Ανάπτυγμα Taylor

Υπενθυμίζουμε εδώ το ανάπτυγμα Taylor συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $n \in \mathbb{N}_0$, και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα I. Έστω $x_0 \in I$.

Τότε, για κάθε $x \in I$, υπάρχει ένα σημείο $\vartheta = \vartheta(x)$ μεταξύ των x_0 και x, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$(\star) \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta).$$

Αυτός είναι ο *τύπος του Taylor* και το δεξιό του μέλος λέγεται *ανάπτυγμα Taylor* της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

Παρατήρηση 1 Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το ανάπτυγμα $(\star)$:

- Στην περίπτωση $n = 0$ η σχέση $(\star)$ ανάγεται στον τύπο της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\vartheta)$.
- Το ϑ εξαρτάται από το x και μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vartheta = \lambda x + (1-\lambda)x_0$ με κάποιο $\lambda \in (0,1)$, είναι όπως λέμε ένας *κυρτός* συνδυασμός των x και x_0.
- Ας συμβολίσουμε με $p_n(x)$ τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της $(\star)$,

  $$p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0).$$

  Προφανώς το p_n είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n, και λέγεται *πολυώνυμο Taylor* της f στο σημείο x_0. Προσεγγίζουμε δηλαδή την f με ένα πολυώνυμο p_n και ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος της $(\star)$ αποτελεί μια παράσταση του σφάλματος προσέγγισης $f(x) - p_n(x)$, το οποίο λέγεται και *υπόλοιπο* του τύπου του Taylor. Υπάρχουν και εναλλακτικές παραστάσεις του υπολοίπου.

  Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $p_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, για $i = 0, \dots, n$, δηλαδή οι παράγωγοι τάξης μέχρι n των συναρτήσεων p_n και f στο σημείο x_0 συμπίπτουν – το p_n παρεμβάλλεται με αυτήν την έννοια στην f στο σημείο x_0.
- Αν το ϑ δεν εξαρτάται από το x, τότε το δεξιό μέλος της $(\star)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n+1$. Συνεπώς, αυτό συμβαίνει *αν και μόνο αν* και το αριστερό μέλος της $(\star)$, δηλαδή η συνάρτηση f, είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n+1$. Σε αυτήν την περίπτωση βέβαια η $f^{(n+1)}$ είναι σταθερή συνάρτηση.
- Ο τελευταίος όρος στον τύπο $(\star)$ μηδενίζεται για κάθε $x \in I$, αν και μόνο αν η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. $\square$