3. Γραμμικά Συστήματα

Ασκήσεις

3.1 Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Επίσης, στην περίπτωση που ένας άνω τριγωνικός πίνακας $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε για τη λύση $x \in \mathbb{R}^n$ του συστήματος $Ux = e^k$, με $e^k \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα με συνιστώσα ένα στη θέση k και όλες τις άλλες συνιστώσες μηδέν, ισχύει $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, συνεπώς και ο αντίστροφος του U είναι άνω τριγωνικός. Ανάλογα για κάτω τριγωνικούς πίνακες.

3.3 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A αντιστρέψιμος και $b \in \mathbb{R}^n$. Πώς υπολογίζουμε, κατά το δυνατόν οικονομικότερα από άποψης πλήθους πράξεων και μνήμης, τα διανύσματα $A^{-4}b$, $A^{-1}BA^{-1}b$;

3.6 Θεωρούμε κάτω τριγωνικούς πίνακες A_i, $i = 1, \dots, n-1$, με μονάδες στη διαγώνιο και μηδενικά στις άλλες θέσεις που δεν δίνονται στοιχεία, της μορφής

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & a_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Βεβαιωθείτε ότι

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -a_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$

και, για $i < j$,

$$A_iA_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & \vdots & & a_{j+1,j} & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & a_{ni} & & a_{nj} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια για γινόμενα με τρεις παράγοντες, $A_iA_jA_k$, με $i < j < k$, κ.λπ.
[*Υπόδειξη*: Βεβαιωθείτε ότι για $i \le j$ ισχύει $(A_i - I_n)(A_j - I_n) = 0$, και, γενικά για $n \times n$ πίνακες, $AB = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$.]

3.7 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και τέτοιος ώστε κατά την απαλοιφή του Gauss για την επίλυση συστημάτων της μορφής $Ax = b$ να μην χρειάζονται εναλλαγές γραμμών. Τότε, κατά την (3.14), ο A αναλύεται σε γινόμενο $A = LU$, όπου L κάτω τριγωνικός τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικός. Αποδείξτε ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική, δηλαδή δεν υπάρχει ζεύγος πινάκων $\widetilde{L}, \widetilde{U}$ διαφορετικό του L, U, με $\widetilde{L}$ κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και $\widetilde{U}$ άνω τριγωνικό, τέτοιο ώστε $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.

3.8 Βεβαιωθείτε ότι, για κάθε πραγματικόν αριθμό α,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή ότι η ανάλυση LU μη αντιστρέψιμων πινάκων δεν είναι γενικά μοναδική.

3.10 Μια κατηγορία πινάκων για τους οποίους η ανάλυση LU μπορεί να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών (δηλαδή για τους οποίους $P = I$ στη σχέση $PA = LU$), είναι οι πίνακες $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, των οποίων οι πρώτες $n - 1$ κύριες ορίζουσες δ_i, που ορίζονται ως

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

είναι όλες διάφορες του μηδενός. Αν A είναι ένας τέτοιος πίνακας, αποδείξτε με επαγωγή ότι $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, $1 \le i \le n-1$, χωρίς εναλλαγές γραμμών. Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι $P = I$. Μάλιστα, για αντιστρέψιμους πίνακες A η συνθήκη αυτή είναι και αναγκαία.

[*Υπόδειξη*: Βεβαιωθείτε ότι $\delta_i = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{ii}^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, βλ. Παρατήρηση 3.2, οπότε $a_{ii}^{(i)} = \delta_i/\delta_{i-1}$.]

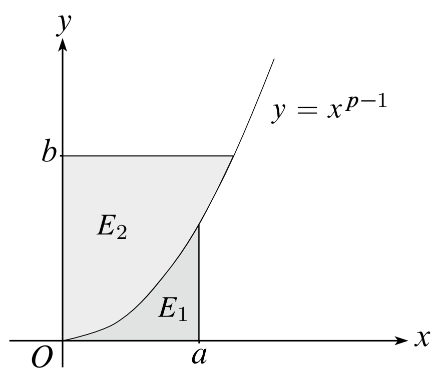
3.11 Έστω ότι ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλαδή ότι ισχύουν οι ανισότητες (3.68). Αποδείξτε απ' ευθείας (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα του Gerschgorin), ότι αν ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, τότε το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $x = 0$, δηλαδή ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 3.10, αποδείξτε ότι η ανάλυση LU ενός πίνακα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο μπορεί να επιτευχθεί χωρίς εναλλαγές γραμμών.

3.23 α) Έστω $1 < p, q < \infty$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και a, b μη αρνητικοί αριθμοί. Αποδείξτε την *ανισότητα του Young*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Βεβαιωθείτε ότι αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα μόνο στην περίπτωση $b = a^{p-1}$.



Σχήμα 3.3: Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας του Young: Το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών a και b δεν υπερβαίνει το άθροισμα των εμβαδών E_1 και E_2 των γκρι χωρίων του σχήματος.

[Γεωμετρική ερμηνεία, βλ. Σχήμα 3.3: Προφανώς

$$E_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p} \quad \text{και} \quad E_2 = \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}\,dy = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών a και b δεν υπερβαίνει το άθροισμα των E_1 και E_2.]

[*Υπόδειξη*: Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε, για $x, y \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in [0, 1]$ ισχύει

$$\varphi\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Για θετικούς a και b, επιλέξτε $\varphi(t) := \mathrm{e}^t$, $x := \ln a^p$, $y := \ln b^q$ και $\lambda := \frac{1}{p}$.]
β) Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε την απεικόνιση $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{C}^n$. Αποδείξτε την *ανισότητα του Hölder* για αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q, \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

[*Υπόδειξη*: Για $p = 1$ (οπότε $q = \infty$ και $\|\cdot\|_\infty$ η νόρμα μεγίστου) η ανισότητα είναι προφανής. Έστω λοιπόν $p > 1$. Έστω ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Στην περίπτωση $\|x\|_p = 1$ και $\|y\|_q = 1$, αθροίστε από $i = 1$ έως $i = n$ τις ανισότητες

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q},$$

οι οποίες ισχύουν σύμφωνα με την ανισότητα του Young. Η γενική περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, θέτοντας

$$\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|_p} x \quad \text{και} \quad \tilde{x} := \frac{1}{\|y\|_q} y.]$$

γ) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_p$ ορίζει μια νόρμα στον $\mathbb{C}^n$.
[*Υπόδειξη*: Προφανώς, $|x_i+y_i|^p \leq |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}+|y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$. Για $p > 1$ χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Hölder για αθροίσματα για να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα. Η τριγωνική ανισότητα στην προκειμένη περίπτωση λέγεται *ανισότητα του Minkowski.*]
δ) Έστω $1 \leq p < q \leq \infty$ και $x \in \mathbb{C}^n$. Αποδείξτε την *ανισότητα του Jensen*

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Παρατηρήστε ότι για $x = e^1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^n$ η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα, συνεπώς η σταθερά δεν μπορεί να βελτιωθεί.
[*Υπόδειξη*: Προφανώς, $|x_i| \leq \|x\|_p$, $i = 1, \dots, n$. Ιδιαίτερα, το αποτέλεσμα ισχύει για $q = \infty$. Επομένως, για $q < \infty$ έχουμε

$$|x_i|^q = |x_i|^p \, |x_i|^{q-p} \leq |x_i|^p \, \|x\|_p^{q-p}$$

και αθροίζοντας οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα.]

3.24 Προσδιορίστε τις βέλτιστες σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη των νορμών $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ του $\mathbb{R}^n$.

3.25 Έστω $1 \le p < q < \infty$. Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Hölder για αθροίσματα, βλ. Άσκηση 3.23, για να αποδείξετε ότι

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q .$$

Παρατηρήστε ότι για $x = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{C}^n$ η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα. Συνδυάζοντας με την ανισότητα του Jensen οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|x\|_q \le \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q$$

και οι σταθερές σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι βέλτιστες.

3.26 Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι για $p \in [1, \infty)$ ισχύει $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p} \|x\|_\infty$, και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,$$

γεγονός που εξηγεί και τον συμβολισμό $\|\cdot\|_\infty$.

3.30 Αποδείξτε ότι στον Ορισμό 3.5 το supremum για $x \neq 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από το supremum πάνω σε ορισμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα αποδείξτε ότι

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| \le 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|.$$

3.31 α) Ορίζουν οι ποσότητες

$$\|A\|_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad \|A\|_E = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{1/2}$$

φυσικές νόρμες πινάκων $A \in \mathbb{R}^{n,n}$;

β) Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|Ax\|_2 \le \|A\|_E \, \|x\|_2$.

3.32 Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός, αποδείξτε ότι

$$\|A\|_2 = \max_i \big|\lambda_i(A)\big|,$$

όπου $\lambda_i(A)$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

3.35 Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και $\|\cdot\|$ η νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$ που παράγεται από αυτή. Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $\|A\| < 1$, αποδείξτε ότι ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος, και επί πλέον ότι ισχύει

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \le \big\|(I_n - A)^{-1}\big\| \le \frac{1}{1 - \|A\|} .$$

3.36 α) Ορίστε την ποσότητα $\|A\|_E$, όπως στην Άσκηση 3.31. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ισχύει

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2.$$

(Σημειώστε ότι για $A = I_n$ η δεύτερη ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Επίσης για $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με μη μηδενικό στοιχείο μόνο στη θέση $(1,1)$, η πρώτη ανισότητα ισχύει ως ισότητα.)
β) Προσδιορίστε σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη νορμών πινάκων από τις $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$.
γ) Αν $\kappa_2(A)$, $\kappa_1(A)$ είναι οι δείκτες κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα A ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_1$, αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{n}\,\kappa_1(A) \leq \kappa_2(A) \leq n\,\kappa_1(A).$$

Βρείτε ανάλογες "ανισότητες σύγκρισης" μεταξύ των δεικτών κατάστασης $\kappa_2(A)$ και $\kappa_\infty(A)$.
3.40 α) Έστω A αντιστρέψιμος άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας. Αποδείξτε ότι για τον δείκτη κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ ισχύει

$$\kappa_\infty(A) \;\geq\; \frac{\|A\|_\infty}{\min\limits_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|}\,.$$

β) Χωρίς να υπολογίσετε τον A^{-1} αποδείξτε ότι για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι $\kappa_\infty(A) \geq 100$.
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το τελευταίο αποτέλεσμα της Άσκησης 3.39 για κατάλληλο μη αντιστρέψιμο πίνακα B.]

3.41 Έστω ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός. Αποδείξτε ότι

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\limits_i |\lambda_i(A)|}{\min\limits_i |\lambda_i(A)|}\,,$$

όπου $\lambda_i(A)$ οι ιδιοτιμές του A.

3.42 Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 10\|x\| \leq \|Ax\| \leq 20\|x\|.$$

Αν $\kappa(A)$ είναι ο δείκτης κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$, αποδείξτε ότι $1 \leq \kappa(A) \leq 2$.

3.50 Αν για κάποια διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ (και την αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα) ισχύει $\|G\| = \sigma < 1$ για τον πίνακα επανάληψης $G = M^{-1}N$ της επαναληπτικής μεθόδου (3.61), τότε ισχύει

$$\left\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\right\| \leq \varepsilon \implies \left\|x^{(N)} - x\right\| \leq \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma}.$$

3.58 Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\|AB\| < 1$ για κάποια φυσική νόρμα του $\mathbb{R}^{n,n}$, αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός ν τέτοιος ώστε

$$\|(BA)^\nu\| < 1.$$

3.60 Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel δεν συγκλίνει για 3×3 συστήματα με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 50 & 25 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.61 Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για 3×3 συστήματα με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.62 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε κατά πόσον η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για κάθε $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ στη λύση x του συστήματος $Ax = b$, $b \in \mathbb{R}^3$.

3.63 Θεωρούμε γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax = b$ με πίνακα συντελεστών

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, ενώ η μέθοδος των Gauss–Seidel γενικά αποκλίνει.

3.64 Θεωρούμε γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax = b$ με πίνακα συντελεστών

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, ενώ η μέθοδος του Jacobi γενικά αποκλίνει. .