

# 1. Αριθμητική Κινητής Υποδιαστολής και Σφάλματα Στρογγύλευσης

## Ασκήσεις

**1.2** Βρείτε κατάλληλους τρόπους υπολογισμού των παρακάτω παραστάσεων, έτσι ώστε να μην χάνεται ακρίβεια, όταν οι πράξεις γίνονται με αριθμητική κινητής υποδιαστολής και πεπερασμένη ακρίβεια.

α)  $1 - \cos x$ , για μικρό  $|x|$ . (Χωρίς ανάπτυγμα Taylor.)

β)  $e^{x-y}$ , για μεγάλα θετικά  $x, y$ .

γ)  $\log x - \log y$ , για μεγάλα θετικά  $x, y$ .

δ)  $\sin(\alpha + x) - \sin \alpha$ , για μικρό  $|x|$ .

ε)  $\arctan x - \arctan y$ , για μεγάλα θετικά  $x, y$ .

**1.3** Θεωρήστε τη δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 - 2\alpha x + \beta = 0$ , όπου  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha^2 \gg \beta$ . Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό των ριζών της.

**1.4** Θεωρήστε την τριτοβάθμια εξίσωση  $x^3 + 3px + 2q = 0$ , όπου  $p, q$  πραγματικοί αριθμοί και  $p^3 + q^2 > 0$ .

α) Αποδείξτε ότι έχει μόνο μία πραγματική ρίζα  $\rho$ , που μάλιστα δίνεται από τον τύπο του *Cardano*:

$$\rho = u - v, \quad \text{όπου} \quad u = (\sqrt{p^3 + q^2} - q)^{1/3}, \quad v = (\sqrt{p^3 + q^2} + q)^{1/3}.$$

β) Αν  $p^3 \gg q^2$ , αποδείξτε ότι ο τύπος του Cardano θα έχει προβλήματα ευστάθειας στους υπολογισμούς.

γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ , δώστε έναν ευσταθή τρόπο υπολογισμού της  $\rho$ .

[Σημειώνουμε ότι ο δευτεροβάθμιος όρος σε μια γενική τριτοβάθμια εξίσωση  $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$  μπορεί να απαλειφθεί με την αντικατάσταση  $x = y + \alpha/3$ .]

**1.6 α)** Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$y_k = 2^k \tan \frac{\pi}{2^k}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο  $\pi$ . (Γεωμετρική ερμηνεία στον μοναδιαίο κύκλο;)

**β)** Αποδείξτε ότι η  $y_k$  παράγεται αναδρομικά από τον αλγόριθμο

$$\begin{cases} y_2 = 4 \\ y_{k+1} = 2^{2k+1} \frac{\sqrt{1 + (2^{-k} y_k)^2} - 1}{y_k}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

**γ)** Αν κάνουμε πράξεις με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με πεπερασμένη ακρίβεια, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος του **β)** είναι ασταθής. Ποια είναι η αιτία της αστάθειας;

**δ)** Βρείτε έναν ευσταθή αλγόριθμο (που απαιτεί μόνο τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής και εξαγωγή τετραγωνικών ριζών) για τον υπολογισμό των  $y_k$ .

**1.7 α)** Έστω, για  $n \geq 3$ ,  $y_n := n \sin \frac{\pi}{n}$  και  $Y_n := n \tan \frac{\pi}{n}$ , αντίστοιχα, η ημιπερίμετρος του κανονικού  $n$ -γώνου που είναι εγγεγραμμένο, αντίστοιχα περιγεγραμμένο, στον μοναδιαίο κύκλο. Αποδείξτε ότι

$$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι ο γραμμικός συνδυασμός  $z_n = \frac{1}{3}(2y_n + Y_n)$  μας δίνει προσέγγιση του  $\pi$  με ακρίβεια  $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ . Επιβεβαιώστε την αυξημένη ακρίβεια του  $z_n$  χρησιμοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα του Πίνακα 1.11.

**β)** Αποδείξτε με ανάλογο τρόπο ότι

$$r_n := \frac{1}{3}(4y_{2n} - y_n) = \pi - \frac{\pi^5}{480n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

και επιβεβαιώστε την τάξη ακρίβειας  $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$  του  $r_n$  ως προσέγγισης του  $\pi$  χρησιμοποιώντας τον Πίνακα ???. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις του  $\pi$  με ακρίβεια  $O\left(\frac{1}{n^6}\right)$ ; (Οι βελτιωμένες προσεγγίσεις  $z_n, r_n$  είναι παραδείγματα μιας γενικότερης διαδικασίας, της λεγόμενης “προέκτασης κατά Richardson” που χρησιμοποιείται συχνά στην αριθμητική ανάλυση.)

**1.12** Θέλουμε να υπολογίσουμε, για δεδομένη (μεγάλη) σταθερά  $\alpha > 1$ , τους όρους της ακολουθίας

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x + \alpha} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε  $\alpha > 0$  η ακολουθία  $(y_n)$  είναι γνησίως φθίνουσα και ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

β) Αποδείξτε ότι, για  $n \geq 1$ ,

$$y_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \alpha^k \frac{(1+\alpha)^{n-k} - \alpha^{n-k}}{n-k} + (-\alpha)^n \log \frac{1+\alpha}{\alpha}.$$

Είναι ο τρόπος αυτός υπολογισμού του  $y_n$  ευσταθής;

γ) Προσδιορίστε αναδρομικό τύπο για τον υπολογισμό του  $y_n$  συναρτήσει του  $y_{n-1}$  και υπολογίστε αναλυτικά το  $y_0$ . Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος που προκύπτει δεν είναι ευσταθής.

δ) Δώστε έναν ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό π.χ. του  $y_{10}$ .

**1.13** Διερευνήστε την κατάσταση του προβλήματος της επίλυσης του συστήματος

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + (1 - \alpha)y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

για πραγματικές τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ .