1}$ για κάποιο j (οι περιπτώσεις $x < x_0$ ή $x > x_0$ αποδεικνύονται εντελώς αντίστοιχα)



Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle υπάρχουν

$$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots \xi_{j-1} < x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} < \dots < \xi_n < x_n$$

τ.ω. $\psi'(\xi_\ell) = 0$, $\ell = 0, \dots, n$.

Επιπλέον

$\psi'(x_i) = f'(x_i) - p'(x_i) - 0 = 0$, για $i = 0, \dots, n$.

Άρα η ψ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες.

ψ'' » » » » $2n+1$ ».

⋮

$\psi^{(2n+2)}$ » » (a,b) » 1 ρίζα, έστω ξ

- $\psi^{(2n+2)}(\xi) = 0$
- $\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} \cdot (2n+2)!$

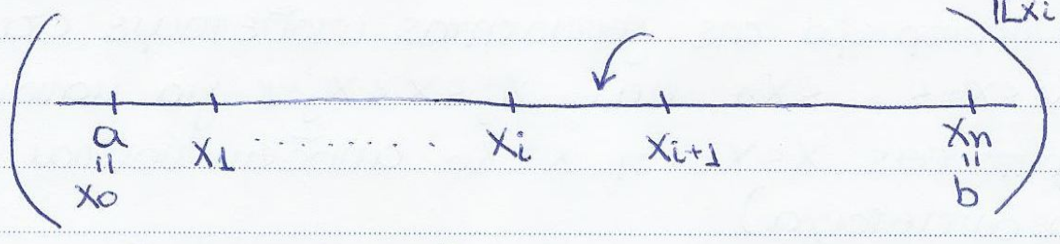
Επομένως $f^{(2n+2)}(\xi) = \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} (2n+2)!$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \Psi(x)$$

Παρεμβολή με splines.

Ορισμός (ομαλές splines)

Έστω $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $m\in\mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου $S_m(\Delta):=\{s\in C^{m-1}[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n-1\}$



λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού το πολύ m (ως προς Δ)

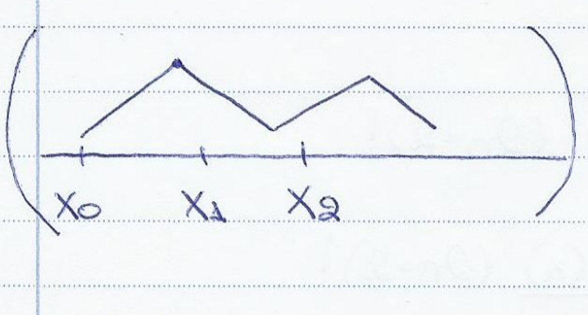
Ειδικές περιπτώσεις: $m=1$
$m=3$

κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις ($m=1$)
κατά τμήματα κυβικές συναρτήσεις ($m=3$)

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις.

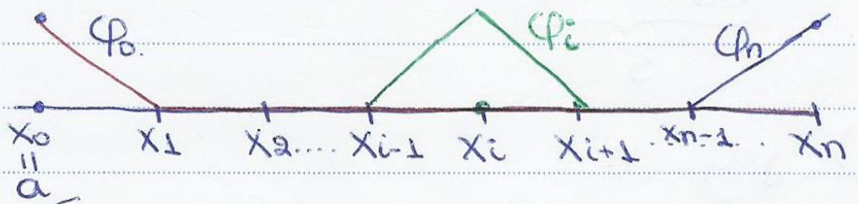
$\Delta: a=x_0<\dots<x_n=b$

$S_1(\Delta)=\{s\in C[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_1,\ i=0,\dots,n\}$



Ιδιότητες του $S_1(\Delta)$:

- διάσταση του $S_1(\Delta)$
- "κατάλληλη" βάση του $S_1(\Delta)$



$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}, & x_0 \le x \le x_1 \\ 0, & x_2 \le x \le b \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ -\dfrac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n+1} \le x \le x_n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ισχυρισμός: $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις

Πράγματι:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\varphi_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = 0, \; j=0,\dots,n \Rightarrow c_j = 0, \; j=0,\dots,n$$

Ισχυρισμός: Οι $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ παράγουν του $S_1(\Delta)$

Έστω $s \in S_1(\Delta)$

Ισχυρισμός: $s = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i}_{\tilde{s}}$

$\tilde{s}(x_j) = s(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$

Αφού οι s και $\tilde{s}$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 1 σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ και οι τιμές τους συμπίπτουν στα άκρα, οι s και $\tilde{s}$ συμπίπτουν σε όλο το $[x_i, x_{i+1}]$.

Διάσταση του $S_1(\Delta)$: $n+1$

Πρόβλημα παρεμβολής: Ζητείται $s \in S_1(\Delta)$ τ.ω. $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$

Λύση: $s(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \varphi_i(x)$

Σφάλμα παρεμβολής;

<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $s \in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα $x_0, \dots, x_n$ δηλαδή τέτοιο ώστε:

$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

Αν $h_i := x_i - x_{i-1}$ και $h := \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$,

τότε $\|f - s\|_\infty \le \dfrac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$p_i(x_i) = f(x_i)$

$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$

Τότε $s(x) = p_i(x)$, για κάθε $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Επομένως $f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x)$, για κάθε $x \in [x_i, x_{i+1}]$

Σύμφωνα με την παράσταση του σφάλματος της πολυωνυμικής παρεμβολής Lagrange, έχουμε

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \ \exists \xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Επομένως, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$|f(x) - s(x)| = \frac{1}{2} |f''(\xi)| \cdot |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

$$\le \frac{1}{2} \cdot \|f''\|_\infty \underbrace{\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} [(x - x_i)(x_{i+1} - x)]}_{\left(\frac{h_{i+1}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{8}(h_{i+1})^2$$

Άρα:

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad |f(x)-s(x)| \le \frac{h_{i+1}^2}{8} \|f''\|_\infty$

$\le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$

ανεξάρτητο του i

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad \boxed{|f(x)-s(x)| \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty}$

Κυβικές splines

Υπόθεση: Ομοιόμορφος διαμερισμός.

$n \in \mathbb{N}, \ h := \frac{b-a}{n}, \ x_i := a+ih, \ i=0,\dots,n.$

$\Delta_n: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$S_3(\Delta_n) = \{ s \in C^2[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \ i=0,\dots,n-1 \}$

Πρόβλημα παρεμβολής:
Για $f \in [a,b]$ ζητείται $s \in S_3(\Delta_n)$ τ.ω.
$s(x_i) = f(x_i), i=0,\dots,n.$

Άγνωστοι: $4n$

Συνθήκες παρεμβολής στα $x_0,\dots,x_n$: $2n$
(αυτές οι συνθήκες εξασφαλίζουν και συνέχεια της s στο $[a,b]$)
Συνθήκες συνέχειας της s' στα σημεία $x_1,\dots,x_{n-1}$: $n-1$
Συνθήκες συνέχειας της s'' στα σημεία $x_1,\dots,x_{n-1}$: $n-1$
Συνολικά έχουμε $4n-2$ συνθήκες (γραμμικές εξισώσεις),
για να έχει το πρόβλημα παρεμβολής μοναδική λύση απαιτούνται δύο επιπλέον (κατάλληλες) συνθήκες.

Τρία προβλήματα παρεμβολής με κυβικές splines που λύνονται μονοσήμαντα:

$s(x_i) = f(x_i),\ i=0,\dots,n.$

(I) $f \in C^1[a,b]$

$s'(x_0) = f'(x_0)$

$s'(x_n) = f'(x_n)$

(II) $f \in C^2[a,b]$

$s''(x_0) = f''(x_0)$

$s''(x_n) = f''(x_n)$

(III) $f \in C[a,b]$

$s''(x_0) = 0$

$s''(x_n) = 0$

$s \in S_3(\Delta n)$ τ.ω. $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ λέγονται <u>φυσικές κυβικές splines</u>.

<u>Θεώρημα</u> (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines).

Έστω Δ: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, ένας διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$,

$$h := \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}),\quad M := \frac{h}{\min\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})}$$

Έστω $f \in C^4[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i),\ i=0,\dots,n, \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Τότε υπάρχουν σταθερές C_m, $m=0,1,2,3$ τ.ω.

$$\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_\infty \le C_m \cdot h^{4-m} \|f^{(4)}\|_\infty,\quad m=0,1,2,3$$

$C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$ βέλτιστες

$C_2 = \frac{3}{8}$

$C_3 = \max\{2, \frac{1}{2}(M + \frac{1}{M})\}$

Κυβικές Splines Hermite

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

Κυβικές splines Hermite

$s \in C^1[a,b], \quad s\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \ i = 0, \ldots, n-1.$

Θεώρημα (Παρεμβολή με κυβικές splines Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, τότε υπάρχει ακριβώς μια κυβική spline Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ τ.ω.

(*) $\left.\begin{array}{l} s(x_i) = f(x_i) \ \text{και} \\ s'(x_i) = f'(x_i) \end{array}\right\} i = 0, \ldots, n$

Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$ τότε

$\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$

με $h := \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.4.
(μονοσήμαντη λύση του πολυωνυμικού προβλήματος Hermite), υπάρχει ακριβώς ένα $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$p_i(x_j) = f(x_j), \ p_i'(x_j) = f'(x_j), \ j = i, i+1.$

Τότε η συνάρτηση $s: [a,b] \to \mathbb{R}$, τ.ω.

$s(x) = p_i(x), \ x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = 0, \ldots, n-1,$

είναι η μοναδική κυβική spline Hermite που ικανοποιεί τις σχέσεις (*)

Εκτίμηση σφάλματος:

$x \in [x_i, x_{i+1}]$ $f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x)$.

Τώρα, σύμφωνα με την (4.16), $\forall\ x \in [x_i, x_{i+1}]$

$\exists\ \xi \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2.$$

Άρα, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$|f(x) - s(x)| = \frac{1}{4!}|f^{(4)}(\xi)| \cdot (x-x_i)^2 \cdot (x-x_{i+1})^2$$

$$\leq \frac{1}{4!}\|f^{(4)}\|_\infty \underbrace{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} [(x-x_i)(x_{i+1}-x)]^2}$$

$$\shortparallel$$

$$\left[\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} (x-x_i)(x_{i+1}-x)\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}\right]^2 \leq \frac{h^4}{16}.$$

$\forall\ x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(x) - s(x)| \leq \underbrace{\frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{16}}_{= \frac{1}{384}} h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$$

ανεξάρτητο του i

$\Rightarrow \forall\ x \in [a,b]$

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$

Άσκηση 4.4

$p \in \mathbb{P}_3 \quad p(x_i) = \ln(x_i), \ x_i = i+1, \ i=0,1,2,3$

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = \ln 1 \\ p(2) = \ln 2 \\ p(3) = \ln 3 \\ p(4) = \ln 4 \end{array}\right\}$$

$\varepsilon(x) := \ln x - p(x)$

<u>ΝΔΟ</u>: η ε έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες.

<u>Λύση</u>

$\forall x \in [1,4] \quad \exists\, \xi(x) \in (1,4)$

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$

$f^{(4)} = -\frac{6}{x^4}$

Άρα η ε έχει ακριβώς 4 ρίζες, τις 1, 2, 3, 4.

Άσκηση 4.5

17/5/13.

$p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $p(i) = e^i$, $i = 1,2,3,4$

ΝΔΟ: $\forall x \in (2,3)$ $e^x > p(x)$

Απόδειξη

Το $p \in \mathbb{P}_3$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στους κόμβους $1,2,3,4$.

Έχουμε:

$$\underbrace{\forall x \in [1,4]}_{\forall x \in (2,3)} \ \exists\, \xi(x) \in (1,4) : \ e^x - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άρα:

$\forall x \in [1,4]$ $\exists\, \xi(x) \in (1,4)$:

$$e^x - p(x) = \frac{e^{\xi(x)}}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Ειδικότερα, για $x \in (2,3)$: $e^x - p(x) = \underbrace{\frac{e^{\xi(x)}}{4!}}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{-}\underbrace{(x-4)}_{-} > 0$

Άσκηση 4.6

$f \in C[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$

$p \in \mathbb{P}_n$ $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$

P πολυώνυμο: $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$

ΝΔΟ: $P = p + rq$, q πολυώνυμο και $r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Απόδειξη

Έχουμε ότι $P(x_i) = p(x_i)$, $i = 0,\dots,n$, άρα οι $x_0,\dots,x_n$ είναι ρίζες του $P - p$.

Επομένως

$$P(x) - p(x) = \overbrace{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}^{r(x)} \cdot q(x)$$

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i := -1 + i\frac{2}{n}$, $i=0,\dots,n$

$f \in C[-1,1]$

$p \in \mathbb{P}_n$ $\quad p(x_i)=f(x_i)$, $i=0,\dots,n$

ΝΔΟ: α) f άρτια $\Rightarrow p$ άρτιο

β) f περιττή $\Rightarrow p$ περιττό

Απόδειξη

Αν x_i κόμβος του διαμερισμού, τότε το $-x_i$ είναι επίσης κόμβος.

α) $\varphi(-x)=\varphi(x) \quad \forall\ x \in [-1,1]$

Ορίζουμε $q(x):=p(-x)$, $x \in [-1,1]$

Αρκεί να αποδείξω ότι $q=p$.

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$.

Τώρα για $i \in \{0,\dots,n\}$ έχουμε

$$q(x_i) = p(-x_i) \underset{\substack{\text{γιατί το}\\ -x_i \text{ κόμβος}}}{=} f(-x_i) \underset{f \text{ άρτια}}{=} f(x_i), \quad i=0,\dots,n$$

Λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου της παρεμβολής έχουμε $q=p$, δηλαδή $p(-x)=p(x)$, $x \in [-1,1]$.

β) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

$q(x) := -p(-x)$. Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$

Επίσης, $q(x_i) = -\underbrace{p(-x_i)}_{f(-x_i)} = -f(-x_i) \underset{f \text{ περιττή}}{=} f(x_i)$, $i=0,\dots,n$

Άρα $q=p$, οπότε $-p(-x)=p(x)$ δηλαδή $p(-x)=-p(x)$

Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^4[a,b]$

$p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), \ i=0,1,2, \\ p'(x_1) = f'(x_1) \end{cases}$

ΝΔΟ:

$\forall x \in [a,b] \ \exists \ \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω.

(*) $$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

Απόδειξη

1η Περίπτωση $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$

Τότε η (*) ισχύει για οποιοδήποτε $\xi(x)$

2η Περίπτωση $x \in [a,b]$ $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Ορίζουμε $\Phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$

και $$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(t), \ t \in [a,b]$$

Προφανώς

$\varphi \in C^4[a,b]$

Επίσης

$\varphi(x_i) = 0, i=0,1,2$

$\varphi(x) = 0$

Επομένως υπάρχουν τρία σημεία $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ διαφορετικά του x_1, τ.ω. $\varphi'(\xi_i) = 0, \ i=0,1,2$.

Επιπλέον,

$$\varphi'(x_1) = \underbrace{f'(x_1) - p'(x_1)}_{0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \underbrace{\Phi'(x_1)}_{0} = 0$$

Συμπέρασμα:

Η φ' έχει (τουλάχιστον) 4 ρίζες στο $[a,b]$

Rolle: η φ'' » » 3 » » (a,b).

η φ''' » » 2 » » »

η $\varphi^{(4)}$ » » 1 ρίζα » », έστω ξ.

Συμπέρασμα: $\varphi^{(4)}(\xi)=0$

Όμως

$$\varphi^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\cdot 4!$$

Άρα

$$0=f^{(4)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\cdot 4!$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)-p(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\Phi(x)}$$

Άσκηση 4.16

$f\in C^5[a,b]$, $p\in\mathbb{P}_4$

$$\left.\begin{aligned}p^{(i)}(0)&=f^{(i)}(0)\\ p^{(i)}(1)&=f^{(i)}(1)\end{aligned}\right\}\ i=0,1,\qquad p\left(\tfrac{1}{2}\right)=f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

ΝΔΟ: $\forall x\in[0,1]\ \exists\ \xi\in(0,1)$

$$(*)\quad f(x)-p(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-0)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2$$

Απόδειξη

1η Περίπτωση: $x\in\{0,1/2,1\}$

Τότε η $(*)$ ισχύει για όλα τα ξ

2η Περίπτωση: $x\in[0,1]$, $x\notin\{0,1/2,1\}$

$$\Phi(t)=t^2(t-1/2)(t-1)^2$$

$$\varphi(t)=f(t)-p(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t),\ t\in[0,1]$$

Προφανώς: $\varphi\in C^5[0,1]$

$\varphi(0)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi(1)=0$

$\varphi(x)=0$

Άρα η φ έχει (τουλάχιστον) 4 ρίζες στο $[0,1]$
Επομένως,
η φ' έχει (τουλάχιστον) 3 ρίζες στο $(0,1)$.
Επιπλέον $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$
Άρα
η φ' έχει (τουλάχιστον) 5 ρίζες στο $[0,1]$

Rolle: η φ'' » » 4 » » $(0,1)$
η φ''' » » 3 » » »
η $\varphi^{(4)}$ » » 2 » » »
η $\varphi^{(5)}$ » » 1 ρίζα στο $(0,1)$, έστω ξ

<u>Συμπέρασμα</u>: $\varphi^{(5)}(\xi)=0$.

Τώρα

$$\varphi^{(5)}(t)=f^{(5)}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\cdot 5!$$

Άρα

$$0=f^{(5)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\cdot 5!$$

Οπότε

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\cdot\Phi(x)$$

<u>Άσκηση 4.18</u>

$[a,b]\in\mathbb{R}$, $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$.

$m\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{S}_m(\Delta)=\{s\in C^{m-1}[a,b] : s\big|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n-1\}$$

<u>ΝΔΟ</u>: $s\in\mathcal{S}_m(\Delta)\Rightarrow s(x)=p(x)\ \forall x\in[a,b]$
με $p\in\mathbb{P}_m$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε δύο διαδοχικά διαστήματα.
$[x_{i-1},x_i]$ και $[x_i,x_{i+1}]$.
Taylor:

$$(*)\begin{cases} x\in[x_{i-1},x_i] & s(x)=\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\frac{s^{(l)}(x_i^-)}{l!}(x-x_i)^l \\ x\in[x_i,x_{i+1}] & s(x)=\displaystyle\sum_{l=0}^{m}\frac{s^{(l)}(x_i^+)}{l!}\cdot(x-x_i)^l \end{cases}$$

Επειδή η s είναι m φορές παραγωγίσιμη στο x_i έχουμε

$$s^{(l)}(x_i^-)=s^{(l)}(x_i^+),\ l=0,\dots,m$$

Επομένως σύμφωνα με τις $(*)$ η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1},x_i]$ και $[x_i,x_{i+1}]$