

2. Επίλυση μη Γραμμικών Εξισώσεων

Ασκήσεις

2.4 Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων, την οποία δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης για την εξίσωση $f(x) = 0$ με $f : [-1, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/2$.

2.6 Έστω ότι για μια συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\exists C > 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq C|x - y|.$$

Αποδείξτε ότι, αν x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της φ , τότε η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, αποκλίνει.

2.7 Έστω $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\varphi \in C^1[a, b]$, $\max_{a \leq x \leq b} |\varphi'(x)| < 1$, και $x^* \in [a, b]$ σταθερό σημείο της φ . Αν $x_0 \in [a, b]$, $x_0 \neq x^*$, $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, τότε αποδείξτε για την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ότι ισχύουν:

- α) Αν για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$, τότε η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει μονότονα προς το x^* .
- β) Αν για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $\varphi'(x) < 0$, τότε το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i , για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

2.8 Έστω $x_0 \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, με

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \exp \frac{x_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει, και το όριό της βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$.

2.9 Έστω $x_0 \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει, και το όριό της βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$.

2.10 Για $x_0 \in [0, 1]$, δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \frac{1}{6}(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει, και το όριό της x^* βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$.

Αποδείξτε επίσης ότι ισχύει

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N},$$

όπου $\alpha := (8 - e)/6$.

2.11 Για $x_0 \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$,

$$x_{n+1} := \cos(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

συγκλίνει προς το μοναδικό σταθερό σημείο x^* του συνημιτόνου, και ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1 - (x^*)^2}.$$

2.18 Έστω $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, x^* ένα σταθερό σημείο της, και έστω ότι η φ είναι $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^* . Έστω ότι

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0,$$

αλλά ότι $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$. Θεωρήστε την ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Αποδείξτε ότι, για x_0 αρκετά κοντά στο x^* , η ακολουθία συγκλίνει στο x^* και ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*),$$

δηλαδή ότι η τάξη σύγκλισης της είναι ακριβώς p .

2.19 α) *Μέθοδος του Νεύτωνα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας.* Γράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την προσέγγιση της θετικής ρίζας της εξίσωσης $f(x) := x^2 - \alpha = 0$, όπου $\alpha > 0$, δηλαδή του αριθμού $\sqrt{\alpha}$, και αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) , $n \geq 0$, των

προσεγγίσεων συγκλίνει στη \sqrt{a} για κάθε $x_0 > 0$. (Σημειώστε ότι ο υπολογισμός των όρων της ακολουθίας δεν απαιτεί την εξαγωγή τετραγωνικών ριζών.)

β) Μέθοδος του Νεύτωνα για τον υπολογισμό του αντιστρόφου ενός αριθμού. Γράψτε τη μέθοδο του Νεύτωνα για την προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) := a - 1/x = 0$, όπου $a \neq 0$, δηλαδή του αριθμού $1/a$, και διερευνήστε για ποιες αρχικές τιμές x_0 η ακολουθία (x_n) , $n \geq 0$, συγκλίνει. (Σημειώστε ότι ο υπολογισμός των όρων x_n της ακολουθίας δεν απαιτεί διαιρέσεις. Συγκρίνετε επίσης με την Άσκηση 2.13.)

2.25 Έστω ότι ο πραγματικός αριθμός x^* είναι ρίζα πολλαπλότητας m μιας αρκετά ομαλής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρήστε την εξής παραλλαγή της μεθόδου του Νεύτωνα:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Αποδείξτε ότι για x_0 αρκετά κοντά στο x^* η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x^* και ότι έχει τάξη σύγκλισης $p = 2$.

2.31 Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και x^* το όριό της. Υποθέτουμε ότι η τάξη σύγκλισής της είναι $p > 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n := x_{2n}$, συγκλίνει επίσης στο x^* και ότι η τάξη σύγκλισής της είναι (τουλάχιστον) p^2 .

2.32 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και x^* ρίζα της f . Έστω $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε το x^* να είναι σταθερό σημείο της. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} := \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, συγκλίνει στο x^* και η τάξη σύγκλισής της είναι $p > 1$. Κατασκευάζουμε τώρα μια “άλλη” επαναληπτική μέθοδο για την προσέγγιση του x^* ως εξής: Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \varphi$, δηλαδή $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(\varphi(x))$. Με $\tilde{x}_0 := x_0$ αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\tilde{x}_{n+1} := \tilde{\varphi}(\tilde{x}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, συγκλίνει στο x^* και η τάξη σύγκλισής της είναι p^2 . Πόσοι υπολογισμοί τιμών της φ σε κάποιο σημείο ανά βήμα απαιτούνται για κάθε μία από τις “δύο” αυτές μεθόδους;

[Υπόδειξη: Παρατηρήστε κατ’ αρχάς ότι $\tilde{x}_n = x_{2n}$.]

2.33 (Άλλη απόδειξη της Πρότασης 2.3.)

α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και ρ σταθερό σημείο της φ .

Για $x_n \in \mathbb{R}$ θέτουμε $x_{n+1} := \varphi(x_n)$. Αποδείξτε ότι αν η φ' είναι θετική στα σημεία μεταξύ x_n και ρ , τότε οι αριθμοί $x_n - \rho$ και $x_{n+1} - \rho$ είναι ομόσημοι, ενώ αν η φ' είναι αρνητική, τότε οι αριθμοί $x_n - \rho$ και $x_{n+1} - \rho$ είναι ετερόσημοι. [Βλ. και την Άσκηση 2.7.]

β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x . Έστω ρ ρίζα της $f(x) = 0$.

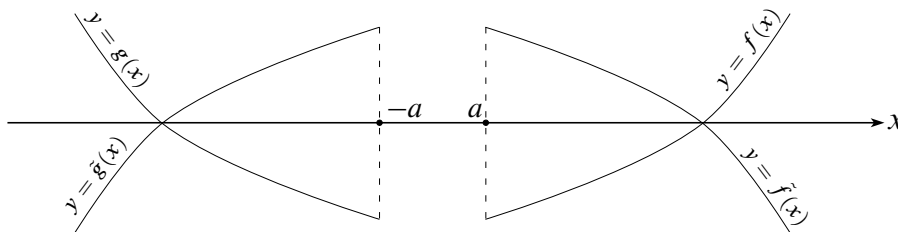
Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{R}$, η ακολουθία που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη ρίζα ρ .

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) για να αποδείξετε ότι αν $x_0 < \rho$, ισχύει $x_1 > \rho$, και αν $x_n > \rho$, ισχύει επίσης $x_{n+1} > \rho$. Αποδείξτε ακόμα ότι για $n \geq 1$ ισχύει πάντοτε $\rho \leq x_{n+1} \leq x_n$. Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει, και εν συνεχεία ότι το όριό της είναι ο αριθμός ρ .]

2.34 Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα οποιοδήποτε διάστημα και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in I$, η ακολουθία των προσεγγίσεων που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ είναι καλά ορισμένη.

- α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) := -f(x)$. Βεβαιωθείτε ότι, για την ίδια αρχική προσέγγιση $x_0 \in I$, η μέθοδος του Νεύτωνα παράγει την ίδια ακολουθία προσεγγίσεων για τις συναρτήσεις f και \tilde{f} , δηλαδή για τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $\tilde{f}(x) = 0$.
- β) Θεωρούμε το διάστημα $J := \{x \in \mathbb{R} : -x \in I\}$ και τη συνάρτηση $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := f(-x)$. Με τον συμβολισμό στο α), αν η αρχική προσέγγιση είναι αυτή τη φορά $-x_0$, βεβαιωθείτε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα παράγει την ακολουθία προσεγγίσεων $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ για τη συνάρτηση g .
- γ) Τι μπορείτε να πείτε για την ακολουθία προσεγγίσεων που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα για τη συνάρτηση $\tilde{g} : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) := -f(-x) = -g(x)$;

Βλέπε και το Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Σχηματική επεξήγηση της σχέσης μεταξύ των συναρτήσεων της Άσκησης 2.34.

2.35 Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $f(a) > 0$ και $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, για κάθε $x \geq a$. Αποδείξτε ότι, για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 \geq a$, η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\rho > a$ της f .

Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $f : (-\infty, -a] \rightarrow \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι είτε $f(-a) < 0$ και $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, είτε $f(-a) > 0$ και $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, για κάθε $x \leq -a$. Αποδείξτε και πάλι ότι, για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \leq -a$, η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη μοναδική ρίζα $\rho < -a$ της f .

[Υπόδειξη: Εφαρμόστε την Πρόταση 2.3 στις συναρτήσεις \tilde{f}, g και \tilde{g} της Άσκησης 2.34.]

2.36 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και ρ ρίζα της $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι είτε α) $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$, είτε β) $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$, είτε γ) $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$, είτε δ) $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x_0 \in \mathbb{R}$, η ακολουθία που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη ρίζα ρ .

[Υπόδειξη: Στην περίπτωση α) εργαστείτε όπως στην Πρόταση 2.3 ή την Άσκηση 2.33. Οι άλλες περιπτώσεις ανάγονται στην προηγούμενη· βλ. την Άσκηση 2.35.]

2.37 Έστω $x^* \in \mathbb{R}$ και $p > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : (x^* - 1, x^* + 1) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) := x^* + |x - x^*|^p$. Βεβαιωθείτε ότι, για $x_0 \in (x^* - 1, x^* + 1)$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με $x_{n+1} := \varphi(x_n), n \in \mathbb{N}_0$, είναι καλά ορισμένη, συγκλίνει στο x^* και η τάξη σύγκλισής της είναι ακριβώς p .

[Σημείωση: Στην προκειμένη περίπτωση, αν ο p δεν είναι φυσικός αριθμός, η συνάρτηση φ δεν είναι αρκετά ομαλή. Γιαντό η τάξη σύγκλισης της ακολουθίας δεν είναι αναγκαστικά φυσικός αριθμός· συγκρίνετε με την Άσκηση 2.18.]