4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

[1]

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Συμβολισμοί και Παραδείγματα

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$
$n = 0, \dots, N$

Διβηματική Μέθοδος (με παράδειγμα)

① $\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \quad n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$

Άμεση Μέθοδος, πως προκύπτει;
↳ Με αριθμητική διαφόριση

$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

Προσεγγίζουμε $y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$
και έχουμε

$$\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και $y(t^l)$ με y^l
$l = n, n+1, n+2$ και παίρνουμε την μέθοδο

Παράδειγμα: ② $\begin{cases} y^0\ y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = \frac{h}{2}\left[f(t^{n+2}, y^{n+2}) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\right] \\ n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$

Μέθοδος του Simpson

Πως προκυπτει; ⤳ Με αριθμητικη ολοκληρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt.$$

Προσεγγιζοντας το ολοκληρωμα με την μεθοδο του μεσου οδηγουμαστε στην ①

Προσεγγιζοντας το ολοκληρωμα με την μεθοδο του Simpson οδηγουμαστε στην ②

$$\int_c^d \varphi(x)\,dx \approx \frac{d-c}{6}\left[\varphi(c) + 4\varphi\left(\frac{c+d}{2}\right) + \varphi(d)\right]$$

- Τελος Διαλεξης -

ΠΕΜΠΤΗ - 8/12/16

[2] - Αρχη Διαλεξης -

Πολυβηματικες Μεθοδοι:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$N \in \mathbb{N}, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t^n := a + nh \quad n = 0, \dots, N$$

Συμβολισμοι και Παραδειγματα:

Εστω $k \in \mathbb{N}$. Η γενικη k-βηματικη μεθοδος περιγραφεται απο $2k+2$ σταθερες $a_0, \dots, a_k$ $b_0, \dots, b_k$ και ειναι της μορφης $y^0, \dots, y^{k-1}$ δεδομενες

$$a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right], \; n = 0, \dots, N-k$$

Υποθεση: $|a_0|+|b_0|>0 \quad a_k \neq 0$

Πολλαπλασιαζοντας ολους τους συντελεστες $a_0,\dots,a_k$ και $b_0,\dots,b_k$ με τον ιδιο μη μηδενικο αριθμο η μεθοδος δεν αλλαζει
~> Συχνα θα υποθετουμε οτι $a_k=1$

<u>1η Περιπτωση:</u> $b_k=0$

Η μεθοδος ειναι αμεση. Οι προσεγγισεις $y^n,\dots,y^{n+k-1}$ εχουν ηδη υπολογισθει και ο αγνωστος y^{n+k} υπολογιζεται με πραξεις

>Απαιτουμενες πραξεις:
Ενας υπολογισμος της f ανα βημα
(Ολοι οι αλλοι υπολογισμοι εχουν γινει σε προηγουμενα βηματα)

<u>2η Περιπτωση:</u> $b_k \neq 0$

Τοτε η μεθοδος γραφεται στη μορφη
(*) $a_k y^{n+k} = h\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n$
με γνωστο g^n. Η μεθοδος ειναι πεπλεγμενη

>Κοστος ανα βημα: Ενας υπολογισμος της f και επιλυση ενος $m \times m$ συστηματος οπου m τω $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [a,b]$

• <u>Συγκριση με μια πεπλεγμενη Μεθοδο RK με q σταδια:</u>

Εκει, απαιτειται η επιλυση ενος $(qm)\times(qm)$ συστηματος

Συμπερασμα: Οι πολυβηματικες μεθοδοι ειναι πολυ πιο οικονομικες ανα βημα, απο τις μεθοδους RK με $q>1$.

> Υπαρξη και Μοναδικοτητα Προσεγγισεων (για πεπλεγμενες μεθοδους):

Χ.π.χ. $a_k=1$, Η (*) λαμβανει τη μορφη

(**) $y^{n+k}=h b_k f(t^{n+k},y^{n+k})+g^n.$

• Αν η f ικανοποιει τη συνθηκη του Lipschitz τοτε η (**) λυεται μονοσημαντα για h τω $L|b_k|h<1$. (Οπως ειδαμε στην πεπλεγμενη μεθοδο του Euler.)
• Η f ικανοποιει τη μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz
Αν $a_k b_k>0$ τοτε οι προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες χωρις περιορισμο στο h (Επισης οπως ειδαμε στην πεπλεγμενη μεθοδο του Euler).

<u>Μεθοδοι Αναδρομων Διαφορων:</u>

Εστω $P_{n,k}\in \mathbb{P}_k$ τω $P_{n,k}(t^{n+i})=y(t^{n+i})$ $i=0,\dots,k$
δλδ το πολυωνυμο παρεμβολης της y στα σημεια $t^n,\dots,t^{n+k}$. Αντικαθιστωντας στην
$y'(t^{n+k})=f(t^{n+k},y(t^{n+k}))$ την $y'(t^{n+k})$ με $P'_{n,k}(t^{n+k})$ εχουμε

$p'_{n,k}(t^{n+k}) \approx f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$

Αν εδώ αντικαταστήσουμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^{n+i})$ με y^{n+i} $i=0,\dots,n+k$ προκύπτει η κ-βηματική μέθοδος αναδρομών διαφορών

Ειδικές Περιπτώσεις:

> $k=1$: $a_1=1$, $a_0=-1$, $b_1=1$ (Πεπλεγμένη Euler)
> $k=2$: $a_2=3/2$, $a_1=-2$, $a_0=\frac{1}{2}$, $b_2=1$

Γενικά έχουμε $b_k=1$

$b_{k-1}=\dots=b_k=0$ και τα a_i, $i=0,\dots,k$ είναι οι συντελεστές των z^i στο πολυώνυμο

$$\alpha(z)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}z^{k-i}(z-1)^i$$

Άλλα παραδείγματα:

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k}-y^{n+k-1}=h\sum_{i=0}^{k} b_i f(t^{n+i}, y^{n+i}), \ n=0,\dots N-k \end{cases}$$

Τέτοιες μέθοδοι λέγονται μέθοδοι του Adams
Για $b_k=0$ μέθοδοι Adams – Bashforth
Για $b_k\neq0$ » Adams – Moulton

$y^0,\dots,y^{k-1}$ δεδομένα
$$y^{n+k}-y^{n+k+p}=h\sum_{i=0}^{k} b_i f(t^{n+i}, y^{n+i}), \ n=0,\dots,N-k$$

$b_k=0$ μέθοδοι του Nyström
$b_k\neq0$ μέθοδοι των Milne – Simpson

Ευσταθεια:

Υποθεση:

$$(+)\begin{cases} \exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \end{cases}$$

Ορισμος: (Ευσταθεια πολυβηματικων μεθοδων)
Μια k-βηματικη μεθοδος λεγεται ευσταθης αν οταν εφαρμοζεται σε προβληματα αρχικων τιμων με f που ικανοποιει την $(+)$, δινει προσεγγισεις $y^0, \dots, y^N$ και

$$\begin{cases} z^0, \dots, z^{k-1} \text{ δεδομενα} \\ a_k z^{n+k} + \dots + a_0 z^n = h[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, z^n)] \\ n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

για τις οποιες ισχυει $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C \max\limits_{0 \leq j \leq k-1} |y^j - z^j|$

με σταθερα C ανεξαρτητη του h και των y^n, z^n.

Ορισμος: (Συνθηκη των ριζων)

Λεμε οτι μια πολυβηματικη μεθοδος ικανοποιει την συνθηκη των ριζων αν το χαρακτηριστικο πολυωνυμο της, ρ

$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_0$ ικανοποιει την συνθηκη των ριζων

δηλαδη
- $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq 1$
- $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$

δηλαδη ολες οι ριζες του ρ εχουν απολυτη τιμη (μετρο) το πολυ 1, οι δε πολλαπλες απολυτη τιμη γνησια μικροτερη του 1.

Πως ελέγχεται η συνθηκη των ριζων?

- Για μικρο κ βρισκονται τις ριζες
- Για μεγαλα κ υπαρχουν κατάλληλα κριτηρια (που αποφευγουν τον υπολογισμο των ριζων)

Με τη θεωρία εξισωσεων διαφορων αποδεικνυεται οτι η συνθηκη των ριζων ειναι αναγκαια για την ευσταθεια μιας μεθοδου. Θα δουμε οτι ειναι και ικανη

- Βοηθητικο αποτελεσμα για ευσταθεια και συγκλιση πολυβηματικων μεθοδων

<u>Προταση:</u> Εστω οτι η κ-βηματικη μεθοδος ικανοποιει τη συνθηκη των ριζων

Εστω λ^n, $n=0,\dots,N$ δεδομενες σταθερες και b_i^n $i=0,\dots,k$ $n=0,\dots,N-k$ δεδομενοι αριθμοι με $|b_i^n| \leq b \leq \infty$ τστε για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρουμε την εξισωση διαφορων

$$a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h(b_k^n \cdot \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \psi^n) + \lambda^n$$

$n=0,\dots,N-k$. Τοτε υπαρχει $h_0>0$ τω για $h\leq h_0$ να ισχυει

$$(++) \quad \max_{0\leq n\leq N} |\psi^n| \leq C_1 \left[\max_{0\leq j\leq k-1} |\psi^j| + N \max_{0\leq n\leq N-k} |\lambda^n| \right]$$

· Εφαρμογη για να αποδειξουμε ευσταθεια:

Υποθετουμε οτι ισχυει η συνθηκη των ριζων.

Θετουμε $\varphi^n := y^n - z^n$, $n = 0, \dots, N$

Αφαιρωντας κατα μελη εχουμε

$$\alpha_k \varphi^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varphi^n = h \Big\{ b_k \big[f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k}) \big] + \dots + b_0 \big[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n) \big] \Big\}$$

Για $y^n \neq z^n$ γραφουμε την προηγουμενη σχεση στη μορφη

$$\alpha_k \varphi^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varphi^n = h \Big\{ \underbrace{b_k \frac{f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k})}{y^{n+k} - z^{n+k}}}_{b_i^n} \varphi^{n+k} + \dots + \underbrace{b_0 \frac{f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)}{y^n - z^n}}_{b_0^n} \varphi^n \Big\}$$

Για $y^n = z^n$ οι αντιστοιχοι οροι μηδενιζονται οποτε τους παραλειπουμε.

Αρα $a_k \varphi^{n+k} + \dots + a_0 \varphi^n = h (b_k^n \varphi^{n+k} + \dots + b_0^n \varphi^n)$

Εχουμε $b_i^n = b_i \dfrac{f(t^{n+i}, y^{n+i}) - f(t^{n+i}, z^{n+i})}{y^{n+i} - z^{n+i}}$

οποτε $|b_i^n| \le L |b_i| \le L \max\limits_{0 \le i \le q} |b_i| = b$

Η ζητουμενη εκτιμηση επεται απο την (**) (με $\lambda^n = 0$)

Ταξη Ακριβειας, Συνεπεια και Συγκλιση πολυβηματικων μεθοδων

Σφαλμα Συνεπειας (τοπικο σφαλμα)

$$p^n := \sum_{i=0}^{k} a_i (y^{n+i}) - h \sum_{i=0}^{k} b_i f(t^{n+i}, y(t^{n+i})) \qquad n = 0, \dots, N-k$$

Το ρ^n είναι ένα μέτρο της αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιεί την αριθμητική μέθοδο

Έχουμε
$$\Theta \quad \rho^n = \sum_{i=0}^{k} \left[a_i y(t^{n+i}) - h b_i y'(t^{n+i}) \right]$$

Ορισμός: (Τάξη ακρίβειας)

Υποθέτουμε ότι η y είναι αρκετά ομαλή
Τάξη ακρίβειας της μεθόδου λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος p τω $\max\limits_{0 \le n \le N-k} |\rho^n| \le C(y) h^{p+1}$

Ερώτημα: Πως προσδιορίζουμε το p;

Αναπτύσσονται στην Θ τις $y(t^{n+i})$ και $y'(t^{n+i})$ κατά Taylor προς το σημείο t^n παίρνουμε
$$\rho^n = C_0 y(t^n) + C_1 h y'(t^n) + C_2 h^2 y''(t^n) + \dots$$
με σταθερές $C_0, C_1 \dots$ που εξαρτώνται μόνο από την μέθοδο.

Συμπέρασμα: Τάξη $= p$ αν

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0$$

- Τέλος Διάλεξης -

13/12/16 - ΤΡΙΤΗ

[2] - Αρχη Διαλεξης -

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad N \in \mathbb{N},\ h = \frac{b-a}{N},\ t^n := a + nh,\ n = 0,\dots,N$$

Ταξη ακριβειας, συνεπεια και συγκλιση πολυβηματικων μεθοδων

(1) $$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομενες} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right] & n = 0,\dots,N-k \end{cases}$$

Τοπικο Σφαλμα η Σφαλμα Συνεπειας

$$p^n := \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^n = \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t^{n+j}) - h b_j y'(t^{n+j})\right]$$

Αναπτυσσοντας κατα Taylor τις $y(t^{n+j})$ και $y'(t^{n+j})$ ως προς το σημειο t^n για $j=0,\dots,k$ παιρνουμε

$$p^n = C_0 y(t^n) + C_1 h y'(t^n) + C_2 h^2 y''(t^n) + \dots$$ με σταθερες $C_0, C_1, C_2, \dots$ ανεξαρτητες του h και της y

---

Ταξη μεθοδου $= p \iff C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ και $C_{p+1} \neq 0$

Ισχυει

Ασκηση 1.2 για $j \ge 2$ → (+) $$\begin{cases} C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k \\ C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k - (b_0 + b_1 + \dots + b_k) \\ C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k) \end{cases}$$

Μεθοδος συνεπης ανν $p \geq 1$

$$p \geq 1 \iff \begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Χαρακτηριστικο Πολυωνυμο μεθοδου

$$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_0$$

Τοτε $C_0 = \rho(1)$

Οριζουμε $\sigma(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_0$

Τοτε $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$

Συμπερασμα:

Μεθοδος Συνεπης $\iff \begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Μπορει να αποδειχθει οτι αν μια πολυβηματικη μεθοδος τοτε ειναι ευσταθης και συνεπης.

Εδω θα αποδειξουμε το αντιστροφο

<u>Θεωρημα:</u> (Εκτιμηση του σφαλματος πολυβηματικης μεθοδου)

Εστω οτι η k-βηματικη μεθοδος (1) ειναι ευσταθης και εχει ταξη ακριβειας $p \geq 1$. Εστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λυση του προβληματος αρχικων τιμων. Τοτε υπαρχει $h_0 > 0$ τω για $0 < h \leq h_0$ να ισχυει οτι το

$$\max_{0 \leq n < N} |y(t^n) - y^n| \leq C \left[\max_{0 \leq i \leq k-1} |y(t^i) - y^i| + h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| \right]$$

με σταθερα C_1 ανεξαρτητη του h και της y.

Αποδειξη: Για το σφαλμα συνεπειας ρ^n, εχουμε

(2) $$\max_{0\le n\le N-k} |\rho^n| \le C_1 h^{p+1} \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)|$$

Με $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, αφαιρωντας κατα μελη την (1) απο την

$$\alpha_k y(t^{n+k}) + \dots + \alpha_0 y(t^n) = h\left[b_k f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) + \dots + b_0 f(t^n, y(t^n))\right] + \rho^n$$

παιρνουμε

(3) $$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\left(b_k g^{n+k}\varepsilon^{n+k} + \dots + b_0 g^n \varepsilon^n\right) + \rho^n$$ με

$$g^n = \begin{cases} \dfrac{f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)}{y(t^n) - y^n}, & \text{αν } y(t^n) \ne y^n \\ 0, & \text{διαφορετικα} \end{cases}$$

Προφανως $|g^n| \le L \quad n = 0, \dots, N$

Θετουμε $b_i^n := b_i g^{n+i} \quad i = 0, \dots, k \quad n = 0, \dots, N-k$ τοτε η (3) γραφεται στη μορφη

(4) $$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\left(b_k^n \varepsilon^{n+k} + \dots + b_0^n \varepsilon^n\right) + \rho^n \quad n = 0, \dots, N-k$$

Προφανως $|b_i^n| \le |b_i| \cdot L \le L \max_{0\le j\le k} |b_j| = B$

Επομενως συμφωνα με την προταση 4.1 απο την (4) προκυπτει

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le C_1 \left[\max_{0\le j\le k-1} |\varepsilon^j| + N \max_{0\le n\le N-k} |\rho^n|\right]$$

Χρησιμοποιωντας εδω την ② προκυπτει το ζητουμενο

Ερωτημα: Πως υπολογιζουμε τις αρχικες προσεγγισεις
$y^0, \dots, y^{k-1}$

Θελουμε να ισχυει

⑤ $|y(t^j) - y^j| \le \tilde{C}_1 h^p, \quad j = 0, \dots, k-1$

ουτως ωστε η (*) να δινει

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le C_1 h^p$$

Επιλεγουμε $y^0 = y_0 = y(t^0)$ και υπολογιζουμε τα $y^1, \dots, y^{k-1}$ π.χ. με μια μεθοδο RK ταξης $p-1$. Αυτο αρκει επειδη η μεθοδος εφαρμοζεται $k-1$ φορες δηλαδη φορες ανεξαρτητες του h.

Μεγιστη ταξη ακριβειας p μιας ευσταθους k-βηματικης μεθοδου

$$p = \begin{cases} k+2 & \text{για } k \text{ αρτιο} \\ k+1 & \text{για } k \text{ περιττο} \end{cases}$$

Η μεγιστη ταξη ακριβειας μιας αμεσης k-βηματικης μεθοδου ειναι $p = k$

Αν μια k-βηματικη μεθοδος ειναι Α-ευσταθης τοτε $p \le 2$

— Τελος $4^{ου}$ Θεωρια —

Ασκηση 4.2: Νδο ισχυουν οι (+)

Αποδειξη:

$$\rho^n = \sum_{i=0}^{k} a_i\, y(t^{n+i}) - h\sum_{i=0}^{k} b_i\, y'(t^{n+i}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k=0} \left[a_i y(t^{n+i}) - h\, b_i\, y'(t^{n+i})\right]$$

Εστω $\tilde{p} \geq p$ ενας μεγαλος ακεραιος και εστω $y \in C^{\tilde{p}+1}$ [α
Αναπτυσσουμε τις $y(t^{n+i})$ και $y'(t^{n+i})$ κατα Taylor ως προς το σημειο t^n και παιρνουμε.

$$\rho^n = \sum_{i=0}^{k}\left[a_i \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(ih)^v}{v!} y^{(v)} t^{(v)} - h b_i \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(ih)^v}{v!} y^{(v+1)}(t^n)\right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left[a_i y(t^n) + a_i \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(ih)^v}{v!} y^{(v)}(t^n) - h\, b_i \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(ih)^v}{v!} y^{(v+1)}(t^n)\right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right)}_{C_0} y(t^n) + \sum_{i=0}^{k}\left[a_i \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(ih)^v}{v!} y^{(v)}(t^n) - h\, b_i \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(ih)^{v-1}}{(v-1)!} y^{(v)}(t^n)\right] + O(h$$

$$= C_0 y(t^n) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \frac{i^v}{v!} - \sum_{i=0}^{k} b_i \frac{i^{v-1}}{(v-1)!}\right] y^{(v)}(t^n) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= C_0 y(t^n) + h\left(\sum_{i=0}^{k} i a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i\right) y'(t^n) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \left[\frac{1}{v!}\sum_{i=1}^{k} i^v a_i - \frac{1}{(v-1)!}\sum_{i=1}^{k} i^{v-1} b_i\right] y^{(v)}$$

$$+ O(h^{\tilde{p}}$$

- Τελος Διαλεξης -

ΠΕΜΠΤΗ - 15/11/2016

[3] - Αρχη Διαλεξης -

Ασκηση 4.1

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$$
$$(b_2 = 1,\ b_1 = b_0 = 0)$$

1) Να προσδιορισαμε a_2, a_1, a_0 : $p = 2$
2) Ευσταθεια;

$$\begin{cases} c_0 := a_0 + a_1 + \dots + a_k \\ c_1 := (a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k) - (b_0 + b_1 + \dots + b_k) \\ c_i := \frac{1}{i!}(a_1 + 2^i a_2 + \dots + k^i a_k) - \frac{1}{(i-1)!}(b_1 + 2^{i-1} b_2 + \dots + k^{i-1} b_k) \\ \text{ταξη} = p \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0 & i \geq 2 \\ c_{p+1} \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Λυση: $p \geq 2 \Leftrightarrow c_0 = c_1 = c_2 = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 = 0 &: C_0 \\ a_1 + 2a_2 - 1 = 0 &: C_1 \\ \frac{1}{2!}(a_1 + 2^2 a_2) - \frac{1}{1!} 2^1 \cdot 1 = 0 &: C_2 \end{aligned}\right\} \Sigma$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow a_2 = 3/2,\ \alpha_1 = -2,\ \alpha_0 = 1/2$$

αρα η μεθοδος ειναι η

$$\frac{3}{2} y^{n+2} - 2 y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

διβηματικη μεθοδος αναδρομικων διαφορων

Επισης $c_3 = \frac{1}{3!}(a_1 + 2^3 a_2) - \frac{1}{2!} 2^2 \cdot 1^{b_2} = \dots = -\frac{1}{3} \neq 0$ αρα η ταξη ειναι $p \leq 2$ και δειξαμε $p \geq 2$ αρα $p = 2$

Ευσταθεια:

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

$p(z) = \frac{3}{2} z^2 - 2z + 1/2$

Οι ρίζες του ρ είναι

$z_1 = 1 \sim$ (απλή) | $|z| \leq 1$ άρα ικανοποιείται

$z_2 = \frac{1}{3} \sim$ (απλή) | η συνθήκη των ριζών (μέτρο)

Επομένως η μέθοδος είναι ευσταθής.

Ασκηση 4.16:

~~$a_3 = 1,\ a_2 = -11/6,\ a_1 = 1,\ a_0 = -1/6$~~

~~$[\ b_3 = 1/12,\ b_2 = 1/6,\ b_1 = -1/2,\ b_0 = 7/12\ ]$~~ (δεν χρειάζονται για ευστάθεια)

• Ευσταθής; Γιατί;

Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο: $p(z) = z^3 - 11/6\, z^2 + z - 1/6$

$p(1) = 1 - 11/6 + 1 - 1/6 = 2 - 12/6 = 0 \rightsquigarrow 1$ ρίζα του ρ

Μπορώ φυσικά αντί αυτού να κάνω Horner!

$p(z) = (z^3 - 1) - 11/6\,(z^2 - 1) + (z - 1) =$

$= 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 0$

$p(z) = (z-1)(z^2 + z + 1) - \frac{11}{6}(z-1)(z+1) + (z-1)$

$= (z-1)\left[z^2 + z + 1 - \frac{11}{6}(z+1) + 1\right]$

$= (z-1)\left(z^2 - \frac{5}{6} z + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$

ρίζες $z_1 = 1,\ z_2 = 1/2,\ z_3 = 1/3$

απλές

Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών άρα η μέθοδος είναι ευσταθής

Ασκηση 4.17: Είναι η προηγούμενη μέθοδος συνεπής; Γιατί;

$C_0 = p(1) = 0$ $\quad \sigma(z) = \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{7}{12}$ | $p'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3} z - 1$

$C_1 = p'(1) - \sigma(1) = 0$ $\quad \sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \ldots = \frac{1}{3}$ | $p'(1) = \ldots = 1/3$

$C_1 = C_0 = 0$ άρα μέθοδος συνεπής

Ασκηση 4.22 $a_k, \dots, a_0$ Υποθεση: Μεθοδα ευσταθης και συνεπης
$b_k, \dots, b_0$

Αποδειξη: Αφου η μεθοδος ειναι συνεπης εχουμε $C_0, C_1 = 0$
δηλαδη $\left.\begin{array}{l} \rho(1)=0 \\ \rho'(1)=\sigma(1) \end{array}\right\}$ ①

Εστω οτι το $b_k + \dots + b_0 = 0$, δηλαδη $\sigma(1)=0$ ②

Απο τις ① και ② επεται οτι

$\rho(1)=\rho'(1)=0$, Αρα το $z=1$ ειναι πολλαπλη ριζα του ρ επομενως η μεθοδος δεν ειναι ευσταθης! (αφου για πολλαπλες ριζες πρεπει $|z|<1$). ↯ Ατοπο.

Ασκηση 4.23: $\begin{cases} y' = f(t,y), \ a<t<b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Υποθεση: $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης και $\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) = 0$

$N \in \mathbb{N}$ $h = \frac{b-a}{N}$ $t^n := a + nh$ $n = 0, \dots, N$

Διβηματικη μεθοδος αναδρομων διαφορων

$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομενα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2}) \end{cases}$ $n = 0, \dots, N-2$

ΝΔΟ οι προσεγγισεις $y^0, \dots, y^n$ ειναι καλα ορισμενες χωρις περιορισμο στο βημα h

Αποδειξη: Αν δο δεδομενων των y^n και y^{n+1} το y^{n+2} ειναι καλα ορισμενο για $n = 0, \dots, N-2$

Γραφουμε την εξισωση
$\frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$
με αγνωστο το y^{n+2} σαν μορφη
$g(y^{n+2}) = 0$ με
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) := \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - h f(t^{n+2}, x)$

Επομένως αφού η g έχει ακριβώς μια ρίζα
φθίνουσα από συνθήκη Lipschitz (Υπόθεση)

Μοναδικότητα: Η $-hf(t^{n+2},x)$ είναι αύξουσα και η $\frac{3}{2}x-2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}$ είναι γνήσια αύξουσα. Επομένως η g είναι γνήσια αύξουσα. Άρα η g έχει το πολύ μια ρίζα

Ύπαρξη Ρίζας:

- Η g είναι συνεχής
- Για $x\le 0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},x)\le -hf(t^{n+2},0)$
  (η $-hf(t^{n+2},x)$ είναι αύξουσα)
  Επομένως $g(x)\le \underbrace{\frac{3}{2}x-\underbrace{2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}-hf(t^{n+2},0)}_{\text{σταθερά}}}_{\to -\infty \text{ αν } x\to-\infty}$
  Επομένως η συνάρτηση g παίρνει και αρνητικές τιμές
- Για $x>0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},0)\le -hf(t^{n+2},x)$
  Επομένως $g(x)\ge \underbrace{\frac{3}{2}x-\underbrace{2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}-hf(t^{n+2},0)}_{\text{σταθερά}}}_{\to +\infty \text{ αν } x\to+\infty}$
  Επομένως η συνάρτηση g παίρνει και θετικές τιμές

Άρα σύμφωνα με ΘΜΤ (η g περνάει και από το 0) η συνάρτηση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα.

— ΤΕΛΟΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ —

— Τέλος Διαλέξεων —

THE END