

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΠΡΩΤΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

• Προσέγγιση του π .

Είναι από γεωμετρικής απόψεως σαφές (και αποδείχτηκε εν μέρει στο μάθημα) ότι οι ακολουθίες $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n \geq 2}$,

$$a_n := 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_n := 2^n \tan \frac{\pi}{2^n}, \quad n \geq 2,$$

συγκλίνουν μονότονα προς το π , η πρώτη μάλιστα εξ αυτών είναι γνησίως αύξουσα ενώ η δεύτερη γνησίως φθίνουσα· βλ. Παράδειγμα 1.2 και Άσκηση 1.6.

Οι όροι αυτών των ακολουθιών μπορούν να υπολογισθούν (χωρίς να χρησιμοποιείται η τιμή του π), με ευσταθή τρόπο, αναδρομικά με τους εξής τύπους

$$(a) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - (2^{-n}a_n)^2}}} a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(b) \quad b_2 = 4, \quad b_{n+1} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (2^{-n}b_n)^2}} b_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Προσδιορίστε όσο το δυνατόν καλύτερες προσεγγίσεις του π μπορείτε, υπολογίζοντας, με ένα πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran ή σε Matlab, σε διπλή ακρίβεια, όρους των ανωτέρω ακολουθιών.

Ορίζουμε τώρα τις ακολουθίες

$$c_n := \frac{1}{3}(2a_n + b_n), \quad d_{n+1} := \frac{1}{3}(4a_{n+1} - a_n), \quad e_{n+1} := \frac{1}{15}(16d_{n+1} - d_n),$$

οι οποίες συγκλίνουν επίσης, προφανώς, στο π . Υπολογίστε όρους και αυτών των ακολουθιών για να προσεγγίσετε το π .

Ποιες ακολουθίες δίνουν καλύτερα αποτελέσματα, δηλαδή ακριβέστερες προσεγγίσεις του π για τον ίδιο δείκτη n ;

Παράδοση

- Θα παραδώσετε ένα πρωτόκολλο με το πρόγραμμά σας και τα αποτελέσματα. Επίσης, κατά την παράδοση θα κληθείτε να εξηγήσετε πώς ακριβώς δουλεύει το πρόγραμμά σας, τι κάνει σε κάθε βήμα, να το τρέξετε στον υπολογιστή κ.λπ.
- Το πρόγραμμά σας πρέπει να περιέχει πολλά σχόλια, ώστε να μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει τι ακριβώς γίνεται σε κάθε βήμα.
- Κάθε φοιτητής πρέπει να ετοιμάσει το δικό του πρόγραμμα.
- Η παράδοση της πρώτης εργαστηριακής Άσκησης θα γίνει στο χρονικό διάστημα από την Τετάρτη, 2–5–2012, έως την Παρασκευή, 11–5–2012, είτε σε έναν από τους βοηθούς, στην κα. Ανθή Αναστασίου ή στον κ. Γρηγόρη Πιπεράγκα, είτε στον διδάσκοντα.