26

Άσκηση 3.1

$U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικοί

ΝΔΟ: UW άνω τριγωνικός

$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} W_{kj} =$$

$$= \underbrace{U_{i1}}_{=0} W_{1j} + \underbrace{U_{i2}}_{=0} W_{2j} + \ldots + \underbrace{U_{i,i-1}}_{=0} W_{i-1} +$$

$$+ U_{ii} W_{ij} + \ldots + U_{in} W_{nj} =$$

$$= U_{ii} W_{ij} + \ldots + U_{in} W_{nj}$$

Έστω $i > j$. Τότε $W_{ij} = \ldots = W_{nj} = 0$, οπότε

$$(UW)_{ij} = U_{ii} \underbrace{W_{ij}}_{=0} + \ldots + U_{in} \underbrace{W_{nj}}_{=0} = 0$$

Άρα ο πίνακας UW είναι άνω τριγωνικός.

$U \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος

ΝΔΟ: U^{-1} άνω τριγωνικός

$Ux = e^k$, $(e^k)_i = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{θέση } k$$

$\Rightarrow x_n = x_{n-1} = \ldots = x_{k+1} = 0$

Το x είναι η k στήλη του U^{-1}.

Άρα ο U^{-1} είναι της μορφής:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

δηλαδή U^{-1} άνω τριγωνικός

$A(u^1, u^2, \ldots, u^n) = I \Leftrightarrow$
$Au^k = e^k, \quad k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$
$A^{-1} = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$

Άσκηση 3.3

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος
$b \in \mathbb{R}^{n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$
- $A^{-4}b$
- $A^{-1}BA^{-1}b$

α) $x = A^{-4}b \iff A^{4}x = b \iff$

$$A(\underbrace{A^{3}x}_{y}) = b$$

Υπολογίζουμε το y από τη σχέση $Ay = b$

$A^{3}x = y \leftarrow$ δεδομένο $\iff$

$$A(\underbrace{A^{2}x}_{w}) = y$$

$A^{2}x = w \iff$

$$A(\underbrace{Ax}_{v}) = w$$

Λύνουμε τα γραμμικά συστήματα
(με τον ίδιο πίνακα):

$Ay = b \rightsquigarrow y$
$Aw = y \rightsquigarrow w$
$Av = w \rightsquigarrow v$
$Ax = v \rightsquigarrow x$

Τότε

$$A^4 x = A^3 (A x) = A^3 v = A^2 (A v) = A^2 w =$$

$$= A (A w) = A y = b$$

Άρα $A^4 x = b$, οπότε $x = A^{-4} b$

β) $x = A^{-1} B A^{-1} b \Longleftrightarrow A x = B \underbrace{A^{-1} b}_{y}$

$y = A^{-1} b \Longleftrightarrow A y = b$

Λύνουμε το σύστημα $Ay = b$ και το $Ax = By$

Τότε

$$x = A^{-1} B A^{-1} b$$

Άσκηση 3.6

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{i+1,i} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{n,i} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i = 1, \ldots, n$

ΝΔΟ:

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -a_{i+1,i} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & -a_{n,i} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i = 1, \ldots, n$

<u>Υπόδειξη:</u> $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$AB = A + B - I_n + \underbrace{(A - I_n)(B - I_n)}_{AB - A - B + I_n}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Για $i \leq j$, τότε

$$(A_i - I_n)(A_j - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots \\ & & \vdots & \\ 0 & & a_{n,i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & a_{j+1,j} & \ddots \\ & & \vdots & \\ 0 & & a_{n,j} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Άρα $A_i A_i^{-1} = A_i + A_i^{-1} - I_n + \underbrace{(A_i - I_n)(A_i^{-1} - I_n)}_{=0} =$

$$= \underbrace{A_i + A_i^{-1}}_{=2I_n} - I_n = I_n$$

Για $j > i$: $A_i A_j = A_i + A_j - I_n + \underbrace{(A_i - I_n)(A_j - I_n)}_{=0} =$

$$= A_i + A_j - I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & a_{j+1,j} & \\ 0 & & a_{n,i} & a_{n,j} & 1 \end{pmatrix}$$

(32)

★★ **Άσκηση 3.7**

Υπόθεση: α) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

β) $A = LU$ (δηλαδή $P = I_n$)

ΝΔΟ: Η ανάλυση LU είναι μοναδική

Απόδειξη

$A = LU = \tilde{L}\tilde{U}$

όπου $L, \tilde{L}$ κάτω τριγωνικοί με μονάδες στη διαγώνιο και $U, \tilde{U}$ άνω τριγωνικοί.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\tilde{L} = L$ και $\tilde{U} = U$

$LU = \tilde{L}\tilde{U}$

$L, U, \tilde{L}, \tilde{U}$ αντιστρέψιμοι

$LU = \tilde{L}\tilde{U}$

$\Rightarrow \tilde{L}^{-1}LU = \tilde{L}^{-1}\tilde{L}\tilde{U}$

$\Rightarrow \tilde{L}^{-1}LU = \tilde{U}$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{L}^{-1}L = \tilde{U}U^{-1}}$

κάτω τριγωνικός άνω τριγωνικός

Άρα:

$$\tilde{L}^{-1} L = \tilde{U} U^{-1} = D = diag(d_{11}, \dots, d_{nn})$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $D = I_n$

Έχουμε:

$$\tilde{L}^{-1} L = D$$

$$\Rightarrow L = \tilde{L} D$$

$$\Rightarrow \underbrace{L_{ii}}_{=1} = \underbrace{\tilde{L}_{ii}}_{=1} d_{ii}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow d_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \boxed{D = I_n}$$

$$\tilde{L}^{-1} L = I_n \Rightarrow L = \tilde{L} I_n = \tilde{L}$$

$$\tilde{U} U^{-1} = I_n \Rightarrow \tilde{U} = I_n U = U$$

Άσκηση 3.10

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = (a_{ij})$ τέτοια ώστε
$\delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$ με

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,n} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

δ_i, $i = 1, \dots, n-1$ ονομάζονται κύριες ορίζουσες του A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Υπόθεση</u>: $\delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$

ΝΔΟ: $A = LU$

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα $n-1$ βήματα της τριγωνοποίησης του A με απαλοιφή Gauss γίνονται χωρίς πρόβλημα, δηλαδή $a_{ii}^{(i)} \neq 0,\ i=1,\dots,n-1$

$\underline{i=1}$: $a_{11} = \delta_1 \neq 0$

Άρα το πρώτο βήμα γίνεται χωρίς πρόβλημα.

Επαγωγή: $i-1 \to i$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i \neq 0$$

$$\Rightarrow a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{ii}^{(i)} = \delta_i \neq 0$$

$$\Rightarrow a_{ii}^{(i)} \neq 0$$

36

Άσκηση 3.11

$A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο

ΝΔΟ: α) A αντιστρέψιμος
(χωρίς την ανισότητα του Gerschgorin)

β) $A = LU$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i=1,\dots,n$$

α) $Ax = 0 \Rightarrow (Ax)_i = 0, \quad i=1,\dots,n$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow |a_{ii}|\,|x_i| = \Big|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \quad , \quad i=1,\dots,n$$

$$(*) \quad |a_{ii}|\,|x_i| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|, \quad i=1,\dots,n$$

Υπόθεση: $x \neq 0$

Επιλέγουμε ℓ τέτοιο ώστε

$$|x_\ell| = \max_{1\le j\le n} |x_j|, \quad x_\ell \neq 0$$

Για $i=\ell$ η $(*)$ δίνει:

$$|a_{\ell\ell}|\,|x_\ell| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \underbrace{|x_j|}_{\le |x_\ell|} \le$$

$$\le \Big(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne \ell}}^{n} |a_{\ell j}|\Big)|x_\ell|$$

$$\Rightarrow |a_{\ell\ell}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne \ell}}^{n} |a_{\ell j}|$$

Συμπέρασμα: $x=0$, οπότε A αντιστρέψιμος

β) Έστω $i \in \{1,\dots,n-1\}$, τότε:

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \neq 0$$

Πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο

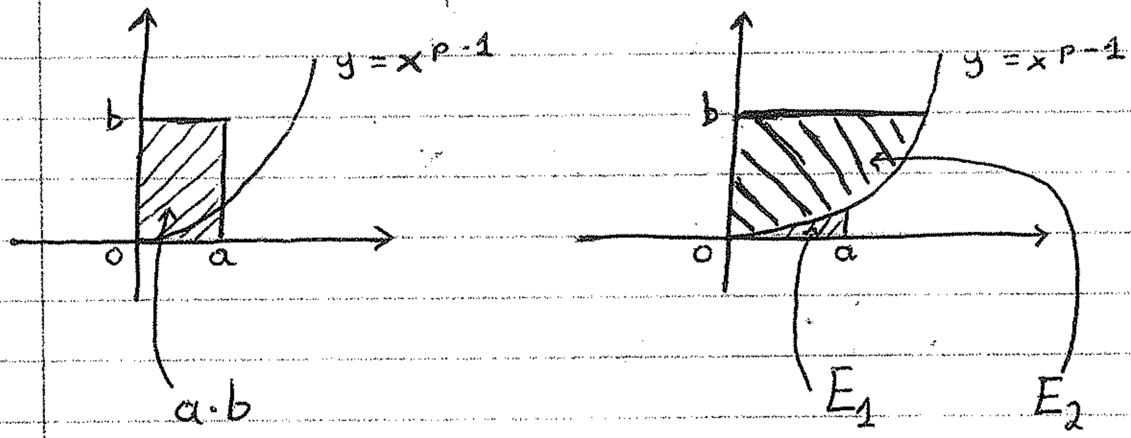
Άσκηση 3.23

α) Για $1 < p, q < +\infty$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $a, b \geq 0$, τότε ΝΔΟ: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $b = a^{p-1}$

Ανισότητα του Young

Γεωμετρική ερμηνεία



$$E_1 = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy = \frac{b^{\frac{q}{p}+1}}{\frac{q}{p}+1} = \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

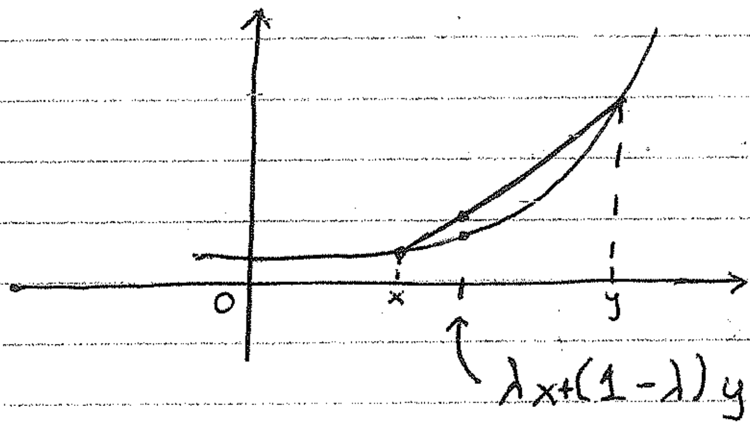
$$\Longrightarrow \frac{1}{p-1} = \frac{q}{p}$$

Υπόδειξη

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή

Τότε $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall \lambda \in [0,1]$:

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$



$\varphi(t) = e^t$, $x = \ln a^p$, $y = \ln b^q$, $\lambda = \frac{1}{p}$

$$e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} \iff$$

$$e^{\ln a + \ln b} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \iff$$

$$e^{\ln(ab)} \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

β) $1 \le p < +\infty$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ για } x \in \mathbb{C}^n.$$

Αν $x, y \in \mathbb{C}^n$, τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q$$

Ανισότητα του Hölder

(Για $p=2$ η ανισότητα αυτή είναι η ανισότητα των Cauchy-Schwarz)

• Για $x=0$ ή $y=0$:

Τετριμμένη

• Για $p=1$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|y\|_\infty =$$

$$= \|y\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|y\|_\infty \|x\|_1$$

• Για $p>1$, $x \ne 0$, $y \ne 0$

i) $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_q = 1$

$$|x_i y_i| \le \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q =$$

$$= \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

ii) $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_q \neq 0$, $(\|\tilde{x}\|_p = 1)$

Θέτουμε:

$$\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|_p} \cdot x$$

$$\tilde{y} := \frac{1}{\|y\|_p} \cdot y$$

Τότε, σύμφωνα με το i):

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1$$

Άρα:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|x\|_p} |x_i| \frac{1}{\|y\|_q} |y_i| \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$$

(42)

γ) <u>ΝΔΟ</u>: $1 \le p < +\infty$ η $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα.

<u>Υπόθεση</u>: $p > 1$

(N1), (N2) τετριμμένα

(N3): $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$

<u>Ανισότητα του Minkowski</u>

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p =$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i + y_i|}_{\le |x_i| + |y_i|} \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \le$$

$$\le \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1})^q \right)^{1/q} +$$

Hölder

$$+ \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$\|x+y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\iff (p-1)q = p$$

Οπότε:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/p}}_{=\|x+y\|_p}\right)^{p-1}=$$

$$=\|x+y\|_p^{p-1}$$

Άρα:

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p+\|y\|_p)\,\|x+y\|_p^{p-1} \Longleftrightarrow$$

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$$

(44)

δ) $1 \leq p < q \leq +\infty$ και $x \in \mathbb{C}^n$

<u>ΝΔΟ</u>: $\|x\|_q \leq \|x\|_p$

<u>Ανισότητα του Jensen</u>

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|x\|_q = \|x\|_p$

<u>Απόδειξη</u>

• <u>Για $q = +\infty$:</u>

$|x_i| \leq \|x\|_p$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|}_{= \|x\|_\infty} \leq \|x\|_p$$

• <u>Για $1 < q < +\infty$:</u>

$$|x_i|^q = |x_i|^p \cdot \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_p}^{q-p} \leq$$

$$\leq |x_i|^p \cdot \|x\|_p^{q-p}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^q}_{= \|x\|_q^q} \leq \|x\|_p^{q-p} \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{= \|x\|_p^p}$$

$$\|x\|_q^q \leq \underbrace{\|x\|_p^{q-p} \cdot \|x\|_p^p}_{= \|x\|_p^q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|x\|_q \leq \|x\|_p}$$

Άσκηση 3.24

$\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

<u>Λύση</u>: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \le$$

$$\le \|x\|_\infty + \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty =$$

$$= n\|x\|_\infty$$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: $\|x\|_1 = n$, $\|x\|_\infty = 1$,
δηλαδή $\|x\|_1 = n\|x\|_\infty$

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$

$$\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \le$$

$$\le n\|x\|_\infty^2$$

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: $\|x\|_2 = \sqrt{n}$, $\|x\|_\infty = 1$,
δηλαδή $\|x\|_2 = \sqrt{n}\|x\|_\infty$

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{n}\|x\|_2$$

(46)

Για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: $\|x\|_1 = n$, $\|x\|_2 = \sqrt{n}$,

δηλαδή $\|x\|_1 = \sqrt{n}\,\|x\|_2$.

Ασκηση 3.63

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi:

$G_J = -D^{-1}(L+U)$

$D^{-1} = I_3$

$\Rightarrow G_J = -(L+U) \Leftrightarrow$

$$G_J = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) =$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & \frac{7}{2} \\ -1 & -\lambda & -\frac{7}{4} \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \ldots = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$

$p(G_J) = \max|\lambda_i| = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ σύγκλιση!

<u>Gauss - Seidel:</u>

$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U =$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{21}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{7}{4}$

$p(G_{GS}) = 2 \geq 1$

$\Rightarrow$ γενικά απόκλιση!

Άσκηση 3.64

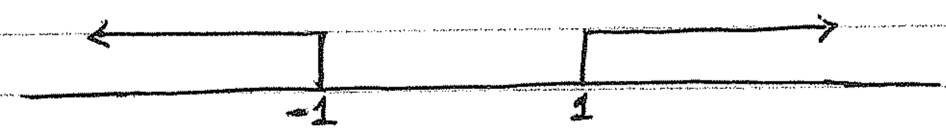
$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi:

$$G_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda)=-\lambda^3+\frac{11}{6}\lambda-\frac{7}{6}$$



$$\left.\begin{array}{l} p(-1)=-2 \\ \lim\limits_{\lambda\to-\infty} p(\lambda)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Υπάρχει ρίζα λ_1 του p τέτοια ώστε $\lambda_1<-1$

$\Rightarrow \rho(G_J)>1$

$\Rightarrow$ απόκλιση!

50

Gauss - Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$

$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ σύγκλιση!

Άσκηση 3.35

$\|\cdot\|$ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$: $\|A\| < 1$

ΝΔΟ: $I_n - A$ αντιστρέψιμος

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

$(I_n - A)x = 0 \Leftrightarrow x = Ax \Leftrightarrow$

$\|x\| = \|Ax\|$

$\Rightarrow \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Αν $x \neq 0$, $1 \leq \|A\|$, άτοπο

Αποδείξαμε ότι:

$(I_n - A)x = 0 \Rightarrow x = 0$

Άρα $I_n - A$ αντιστρέψιμος

$1 = \|I_n\| = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\|$

Άρα:

$$1 = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\| \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \underbrace{\|I_n - A\|}_{\leq \|I_n\| + \|A\| = 1 + \|A\|}$$

52

$$1 \le \|(I_n - A)^{-1}\| \, (1 + \|A\|)$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\| \iff$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1}A\| \ge$$

$$\ge \|(I_n - A)^{-1}\| - \underbrace{\|(I_n - A)^{-1}A\|}_{\le \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \|A\|}$$

$$\ge \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \|A\| =$$

$$= \|(I_n - A)^{-1}\| \, \underbrace{(1 - \|A\|)}_{>0}$$

Άσκηση 3.31

α) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\|A\|_{max} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Είναι φυσικές νόρμες;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{max} = 2$$

Ιδιοτιμές του A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 =$$

$$= (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) =$$

$$= (-1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\rho(A) = 3$$

Άρα: $\|A\|_{max} < \rho(A)$

Επομένως, δεν είναι φυσική νόρμα.

54

$$\|I_n\|_E = \sqrt{n} \neq 1$$

Επομένως, δεν είναι φυσική νόρμα.

β) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$

$(\|A\|_2 \leq \|A\|_E)$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} ((Ax)_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2 \leq$$

$$\underset{CS}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x_j)^2}_{=\|x\|_2^2} \right) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2 =$$

$$= \|A\|_E^2 \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2}$$