4. Παρεμβολή

Ασκήσεις

4.3 Έστω $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς αυτά τα σημεία. Αποδείξτε ότι για $i \in \{0, \ldots, n\}$ ισχύει

$$x_0^i L_0(x) + \cdots + x_n^i L_n(x) = x^i \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης ως το πολυώνυμο παρεμβολής τύπου Lagrange μιας κατάλληλης συνάρτησης στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$.]

4.4 Έστω $p \in \mathbb{P}_3$ με $p(x_i) = \ln(x_i)$, $x_i := i + 1$, $i = 0, 1, 2, 3$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση ε, $\varepsilon(x) := \ln(x) - p(x)$, έχει στο διάστημα $[1, 4]$ ακριβώς τέσσερεις ρίζες.

4.5 Έστω $p \in \mathbb{P}_3$, τέτοιο ώστε $p(i) = \mathrm{e}^i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Αποδείξτε ότι

$$\forall x \in (2, 3) \quad \mathrm{e}^x > p(x).$$

4.6 Έστω $f \in C[a, b]$, $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$, και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$. Αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο P, το οποίο παρεμβάλλεται στην f στα ίδια σημεία, είναι της μορφής $P = p + rq$, όπου q τυχόν πολυώνυμο και $r(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$.

4.7 Έστω $f \in C^{n+1}[a, b]$, $h := (b - a)/n$, $x_i := a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \ldots, x_n$. Αποδείξτε ότι

$$\|f - p\|_\infty \le \frac{h^{n+1}}{4n + 4} \|f^{(n+1)}\|_\infty,$$

όπου

$$\|g\|_\infty := \max_{a \le x \le b} \big|g(x)\big|, \quad \text{για } g \in C[a, b].$$

4.8 Έστω $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $h_n := (b - a)/n$, $x_i^{(n)} := a + ih_n$, $i = 0, \ldots, n$, και $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. Υποθέστε ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι της f στο $[a, b]$, και ότι υπάρχει θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε

$$\|f^{(n)}\|_\infty \le M^n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0.$$

4.11 Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_i := -1 + i\,2/n$, $i = 0, \dots, n$, $f \in C[-1, 1]$, και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αντίστοιχα, τότε και το p είναι άρτιο ή περιττό, αντίστοιχα.

4.12 Αποδείξτε για τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους τις παρακάτω σχέσεις:

(i)
$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

(ii)
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, T_i(x)\, T_j(x)\, dx = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & i = j \ne 0, \end{cases}$$

(iii)
$$T_n \circ T_m = T_{nm}$$

(iv)
$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big)^n + \Big(x - \sqrt{x^2 - 1}\Big)^n\Big].$$

4.13 Έστω $p(x) := 4x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 3$. Προσδιορίστε το πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_4$ για το οποίο η νόρμα $\|p - q\|_\infty$ στο $[-1, 1]$ είναι ελάχιστη.

4.15 Έστω $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία. Αν $f \in C^4[a, b]$ και $p \in \mathbb{P}_3$, τέτοιο ώστε

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad p'(x_1) = f'(x_1),$$

αποδείξτε ότι

$$\forall x \in [a, b]\ \exists \xi \in (a, b) \quad f(x) - p(x) = \frac{1}{4!}\,(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)\, f^{(4)}(\xi).$$

4.16 Έστω $f \in C^5[0, 1]$ και $p \in \mathbb{P}_4$, τέτοιο ώστε

$$p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0), \quad p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1), \quad i = 0, 1, \qquad p\Big(\frac{1}{2}\Big) = f\Big(\frac{1}{2}\Big).$$

Προσδιορίστε μια παράσταση του σφάλματος $f(x) - p(x)$, $x \in [0, 1]$, συναρτήσει της πέμπτης παραγώγου της f.

4.17 Αποδείξτε την παράσταση (4.14) καθώς και τις ιδιότητες των πολυωνύμων $H_i^{(1)}$ και $H_i^{(2)}$ της παρεμβολής τύπου Hermite (τα οποία ορίζονται από την (4.15)), που αναφέρονται στο κείμενο μεταξύ των σχέσεων (4.14) και (4.15).

4.18 Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $m \in \mathbb{N}$. Αν

$$\Sigma_m(\Delta) := \left\{ s \in C^m[a,b] : \; s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \; i = 0, \dots, n \right\},$$

αποδείξτε ότι ο χώρος $\Sigma_m(\Delta)$ συμπίπτει με τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ m στο $[a,b]$.

4.20 Έστω f μια συνάρτηση που ορίζεται στο διάστημα $[a,b]$, και για $n \in \mathbb{N}$, $h_n := (b-a)/n$, $x_i := a + ih_n$, $i = 0, \dots, n$, και έστω $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h_n. Αν $s_n \in S_1(\Delta_n)$ η συνεχής και τμηματικά (ως προς Δ_n) γραμμική συνάρτηση η οποία παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, αποδείξτε ότι:

α) Αν $f \in C[a,b]$, τότε $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - s_n\|_\infty = 0$.

β) Αν $f \in C^1[a,b]$, τότε $\|f - s_n\|_\infty \le \dfrac{b-a}{2n} \|f'\|_\infty$.

4.21 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^4, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

α) Προσεγγίστε την f στο διάστημα $[0,2]$ με μια τμηματικά πολυωνυμική συνάρτηση p της μορφής

$$p(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1, \\ \alpha + \beta(x-1) + \gamma(x-1)^2 + \delta(x-1)^3, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, υποθέτοντας ότι $p \in C^1[0,2]$, και ότι $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(1) = f(1)$, $p(2) = f(2)$, $p'(2) = f'(2)$.

β) Συμπίπτει η συνάρτηση p με την παρεμβάλλουσα κυβική spline s της f στα σημεία $\{0,1,2\}$ με συνοριακές συνθήκες $s'(0) = f'(0), s'(2) = f'(2)$;

γ) Συμπίπτει η συνάρτηση p με την παρεμβάλλουσα κυβική spline του Hermite της f στα σημεία $\{0,1,2\}$;

4.22 Αποδείξτε ότι ο μικρότερος δυνατός φορέας μιας (μη τετριμμένης) κυβικής spline αποτελείται από τέσσερα διαδοχικά υποδιαστήματα ενός διαμερισμού, είναι δηλαδή της μορφής $[x_{j-2}, x_{j+2}]$. Στην περίπτωση ομοιόμορφου διαμερισμού αποδείξτε ότι η B–spline που προκύπτει είναι πολλαπλάσιο της συνάρτησης s_j, που δίνεται από τον τύπο (4.53).

4.23 Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\{\varphi_j\}$, $-1 \le j \le n+1$, οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις (4.54), αποτελούν βάση του χώρου $S_3(\varDelta_h)$ των κυβικών splines ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ με βήμα $h = (b - a)/n$.