

3. Γραμμικά Συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \times n$ πίνακας
 $b \in \mathbb{R}^n$, διάνυσμα με n συνιστώσες

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = b$

Γραμμικά συστήματα προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές, συνήθως ως μέρος συνδεζόμενων προβλημάτων

Θα μας απασχολήσουν τα θέματα:

α) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του x .

- Κόστος (απαιτούμενες πράξεις και απαιτούμενη μνήμη)
- Ευστάθεια των μεθόδων

β) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων

Δύο μεγάλες κατηγορίες μεθόδων:

α) Άμεσες μέθοδοι (Χωρίς σφάλματα στρογγύλευσης δίνουν τη λύση ακριβώς ύστερα από ένα πεπερασμένο πλήθος πράξεων)

β) Επαναληπτικές μέθοδοι (Δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$)

78

Γενικά για γραμμικά συστήματα:

Δεδομένα: Συντελεστές: $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$

Δεύτερα μέλη: $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

Ζητούμενα: $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\} (*)$$

Με:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i, j \\ i, j = 1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Το (*) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή:

$$\boxed{Ax = b}$$

Κάθε μία από τις ακόλουθες συνθήκες είναι ικανή και αναγκαία για να έχει το $Ax = b$ ακριβώς μία λύση:

i) A αντιστρέψιμος, υπάρχει ο A^{-1}

ii) $\det A \neq 0$

iii) $Ax = 0 \implies x = 0$

iv) Οι γραμμές (ή οι στήλες) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Τρόποι επίλυσης, γνωστοί από τη Γραμμική Άλγεβρα:

a) Κανόνας του Cramer:

$$A = (\underbrace{a^1, a^2, \dots, a^n}_{\text{στήλες του } A})$$

$$A_i = (a^1, a^2, \dots, a^{i-1}, (b), a^{i+1}, \dots, a^n)$$

Τότε:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

β) Υπολογισμέ του A^{-1} :

$$x = A^{-1}b$$

(80)

Οι δύο αυτοί τρόποι έχουν μόνο θεωρητική
σημασία, όχι πρακτική:

α) Cramer:

Απαιτεί τον υπολογισμό $n+1$ οριζουσών
 $n \times n$ πινάκων

Αναπτύσσοντας ως προς τη στήλη j του A
έχουμε:

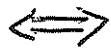
$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ που προκύπτει από τον
 A αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη
στήλη j . Συνεχίζοντας με αυτόν τον
τρόπο γράφουμε την $\det A$ ως άθροισμα
 $n!$ όρων με n παράγοντες.

Απαιτούμενοι πολλαπλασιασμοί: $n!(n-1)$

Για τις $n+1$ οριζουσες απαιτούνται:

$$(n+1) [n!(n-1)] \text{ πολλαπλασιασμοί}$$



$$(n+1)!(n-1) \text{ πολλαπλασιασμοί}$$

Αυξάνει πάρα πολύ χρήματα!

B) $x = A^{-1}b$

Ο υπολογισμός του A^{-1} απαιτείται πολύ
σπάνια.

Αν χρειάζεται, πως μπορούμε να βρούμε τον A^{-1} ;

Έστω e^1, e^2, \dots, e^n η κανονική βάση του \mathbb{R}^n , δηλαδή

$$e_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{για } i=j \\ 0, & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

Δείξα (ή σύμβολο) του Kronecker

Λύνουμε τα γραμμικά συστήματα

$$A u^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{η συστήματα})$$

Ισχυρισμός: $A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$

$$\bullet A(u^1, u^2, \dots, u^n) = (A u^1, A u^2, \dots, A u^n) \iff$$

$$A(u^1, u^2, \dots, u^n) = (e^1, e^2, \dots, e^n) = I_n$$

82

Δύο μεγάλες κατηγορίες πινάκων:

α) Πυκνοί (ή αποθηκείσιμοι) πίνακες

Έχουν στοιχεία a_{ij} γενικά διάφορα του μηδενός.

β) Αραιοί (ή σποραδικοί) πίνακες

Έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία, που αν τα εκμεταλλευτούμε, αποκαθίζουμε υπολογιστικά οφέλη.

Μέγεθος πινάκων:

$n < 100$: μικρό

$100 \leq n < 1000$: μέτριο (μεσαίο)

$n \geq 1000$: μεγάλο

Στην πράξη λύνουμε γραμμικά συστήματα με πυκνούς πίνακες μέχρι μέτριο μέγεθος, ενώ με αραιούς πίνακες ακόμα και μεγάλου μεγέθους.

Κατηγορίες μεθόδων:

α) Άμεσες: Χρησιμοποιούνται κυρίως για πυκνούς πίνακες (είναι παραλλαγές της μεθόδου αναγωγής του Gauss)

β) Επαναληπτικές: Χρησιμοποιούνται κυρίως για αραιούς πίνακες.

Η μέθοδος αναγωγής του Gauss

Εστω $U = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικός

δηλαδή $u_{ij} = 0$ για $i > j$

Υπόθεση: U αντιστρέφεται, $u_{ii} \neq 0, i=1,\dots,n$

$$\det U = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$$

Εστω $y \in \mathbb{R}^n$ δεδομένο. Θέλουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ux = y$, δηλαδή:

$$\left. \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n &= y_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ u_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \right\}$$

Το σύστημα λύνεται εύκολα με "ανιδοδρόμηση":

Βρίσκουμε το x_n από την τελευταία εξίσωση, το αντικαθιστούμε στην προτελευταία και βρίσκουμε το x_{n-1} , ..., αντικαθιστούμε τα x_n, \dots, x_2 στη πρώτη και βρίσκουμε το x_1 .

$$(Ux)_k = y_k \iff$$

$$\sum_{j=k}^n a_{kj} x_j = y_k$$

$$u_{kk} x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j$$

↑
≠ 0

Αλγόριθμος της οπισθοδρόμησης:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

για $k = n-1, n-2, \dots, 1$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left[y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right]$$

Απαιτούμενες πράξεις:

Διαίρεσεις: n

Πολλαπλασιασμοί

(και προσθέσεις) $= 1 + 2 + \dots + (n-1) = \left(\frac{n^2}{2}\right) - \frac{n}{2}$

Απαιτούμενη μνήμη:

$$\frac{n^2}{2} + O(n) \text{ θέσεις για τα } u_{ij} \text{ και τα } y_i$$

Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των y_i

Βασική ιδέα στη μέθοδο αναδρομής του Gauss:

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών (εναλλαγή δύο εξισώσεων, ή άθροιση κατά file ενός πολλαπλασίου μιας γραμμής σε μια άλλη, και αντικατάσταση της τελευταίας με το αποτέλεσμα), ώστε το αρχικό σύστημα $Ax = b$ να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή $Ux = y$, με U άνω τριγωνικό.
(Τριγωνοποίηση). Λύνουμε το $Ux = y$ με οπισθοδρόμηση.

Παράδειγμα

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{array} \right\}$$

i) Τριγωνοποίηση: $1^{\text{η}} \leftrightarrow 2^{\text{η}}$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_2 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{array} \right\}$$

1^η Βήμα: $3^{\text{η}} - \frac{5}{2} \cdot 1^{\text{η}}$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 8x_2 + 1.5x_3 = -11 \end{array} \right\}$$

2^η Βήμα: $3^{\text{η}} - 8 \cdot 2^{\text{η}}$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ -17.5x_3 = -35 \end{array} \right\}$$

ii) Οπισθοδρόμηση

$$x_3 = 2$$

$$x_2 + 2 \cdot 2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$2x_1 - 2 \cdot (-1) + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 1$$

(86)

Απαλοιφή Gauss

Γενική Περιγραφή: $Ax = b$, $\det A \neq 0$

Θέτουμε:

$$A^{(1)} := (a_{ij}^{(1)})_{i,j=1,\dots,n} = A$$

$$b^{(1)} := \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ 1 \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = b$$

$$Ax = b \Leftrightarrow A^{(1)}x = b^{(1)}$$

Τριγωνοποίηση

1^η Βήμα

Υπόθεση: $a_{11}^{(1)} \neq 0$, (Μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλη εναλλαγή γραμμών)

Πολλαπλασιαστές: $m_{i1} := \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $i = 2, \dots, n$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του συστήματος επί m_{i1} , αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την i -οστή γραμμή, και αντικαθιστούμε την i -οστή γραμμή με αυτή που προέκυψε, για $i = 2, \dots, n$.

Έτσι, μετά το πρώτο βήμα προκύπτει το σύστημα $A^{(2)} x = b^{(2)}$, με

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \hline 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{array} \right), \quad b^{(2)} = \left(\begin{array}{c} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

με

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}, \quad i = 2, \dots, n$$

Bijka r, 1 ≤ r ≤ n-1

— Ekvivale anto zo $A^{(r)} x = b^{(r)}$, $\mu \in$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{r-1, r-1}^{(r-1)} \dots a_{r-1, n}^{(r-1)} \\ \hline & & & a_{rr}^{(r)} \dots a_{r, n}^{(r)} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n, r}^{(r)} \dots a_{n, n}^{(r)} \end{pmatrix}$$

Kai

$$b^{(r)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ \hline b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{pmatrix}$$

⊖ Ερωτούμε τον υποπίνακα:

$$\tilde{A}^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{i,j=r,\dots,n}$$

Είναι ο $\tilde{A}^{(r)}$ αντιστρέψιμος;

Έχουμε:

$$\det A^{(r)} = a_{11}^{(2)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{r-1,r-1}^{(r-1)} \cdot \det \tilde{A}^{(r)}$$

$$\det A^{(r)} \neq 0 \Rightarrow \det \tilde{A}^{(r)} \neq 0$$

Υπόθεση: $a_{rr}^{(r)} \neq 0$

Πολλαπλασιαστές: $m_{ir} = \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, i=r+1, \dots, n$

Πολλαπλασιάζουμε την r -οστή εξίσωση επί m_{ir} , αφαιρούμε από την i -οστή, και αντικαθιστούμε την i -οστή με αυτό που προέκυψε, για $i=r+1, \dots, n$

Ύστερα από $n-1$ βήματα, προκύπτει το σύστημα

$$A^{(n)} x = b^{(n)}$$

με άνω τριγωνικό πίνακα $A^{(n)}$

Οπισθοδρόμηση: Λύνουμε το $A^{(n)} x = b^{(n)}$ με οπισθοδρόμηση.

Απαιτούμενη μνήμη:

• Για τον A: n^2 θέσεις

• Για τον b: n θέσεις

Δεν απαιτείται επιπλέον μνήμη

Οι πολλαπλασιαστές $m_{i,r}$, $i = r+1, \dots, n$, αποθηκεύονται στις θέσεις των στοιχείων $a_{i,r}$, $i = r+1, \dots, n$ (για $r = 1, \dots, n-1$).

Συνολικά, οι πολλαπλασιαστές αποθηκεύονται στις θέσεις (i, j) , με $i > j$, στο κάτω τρίγωνο του A.

Τα νέα στοιχεία σε κάθε βήμα αποθηκεύονται στις αντίστοιχες θέσεις.

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - m_{i,r} a_{r,j}$$

Το ίδιο για τα b_i

Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των b_i .

92

Παρατήρηση (Υπολογισμός ορίζουσας)

$$\det A^{(n)} = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n)}$$

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)}$$

με m το πλήθος των εναλλαγών γραμμών.

Πράξεις: $\frac{n^3}{3}$

Άρα, Cramer: $(n+1) \frac{n^3}{3} \approx \frac{n^4}{3}$

Οδήγηση

$a_{ii}^{(i)}$: οδηγός, $i=1, \dots, n$

Για να βρούμε τους πολλαπλασιαστές διαίρειμε με τους οδηγούς.

Αναθέτουμε προβλήματα στην περίπτωση που κάποιος οδηγός έχει μικρή απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα

$$\left. \begin{array}{l} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array} \right\}$$

$$x_1 = 1.0001 \dots, \quad x_2 = 0.9998 \dots$$

Υπολογισμός: $\theta=10$, $t=3$, $L=-20$, $u=20$,
στρογγύλιση

$$m_{21} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)}) \Leftrightarrow$$

$$a_{22}^{(2)} = fl(1 - 10^4 \cdot 1) \Leftrightarrow$$

$$a_{22}^{(2)} = fl(-9999) = -10^4$$

$$b_2^{(2)} = fl(b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}) = fl(2 - 10^4 \cdot 1) = -10^4$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, καθόλου καλή προσέγγιση!

94

Εναλλαγή γραμμών:

$$\left. \begin{array}{l} 10^{-4} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \end{array} \right\}$$

Ο ίδιος υπολογιστής δίνει αποτέλεσμα:

$$x_1 = x_2 = 1$$

Πολύ καλή προσέγγιση!

Μερική Οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές)

Στο πρώτο βήμα της τριγωνοποίησης κοιτάζουμε την πρώτη στήλη του A, βρίσκουμε ένα στοιχείο $a_{11}^{(1)}$ με τη μέγιστη απόλυτη τιμή. Με εναλλαγή γραμμών πηγαίνουμε το στοιχείο αυτό στη θέση του οδηγού.

Γενικά, στο βήμα r, εξετάζουμε την "υποστήλη" $(a_{rr}^{(r)}, a_{r+1,r}^{(r)}, \dots, a_{nr}^{(r)})^T$, βρίσκουμε ένα στοιχείο της με μέγιστη απόλυτη τιμή και με εναλλαγή γραμμών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού.

Παράδειγμα

$$\left. \begin{aligned} 10^{-4} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + 10^4 x_2 &= 10^4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \right\} (*)$$

"μικρός οδηγός" \Rightarrow "ασαφής" έννοια

Λύνοντας το (*) βρίσκουμε: $x_1 = 0, x_2 = 1$

Κάνοντας πρώτα εναλλαγή γραμμών βρίσκουμε: $x_1 = x_2 = 1$

$$\frac{|a_{11}|}{|a_{12}|} = 10^{-4} \text{ "μικρός"}$$

$$\frac{|a_{21}|}{|a_{22}|} = 1 \text{ "όχι μικρός"}$$

96

Ολική Οδήγηση (οδήγηση κατά γραμμές και στήλες)

Στο πρώτο βήμα εξετάζουμε όλα τα στοιχεία του A , βρίσκουμε ένα a_{ij} με τη μέγιστη απόλυτη τιμή, και με εναλλαγή γραμμών και στηλών το φέρουμε στη θέση του οδηγού.

Επιδόση κόστος: $\frac{n^3}{3}$

Απαλοιφή Gauss

α) Χωρίς οδήγηση

Θεωρείται ασταθής μέθοδος. Υπάρχουν όμως κατηγορίες συστημάτων $Ax = b$, π.χ. αν ο A είναι θετικά ορισμένος, για τα οποία είναι ευσταθής. Στην πράξη χρησιμοποιείται μόνο για ζέτοια συστήματα.

β) Ολική οδήγηση

Θεωρείται ευσταθής μέθοδος. Χρησιμοποιείται σπάνια, γιατί διπλασιάζει το κόστος της απαλοιφής.

γ) Μερική οδήγηση

Η πιθανότητα αστάθειας είναι πολύ μικρή.
Η μέθοδος χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην πράξη, γιατί αυξάνει μόνο λίγο το κόστος.

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής στην πράξη

Υλοποιείται σε δύο στάδια (φάσεις):

1^ο στάδιο

Γίνονται όλοι οι υπολογισμοί της τριγωνποίησης (με οδήγηση, αν θέλουμε) που αφορούν τον πίνακα A.

DECOMP

2^ο στάδιο

Χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του 1^{ου} σταδίου, και τον b , και κάνει τους υπολογισμούς της τριγωνποίησης που αφορούν τον b , και βρίσκει το x με οπισθοδρόμηση.

SOLVE

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε συστήματα της μορφής:

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ Ax' = b' \\ Ax'' = b'' \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \text{ συστήματα} \\ \text{με τον ίδιο πίνακα } A \end{array}$$

Κόστος

Καλούμε μία φορά την DECOMP: $(\frac{n^3}{3} + O(n^2))$

και m φορές τη SOLVE: $(m(\frac{n^2}{2} + O(n)))$

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} .

$$Au^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$$

Κόστος: $\frac{2n^3}{3} + O(n^2)$

Ανάλυση LU

1^ο στάδιο: $A = P^{-1}LU$

- P πίνακας μεζάθεσης
- L κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο
- U άνω τριγωνικός

2^ο στάδιο: $Ax = b$

$$P^{-1}LUx = b \iff$$

$$LUx = Pb$$

$$Ly = Pb, \quad Ux = y$$

Βήμα r

$$(M_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ -m_{ir} & , i=r+1, \dots, n \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\text{Τότε } A^{(r)} = M_r A^{(r-1)} = \dots = M_r M_{r-1} \dots M_1 A.$$

Υόστερα από $n-1$ βήματα παίρνουμε:

$$\textcircled{A^{(n)}} = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 \textcircled{A}$$

↑
U

$$U = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 A$$

$$\Rightarrow A = M_1^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} U$$

Μένει να αποδείξουμε ότι:

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

Ισχύει $\det M_i = 1$, $i=1, \dots, n-1$,
συνεπώς οι M_i είναι αντιστρέψιμοι.

Έχουμε:

$$(M_i^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & , i=j \\ m_{ir} & , i=r+1, \dots, n \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Γενική περίπτωση (με εναλλαγές γραμμών)

Υπάρχει εναλλαγή γραμμών που οδηγεί σε έναν πίνακα A' , που αν γνώζαν εκ των προτέρων, θα καθιστούσε εύρησή της τριγωνοποίηση, χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Άρα, σύμφωνα με την πρώτη περίπτωση έχουμε: $A' = LU$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας μετάθεσης P , που αντιστοιχεί στη μετάθεση π , έχει i_k γραμμή τη k γραμμή του I_n .

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \iff$$

$$P \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Γενικά:

Ο PA προκύπτει από τον A με τις ίδιες εναλλαγές γραμμών, που από τον I_n οδηγούν στον P .

Άρα:

Υπάρχει πίνακας μεταθέσεως P τέτοιος ώστε:

$$\boxed{A' = PA}$$

$$\text{Άρα, } PA = LU \implies \boxed{A = P^{-1}LU}$$

Κατάσταση γραμμικών συστημάτωνΠαράδειγμα

$$\underbrace{\begin{pmatrix} .913 & .659 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} .254 \\ .217 \end{pmatrix}}_b$$

Απαλοιφή Gauss (συμπίζει με τη μερική και την ολική οδήγηση):

$$\beta = 10, \quad \tau = 3, \quad \text{αποκοπή}$$

Αποτελέσματα

$$m_{21} = .854$$

$$a_{22}^{(2)} = .001$$

$$b_2^{(2)} = .001$$

Ακριβής λύση

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Προσεγγιστική λύση

$$\tilde{x}_1 = -.443$$

$$\tilde{x}_2 = 1$$

Γιατί είναι τόσο άσχημα τα αποτελέσματα;

Αφού η μέθοδος είναι "καλή", μήπως το πρόβλημα οφείλεται στην κατάσταση του συστήματος;

Θεωρούμε το σύστημα:

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .25 \textcircled{3} \\ .21 \textcircled{8} \end{pmatrix}$$

Ακριβής λύση:

$$y_1 = 1223$$

$$y_2 = -1694$$

Άρα, το σύστημα έχει κακή κατάσταση!

$$\det A = -10^{-6}, \text{ μικρή τιμή}$$

Μήπως αυτό σχετίζεται με την κατάσταση του συστήματος;

Το σύστημα:

$$\lambda A x = \lambda b$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει την ίδια κατάσταση με το $Ax = b$, αλλά

$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$$

Οπότε, μπορούμε να κάνουμε την ορίζουσα όσο μικρή ή όσο μεγάλη θέλουμε, χωρίς να μεταβληθεί η κατάσταση του συστήματος.

π.χ.: με $\lambda = 10^4$ οι x και \tilde{x} παραμένουν ίδιες, ενώ $\det(10^4 A) = 10^8 (-10^{-6}) = -100$

Άρα, η απάντηση στο ερώτημα είναι: **ΟΧΙ**

Για να μιλήσουμε με ακρίβεια για την κατάσταση συστημάτων, χρειαζόμαστε τρόπους να μετράμε μεταβολές διανυσμάτων και πινάκων. Ένας βολικός τρόπος είναι η γενίκευση της έννοιας της απόλυτης τιμής που οδηγεί στην έννοια της νόρμας.

Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων (norm)

α) Νόρμες διανυσμάτων

★★

Ορισμός Νόρμας

Έστω X ένας γραμμικός χώρος στο \mathbb{R}
ή στο \mathbb{C} και $IK = \mathbb{R}$ ή $IK = \mathbb{C}$,
αντίστοιχα. Μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

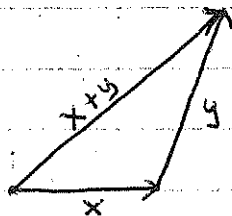
λέγεται νόρμα (σζάθμη, norm), αν ισχύουν:

$$(N1): x \in X : \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(N2): \forall \lambda \in IK \quad \forall x \in X : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$(N3): \forall x, y \in X : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(τριγωνική ανισότητα)



Παρατηρήσεις

α) Ισχυρισμός: $\forall x \in X: \|x\| \geq 0$

$$0 = \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| =$$

↑
(N3)

$$= \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \geq 0$$

β) $\forall x, y \in X: \|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |$
(Τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω)

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

↑
(N3)

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Αντίστροφα: $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$

Άρα: $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$

Παραδείγματα

$$1. (\mathbb{R}, \|\cdot\|) \quad \mu\epsilon \quad \|x\| = |x|$$

$$(\mathbb{C}, \|\cdot\|) \quad \mu\epsilon \quad \|z\| := |z|$$

$$2. (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \quad \mu\epsilon \quad \|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad (\ell_1 \text{ νόρμα})$$

Πράξεις:

$$(N1): \|x\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \iff$$

$$|x_i| = 0, \quad i=1, \dots, n \iff$$

$$x_i = 0, \quad i=1, \dots, n \iff$$

$$x = 0$$

$$(N2): \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| =$$

$$= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) = |\lambda| \|x\|_1$$

$$(N3): x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)$$

112

$$\sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

l_∞ νόρμα, νόρμα μεγίστου

(andí anódευξη)

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

l_2 νόρμα ή Ευκλείδεια νόρμα

$$(N1): \|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$x = 0$$

(N2): $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^2 |x_i|^2 \right)^{1/2} = \\ &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \\ &= |\lambda| \|x\|_2 \end{aligned}$$

(N3): $x, y \in \mathbb{R}^n$

Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο:

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$(x, x)_2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)_2}$$

Ισχυρισμός:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |(x, y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz

• $y=0$: τετριμμένο

• $y \neq 0$: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ αυθαίρετο, τότε

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_2 = \\ &= \|x\|_2^2 + 2(x, y)_2 \lambda + \underbrace{\|y\|_2^2}_{\neq 0} \lambda^2 \end{aligned}$$

Το δεξιό μέλος είναι τριώνυμο που δεν αλλάζει πρόσημο. Επομένως, δεν μπορεί να έχει δύο πραγματικές (διαφορετικές) ρίζες.

Άρα, η διακρίνουσα του είναι μη θετική.

$$\Delta = 4(x, y)_2^2 - 4\|y\|_2^2 \cdot \|x\|_2^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x, y)_2^2 \leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2$$

$$\Rightarrow |(x, y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n (x_i)^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=1}^n (y_i)^2)^{1/2}$$

Οπότε έχουμε:

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y)_2 =$$

$$= (x, x)_2 + (y, y)_2 + 2(x, y)_2 =$$

$$= \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x, y)_2$$

$$\uparrow$$

$$\leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 =$$

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

$$5. (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$$

$$p = 1, 2, \infty$$

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$$

$$p \geq 1$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty, \quad p \rightarrow \infty$$

6. $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

= νόρμα μεγίστου

(N1): $f \in C[a, b]$

$$\|f\|_\infty = 0 \iff$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0 \iff$$

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \iff$$

$$f = 0$$

(N2): $\lambda \in \mathbb{R}, f \in C[a, b]$

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda f(x)| =$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} (|\lambda| |f(x)|) =$$

$$= |\lambda| \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| =$$

$$= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

(118)

(N3): $f, g \in C[a, b]$

$$\|f+g\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| =$$

$$= |f(\bar{x}) + g(\bar{x})| \leq$$

$$\leq |f(\bar{x})| + |g(\bar{x})| \leq$$

$$\leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

Ορισμός (Ισοδυναμία νόρμών)

Έστω X ένας γραμμικός χώρος.
Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ στον X
λέγονται ισοδύναμες (ή συγκρίσιμες)
αν υπάρχουν θετικοί αριθμοί m
και M τέτοιοι ώστε:

$$\forall x \in X: m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$$

$$(\Leftrightarrow \frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|')$$

Λήμμα (Ισοδυναμία μιας νόρμας με τη νόρμα μέγιστου στον \mathbb{R}^n)

Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον \mathbb{R}^n είναι
ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$

Απόδειξη (ένα μέρος της μόνο)

Έστω $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ η κανονική
βάση του \mathbb{R}^n . Τότε για $x \in \mathbb{R}^n$,
 $x = (x_1, \dots, x_n)$ έχουμε:

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n$$

οπότε:

(120)

$$\|x\| = \|x_1 e^1 + x_2 e^2 + \dots + x_n e^n\| \leq$$

$$\leq \|x_1 e^1\| + \dots + \|x_n e^n\| =$$

$$= \underbrace{|x_1|}_{\leq \|x\|_\infty} \|e^1\| + \dots + \underbrace{|x_n|}_{\leq \|x\|_\infty} \|e^n\| \leq$$

$$\leq \|x\|_\infty \|e^1\| + \dots + \|x\|_\infty \|e^n\| =$$

$$= \underbrace{(\|e^1\| + \dots + \|e^n\|)}_{=M} \cdot \|x\|_\infty$$

ανεξάρτητο του x

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \|x\| \leq M \|x\|_\infty$$

Πρόταση (Ισοδυναμία νόρμών στον \mathbb{R}^n)

Όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

Απόδειξη

Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ δύο νόρμες στον \mathbb{R}^n . Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, κάθε μία από αυτές είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$

Επομένως, υπάρχουν $m, M, m', M' > 0$ τέτοια ώστε:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty \quad (1)$$

και

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: m' \|x\|_\infty \leq \|x\|' \leq M' \|x\|_\infty \quad (2)$$

Άρα, από (1) και (2), για $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\|x\| \leq M \|x\|_\infty \leq \underbrace{M \frac{1}{m'}}_{= \tilde{M}} \|x\|'$$

και

$$\|x\| \geq m \|x\|_\infty \geq \underbrace{m \frac{1}{M'}}_{= \tilde{m}} \|x\|'$$

$$\text{Δηλαδή: } \forall x \in \mathbb{R}^n: \tilde{m} \|x\|' \leq \|x\| \leq \tilde{M} \|x\|'$$

Ορισμός (Σύγκλιση ακολουθίας)

Λέμε ότι μια ακολουθία $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ συγκλίνει σε ένα $x \in X$ (το όριο της ακολουθίας) ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον X , αν ισχύει:

$$\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

Γράφουμε:

$$x^{(n)} \rightarrow x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = x \quad (\text{ως προς τη νόρμα } \|\cdot\|)$$

Ειδικά στον \mathbb{R}^n :

Λόγω της ισοδυναμίας των νόρμών

$$m \|x^{(m)} - x\|' \leq \|x^{(m)} - x\| \leq M \|x^{(m)} - x\|'$$

η σύγκλιση είναι ανεξάρτητη από τη νόρμα.

Ιδιαίτερα, αν χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία με τη νόρμα μέγιστου:

$$x^{(m)} \rightarrow x \text{ στον } \mathbb{R}^n \text{ ως προς } \|\cdot\|$$

ακριβώς τότε αν

$$x_i^{(m)} \rightarrow x_i, \quad m \rightarrow +\infty, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

★

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

- Αν ζέρουμε το όριο a , τότε για να αποδείξουμε ότι $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon$$

- Αν δεν ζέρουμε το όριο, πώς εξετάζουμε κατά πόσο συγκλίνει μία ακολουθία;

Υπάρχει μόνο ένας τρόπος:

Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy (ή βασική ακολουθία)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \epsilon$$

Σε γραμμικούς χώρους:

- Κάθε συχλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.
- Δεν είναι κάθε ακολουθία Cauchy συχλίνουσα.

Αν αυτό συμβαίνει, τότε ο χώρος λέγεται πλήρης.

Ορισμός

Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ως προς τη $\|\cdot\|$, συχλίνει ως προς τη $\|\cdot\|$, δηλαδή αν:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \exists x \in X : \|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$$

Πρόταση

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

β) Νόρμες πινάκων

Μια απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$
 λέγεται νόρμα πινάκων, αν
 ικανοποιεί τις (N1), (N2), (N3)
 και επιπρόσθετα:

$$(N4): \forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο μια
 ειδική κατηγορία νορμών πινάκων,
 τις λεγόμενες φυσικές νόρμες.

Προεργασία

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον \mathbb{R}^n .
 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ πίνακας.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$$

Λόγω της ισοδυναμίας της $\|\cdot\|$ με
 την $\|\cdot\|_\infty$ στον \mathbb{R}^n έχουμε:

$$\exists m, M > 0: m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty$$

Άρα:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M}{m} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{M}{m} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

126

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \underbrace{(|x_j|)}_{\leq \|x\|_{\infty}} \right) \leq$$

$$\leq \|x\|_{\infty} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Apa:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M}{m} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq$$

$$\leq \frac{M}{m} \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} =$$

$$= \frac{M}{m} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) = C < +\infty$$

Ορισμός (Φυσική νόρμα πινάκων)

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n .
Η απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}, \|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται φυσική νόρμα πινάκων
ή νόρμα που παράχεται (επαχεται)
από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του \mathbb{R}^n .

Παρατήρηση

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

• $x=0$: $\|A \cdot 0\| \leq \|A\| \cdot \|0\|$

• $x \neq 0$: $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$

Κάθε φυσική νόρμα πινάκων
είναι νόρμα πινάκων

128

Ερώτημα: Πώς υπολογίζουμε μια φυσική νόρμα πινάκων;

• Έστω ότι: $\forall x \in \mathbb{R}^n: \|Ax\| \leq c_1 \|x\|$

Τότε: $\|A\| \leq c_1$

$x \neq 0$: $\|Ax\| \leq c_1 \|x\|$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c_1$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c_1$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq c_1$$

• Έστω $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$ τέτοιο ώστε $\|Ay\| \geq c_2 \|y\|$

Τότε: $\|A\| \geq c_2$

$$\|Ay\| \geq c_2 \|y\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \geq c_2$$

$$\Rightarrow \|A\| \geq c_2$$

★★ Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$$A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

νόρμα του αθροίσματος γραμμών

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

νόρμα του αθροίσματος στήλων

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$B \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του (φάσμα)

$$\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

φασματική ακτίνα του B

$$\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2}$$

Ευκλείδεια νόρμα
ή φασματική νόρμα

130

★ Δείκτης κατάστασης

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$

Θέμα: Μελέτη της κατάστασης του $Ax = b$

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και $\|\cdot\|$ η αντίστοιχη φυσική πινάκων

$$\left. \begin{aligned} Ax &= b \\ A(x + \Delta x) &= b + \Delta b \end{aligned} \right\}$$

Τι μπορούμε να πούμε για τη σχετική μεταβολή;

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$\Rightarrow A \cdot \Delta x = b + \Delta b - Ax$$

$$\Rightarrow A \cdot \Delta x = \Delta b$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = A^{-1} \Delta b}$$

$$\text{Άρα: } \|\Delta x\| = \boxed{\|A^{-1} \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|}$$

Επομένως:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\|x\|}$$

Αλλά, $Ax = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}}$$

Άρα:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Ο $\kappa(A)$ (ή $\text{cond}(A)$) = $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

λέγεται δείκτης κατάστασης του πίνακα A (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$), και είναι ο συντελεστής ευαισθησίας του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ (Turing)

Συμπέρασμα:

$$\boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει (σε μη τετριμμένες περιπτώσεις) ως ισότητα, άρα δεν βελτιώνεται.

(132)

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Ισχυρισμός: $\kappa(A) \geq 1$

$$\kappa(I_n) = \|I_n\| \cdot \|I_n^{-1}\| = \|I_n\|^2 = 1^2 = 1$$

$$1 = \|I_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

Όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι ο $\kappa(A)$, τόσο καλύτερη είναι η κατάσταση του συστήματος.

Για $\kappa(A) \gg 1$, έχουμε κακή κατάσταση.

Θεώρημα (Εκτίμηση της σχετικής μεταβολής λύσεων γραμμικών συστημάτων)

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n
και η αντιστοίχη φυσική νόρμα
πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος και $b \in \mathbb{R}^n$,
 $b \neq 0$.

Αν $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, τότε έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \text{α) } Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

β) Αν $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$,
τότε ο πίνακας $A + \Delta A$ είναι
αντιστρέψιμος και:

$$\left. \begin{array}{l} Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

γ) Αν $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε
 $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, τότε:

$$\left. \begin{aligned} Ax &= b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b + \Delta b \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left[\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right]$$

Οι α) και β) είναι ειδικές περιπτώσεις της γ) (για $\Delta A = 0$ και $\Delta b = 0$, αντίστοιχα).

Απόδειξη

α) (Το αποδειχθηκε προηγουμένως)

β) Βοηθητικό αποτέλεσμα:

Έστω $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ τετατός ώστε να υπάρχει $c > 0$ τετατός ώστε:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Bx\| \geq c\|x\|$$

Ισχυρισμός:

- B αντιστρέψιμος
- $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

• $Bx = 0$

Τότε έχουμε $0 \geq c\|x\|$, άρα $\|x\| = 0$,
δηλαδή $x = 0$.

Επομένως, ο B είναι αντιστρέψιμος.

• Για $y \in \mathbb{R}^n$:

$$c\|B^{-1}y\| \leq \|BB^{-1}y\| = \|y\|$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \|B^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$$

δηλαδή $\boxed{\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}}$

Για τον πίνακα $A + \Delta A$ έχουμε:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \|(A + \Delta A)y\| = \|Ay + \Delta A \cdot y\|$$

$$\|Ay + \Delta A \cdot y\| \geq \|Ay\| - \|\Delta A y\|$$

$$\geq \|Ay\| - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$$\geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$$\frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\| = \underbrace{\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \right)}_{=c} \cdot \|y\|$$

$$c = \frac{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}{\|A^{-1}\|} > 0$$

$$y = A^{-1} \cdot Ay$$

$$\Rightarrow \|y\| = \|A^{-1}(Ay)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ay\|$$

$$\Rightarrow \|Ay\| \geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|}$$

Άρα:

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}$$

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

$$\Rightarrow (A + \Delta A)\Delta x = b - (A + \Delta A)x =$$

$$= b - Ax - \Delta Ax$$

$$= -\Delta Ax$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = -(A + \Delta A)^{-1} \Delta Ax}$$

Apra:

$$\|\Delta x\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\|$$

$$\leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

138

$$\gamma) (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

$$\Rightarrow (A + \Delta A)\Delta x = b + \Delta b - (A + \Delta A)x =$$

$$= b + \Delta b - Ax - \Delta Ax =$$

$$= \Delta b - \Delta Ax$$

$$\Rightarrow \Delta x = (A + \Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta Ax)$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A + \Delta A)^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \cdot \|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$b = Ax \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Επαναληπτικές μέθοδοι

$$Ax = b, A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ αντιστρέψιμος}$$

$$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \text{ αρχική προσέγγιση}$$

Οι επαναληπτικές μέθοδοι δίνουν μια ακολουθία διανυσμάτων $x^{(m)}$

$$\text{Μέθοδος: } x^{(m)} \rightarrow x^{(m+1)}$$

Γενική Μέθοδος:

$$A = M - N, M \text{ αντιστρέψιμος}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow$$

$$(M - N)x = b \Leftrightarrow$$

$$Mx = Nx + b$$

$$\text{Μέθοδος: } \boxed{Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b}$$

Λύνουμε σύστημα με πίνακα M .

140

Υπόθεση: $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$

$$Ax = b \Leftrightarrow$$

$$(Ax)_i = b_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$a_{ii} \cdot x_i = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right], i = 1, \dots, n$$

Μέθοδος του Jacobi

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right], \quad i=1, \dots, n$$

(Ιδιότητα της παραλληλίας)

Μέθοδος των Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right], \quad i=1, \dots, n$$

(Δεν είναι παραλληλή)

- Υπάρχει μια μεγάλη κατηγορία συστημάτων για τα οποία η μέθοδος των Gauss-Seidel είναι ταχύτερη της μεθόδου του Jacobi.

- Υπάρχουν συστήματα για τα οποία μία από τις δύο μεθόδους συγκλίνει και η άλλη αποκλίνει.

Εστω $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

Γενική επαναληπτική μέθοδος:

$$A = M - N \quad (M \text{ αντιστρέψιμος})$$

$$Ax = b \Leftrightarrow$$

$$(M - N)x = b \Leftrightarrow$$

$$Mx = Nx + b$$

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αρχική προσέγγιση

$$x^{(m)} \rightarrow x^{(m+1)}:$$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

Ισχυρισμός: Αν $x^{(m)} \rightarrow y$, $m \rightarrow +\infty$, τότε $y = x$.

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

$$\Rightarrow My = Ny + b$$

$$\Rightarrow (M - N)y = b$$

$$\Rightarrow Ay = b$$

$$\Rightarrow y = x$$

Πότε συγκλίνει μια επαναληπτική μέθοδος
(για οποιαδήποτε $x^{(0)}$);

$$P \in \mathbb{C}^{n,n}$$

$$\rho(P) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(P)|$$

όπου $\rho(P)$ η φασματική ακτίνα του P
και $\lambda_i(P)$ οι ιδιοτιμές του P .

Λήμμα (Σχέση φυσικής νόρμας και
φασματικής ακτίνας)

Εστω $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον \mathbb{C}^n .
Τότε, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$, ισχύει

$$\rho(P) \leq \|P\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ η αντιστοιχη φυσική νόρμα.

Αντίστροφα, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\varepsilon > 0$,
υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε

$$\|P\| \leq \rho(P) + \varepsilon$$

Απόδειξη (\Rightarrow)

Εστω λ ιδιοτιμή του P και $z \in \mathbb{C}^n$,
 $z \neq 0$, αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα,
 $Pz = \lambda z$. Τότε:

$$\|\lambda z\| = \|Pz\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \|z\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \|P\|$$

Η ανισότητα ισχύει για όλες τις
ιδιοτιμές, άρα:

$$\rho(P) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \leq \|P\|$$

146

$$Ax = b \Leftrightarrow$$

$$Mx = Nx + b$$

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$M(x^{(m+1)} - x) = N(x^{(m)} - x)$$

$$\Rightarrow x^{(m+1)} - x = \underbrace{M^{-1}N}_{G} (x^{(m)} - x)$$

$G := M^{-1}N$, πίνακας επανάληψης
της μεθόδου

★★ Θεώρημα (Ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων)

Έστω $Ax = b, Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b,$
 $m = 0, 1, \dots,$ και $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο.

Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει, δηλαδή, για τυχαίο $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n,$
 $x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow +\infty$

β) $\rho(G) < 1,$ με $G = M^{-1}N$ τον πίνακα επανάληψης.

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα πίνακας $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\| < 1$

δ) $\lim_{m \rightarrow +\infty} G^m = 0$

Απόδειξη $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$

$a) \Rightarrow b)$:

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } x^{(m+1)} - x &= G(x^{(m)} - x) = \\ &= G^2(x^{(m-1)} - x) = \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(m)} - x = G^m(x^{(0)} - x)}$$

Εμείς ξέρουμε $x^{(m)} - x \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty$,
 οπότε $G^m(x^{(0)} - x) \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_y$

Δηλαδή, $G^m y \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty$, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Έστω λ ιδιοτιμή του G και z αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$\begin{aligned} G^m z &= G^{m-1}(Gz) = \lambda G^{m-1} z = \\ &= \dots = \lambda^m z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^m z = G^m z}$$

$$\text{Άρα: } \|\lambda^m z\| = \|G^m z\| \iff$$

$$\|\lambda^m\| \|z\| = \|G^m z\|$$

$$\Rightarrow \|\lambda\|^m \|z\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \|\lambda\|^m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda| < 1}$$

Αυτό συμβαίνει για όλες τις ιδιοτιμές του G , οπότε:

$$\rho(G) < 1$$

$$\underline{\theta) \Rightarrow \gamma):}$$

Έχουμε $\rho(G) < 1$, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho(G) + \varepsilon < 1$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\| \leq \rho(G) + \varepsilon < 1$

$$\underline{\gamma) \Rightarrow \delta):}$$

$$\|G^m\| = \|G \cdot G \cdot \dots \cdot G\| \leq \|G\|^m$$

$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \leq \|G\|^m \|x^{(0)} - x\|$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x, \quad m \rightarrow +\infty$$

150

$\delta) \Rightarrow a):$

$$\|x^{(m)} - x\| = \|G^m(x^{(0)} - x)\| \leq \|G^m\| \|x^{(0)} - x\|$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow +\infty$$

Παράδειγμα

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|G\|_{\infty} = 2$$

$$\|G\|_1 = 2$$

$$\|G\|_2 = 2$$

} Δεν δίνει απερίσβητα

Σημείωση: Μόνο όταν ο πίνακας είναι άνω (ή κάτω) τριγωνικός, τότε οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p(G) = 0 < 1$$

$$G^2 = 0 \Rightarrow G^m = 0, m \geq 2$$

Λήμμα (Ανισότητα του Gerschgorin)

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ και λ ιδιοτιμή του A . Τότε, υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε:

$$|a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

$$a_{ss}, r_s := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|, s = 1, \dots, n$$

$$K(a_{ss}, r_s) := \{\mu \in \mathbb{C} : |a_{ss} - \mu| \leq r_s\}$$

κύκλος (περίφερεια και το εσωτερικό)
κέντρο a_{ss} και ακτίνα r_s

Κύκλοι του Gerschgorin

Απόδειξη

Έστω z αντιστοιχείο ιδιοδιάνυσμα.

Τότε $Az = \lambda z$, δηλαδή

$$(Az)_i = \lambda z_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \lambda z_i, \quad i=1, \dots, n$$

Άρα:

$$(a_{ii} - \lambda) z_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} z_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$(*) \Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \cdot |z_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |z_j|$$

Έστω $s \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $|z_s| = \|z\|$

Τότε, η (*) για $i=s$ δίνει

$$|a_{ss} - \lambda| \|z_s\| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \cdot |z_j| \leq \|z_s\|$$

$$\Rightarrow |a_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$: λέμε ότι ο A έχει αυστηρά
κυριαρχική διαγώνιο αν

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Ιδιότητα: Ο A είναι αντιστρέψιμος

Ισχυρισμός: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος αν
και μόνο αν το $\lambda = 0$
δεν είναι ιδιοτιμή του.

$\lambda = 0$, ιδιοτιμή του A

Τότε υπάρχει $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$, τέτοιο
ώστε $Az = 0 \cdot z$, δηλαδή $Az = 0$

Άρα A μη αντιστρέψιμος.

A μη αντιστρέψιμος

Υπάρχει $z \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $Az = 0$

$$\Rightarrow Az = 0 \cdot z$$

\Rightarrow Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του.

★★ Πρόταση (Σύγκλιση των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel για A με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τότε:

α) Οι πίνακες επανάληψης

$$G_J = -D^{-1}(L+U),$$

$$G_{GS} = (L+D)^{-1}U,$$

των μεθόδων του Jacobi και των Gauss-Seidel, έχουν την ιδιότητα

$$\|G_J\|_{\infty} < 1,$$

$$\|G_{GS}\|_{\infty} < 1$$

β) Οι μέθοδοι του Jacobi και των Gauss-Seidel συγκλίνουν για τέτοια συστήματα.

Απόδειξη

Θέτω

$$G := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)$$

Προφανώς $G < 1$

α) Jacobi : $\|G_J\|_\infty = G$ $G_J = -D^{-1}(L+U)$

$$G_J = - \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|G_J\|_\infty = \max \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = G < 1$$

β) Gauss-Seidel: $\|G_{GS}\|_{\infty} \leq C$

Για $y \in \mathbb{R}^n$, θέσω: $u := G_{GS} \cdot y$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\|u\|_{\infty} \leq C \|y\|_{\infty}$$

Έχουμε $u = -(L+D)^{-1} U y$, άρα

$$(L+D)u = -Uy$$

$$((L+D)u)_i = -(Uy)_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} u_j = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow a_{ii} u_i = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j$$

$$\Rightarrow u_i = - \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j \right]$$

$$\Rightarrow |u_i| = \frac{1}{|a_{ii}|} \left| \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j \right|$$

Παρομοίως: $|u_i| \leq C \|y\|_{\infty}, \quad i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\underline{i=1}: |u_1| &= \frac{1}{|a_{11}|} \left| \sum_{j=2}^n a_{1j} y_j \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \underbrace{(|y_j|)}_{\leq \|y\|_{\infty}} \leq \\
&\leq \underbrace{\left(\frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \right)}_{\leq C} \|y\|_{\infty} \leq C \|y\|_{\infty}
\end{aligned}$$

Εστω ότι ισχύει για $1, \dots, i-1$, τότε:

$$\begin{aligned}
 |u_i| &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| |u_j| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| |y_j| \right] \leq \\
 &\leq \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \|y\|_{\infty} \leq \\
 &\leq C \|y\|_{\infty}
 \end{aligned}$$