29/11/2016 - ΤΡΙΤΗ

[1] - Αρχη Διαλεξης -

Μεθοδοι Runge-Kutta

Συμβολισμοι και Παραδειγματα:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Εστω $q \in \mathbb{N}$ $c_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \ldots, q$
(συνηθως $c_i \in [0, 1]$)
$a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, q$ και $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, q$

Για $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγιζουμε τα ολοκληρωματα

$\int_0^{c_i} \varphi(\tau) d\tau$, $i = 1, \ldots, q$ και $\int_0^1 \varphi(\tau) d\tau$ ως εξης

$$\int_0^{c_i} \varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \varphi(\tau_j), \quad i = 1, \ldots, q \quad \text{και}$$

$$\int_0^1 \varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i)$$

Δηλαδη εχουμε $q+1$ τυπους αριθμητικης ολοκληρωσης με κομβους $\tau_1, \ldots, \tau_q$ και βαρη τα a_{ij} $j = 1, \ldots, q$ για την προσεγγιση ολοκληρωματων στο διαστημα $[0, c_i]$ και b_i $i = 1, \ldots, q$ για την προσεγγιση ολοκληρωματων στο διαστημα $[0, 1]$.

Καθε τετοιο συνολο αριθμων περιγραφει μια μεθοδο R.K.
Γραφουμε αυτους τους αριθμους σε μορφη μητρωου

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

Εστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$
$n = 0, \ldots, N$. Προσεγγιζουμε $y(t^n)$ με y^n οπως θα δουμε στη συνεχεια.

Εστω $t^{n,i} := t^n + \tau_i h$, $i = 1, \ldots, q$

Ολοκληρωνουμε τη Δ.Ε. $y'(t) = f(t, y(t))$ στο διαστημα $[t^n, t^{n,i}]$ και παιρνουμε

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\, dt.$$

Αλλαγη μεταβλητης $t = t^n + h \cdot s$, τοτε

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = h \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\, ds \quad \text{οποτε}$$

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) \approx h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^n + h\tau_j, y(t^n + h\tau_j))$$

Εχουμε

$$y(t^{n,i}) \approx y(t^n) + h \sum_{j=1}^{\alpha} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j})) \quad i = 1, \ldots, q$$

Αντικαθιστούμε το $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,i})$ με $y^{n,i}$ και παίρνουμε

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad i=1,\dots,q$$

Αναστοιχα Ολοκληρωνοντας την ΔΕ

$y'(t) = f(t, y(t))$ στο $[t^n, t^{n+1}]$ παίρνουμε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Αλλαγη Μεταβλητης

$t = t^n + hs$

Τοτε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = h\int_0^1 f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds$$ Επομενως

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h\sum_{i=1}^{q} b_i f(\underbrace{t^n + hc_i}_{t^{n,i}}, y(t^n + h(i)))$$

Αντικαθιστούμε τα $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,i})$ με $y^{n,i}$ και παίρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$$y^0 = y_0$$

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}),\ i=1,\dots,q$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}),\ n=0,\dots,N-1$$

Ειδικες Περιπτωσεις

• Αμεσες Μεθοδοι R.K.:

Υποθεση: Ο πινακας A ειναι γνήσια κατω τριγωνικος δηλαδή $a_{ij}=0$ για $j \geq i$

Τοτε

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$\vdots$$
$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Τα $y^{n,1}, y^{n,2}, \ldots, y^{n,q}$ υπολογίζονται αναδρομικα χωρις να λυσουμε καποια εξισωση.

Αν ο A δεν ειναι γνησια κατω τριγωνικος η μεθοδος ειναι πεπλεγμενη.

Οι μεθοδοι ειναι, παραμενουν, ίδιες και για συστηματα ΣΔΕ μονο που τωρα τα $y^{n,i}$ και y^n ειναι διανυσματα. Οι μεθοδοι με τις οποιες θα ασχοληθουμε εχουν δυο (2) ιδιοτητες

1. $b_1 + b_2 + \ldots + b_q = 1$: Ικανη και αναγκαια συνθηκη για να εχει η μεθοδος ταξη ακριβειας $p \geq 1$
2. $a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{iq} = \tau_i \;\; \forall i,\; i = 1, \ldots, q$

Παραδείγματα:

I. $q=1$ και $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$

Ισχυρισμός: Αυτό το μητρώο περιγράφει την Άμεση μέθοδο του Euler ($q=1$, $b=1$)

↳ Πράγματι...

$$t^{n,i} = t^n + 0h = t^n \qquad y^{n,1} = y^n$$
$$\underline{\underline{y^{n+1}}} = y^n + hf(\overset{t^n}{\overset{\parallel}{t^{n,1}}}, y^{n,1}) = \underline{\underline{y^n + hf(t^n, y^n)}} \quad ✓$$

II. $q=1$ και $\begin{array}{c|c} a= 1 & 1 = c \\ \hline b= & 1 \end{array}$

Ισχυρισμός: Αυτό το μητρώο περιγράφει την Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler

↳ Πράγματι...

$$y^{n,1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1})$$

Αφού τα δεξιά μέλη είναι ίδια (αν το $y^{n,1}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο) έχουμε $y^{n,1} = y^{n+1}$. Επίσης $t^{n,1} = t^n + h = t^{n+1}$

άρα $\underline{\underline{y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})}}$

III. $q=1$ και $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$

Ισχυρισμός: Αυτό το μητρώο περιγράφει την Μέθοδο του Μέσου

↳ Πράγματι

$$(1) \quad y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}), \quad t^{n,1} = t^n + \frac{1}{2}h = \frac{t^n + t^{n+1}}{2}$$
$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1})$$

$(1) \xrightarrow{\times 2} 2y^{n,1} = 2y^n + hf(t^{n,1}, y^{n+1})$ Άρα

$$2y^{n,1} - 2y^n = y^{n+1} - y^n \Rightarrow 2y^{n,1} = y^{n+1} + y^n \Rightarrow y^{n,1} = \frac{y^n + y^{n+1}}{2}$$

Επομένως έχουμε

$$\underline{\underline{y^{n+1} = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+2}}{2}\right)}}$$

IV. $q = 2$ και
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Αυτό το μητρώο περιγράφει την Μέθοδο του Τραπεζίου.
↳ Πράγματι...

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})$$
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})$$

Άρα $y^{n,1} = y^n$ και $y^{n,2} = y^{n+1}$

Επίσης $t^{n,1} = t^n + \tau_1 \cdot h = t^n$
$t^{n,2} = t^n + \tau_2 \cdot h = t^{n+1}$

Συμπέρασμα: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n) + \frac{h}{2} f(t^{n+1}, y^{n+1}) =$

$$\underline{\underline{= y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]}}$$

V. $q = 2$ και
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + h\frac{1}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)$$
$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,2}, y^{n,2})$$
$$t^{n,2} = t^n + \frac{1}{2}h = \frac{t^n + t^{n+1}}{2}$$

Άρα

$$y^{n+1} = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)\right)$$

(Άμεση Μέθοδος του Μέσου / Βελτιωμένη μέθοδος του Euler) $\rightarrow p = 2$

VI. $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\psi & \frac{1}{2}-\psi \\ \frac{1}{4}+\psi & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\psi \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Έχει τάξη ακρίβειας $p=4$

↳ Όλες οι άλλες μέθοδοι RK με $q=2$ έχουν τάξη <4 δηλαδή το πολύ 3

Αυτή μέθοδος λέγεται μέθοδος RK-Gauss-Legendre δύο σημείων.

<u>Παρατήρηση:</u> Το q λέγεται πλήθος σταδίων της μεθόδου και τα $y^{n,1} \ldots y^{n,q}$ ενδιάμεσα στάδια.

Τα $y^{n,i}$ είναι μεν προσεγγίσεις των $y(t^{n,i})$ χρησιμοποιούνται όμως μόνο για τον υπολογισμό του y^{n+1}

Επιλυσιμότητα και Ευστάθεια Μεθόδων R.K.

> Επιλυσιμότητα: Για τις άμεσες μεθόδους οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς κανέναν περιορισμό.

↳ Πεπλεγμένες Μέθοδοι:

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ \Big\}$ ⊛

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Ύπαρξη και Μοναδικότητα Προσεγγίσεων

Αν ισχύει η (*) και το h είναι $< \frac{1}{\gamma}$ $(h < 1/\gamma)$ με

$$\gamma := L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$$ τότε τα $y^{n,1}, \ldots, y^{n,q}$

είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση

$$F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q, \quad F_i(x) := y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j) \quad i = 1, \ldots, q$$

με $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$ και $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_q(x))$ τότε η (+) γράφεται στην μορφή

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}\right)$$

Άρα κάθε λύση της (+) είναι σταθερό σημείο της F και αντίστροφα

— Τέλος Διάλεξης —

11/12/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[2] - Αρχη Διαλεξης -

Μεθοδοι RK

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad N \in \mathbb{N}, \ h = \frac{b-a}{N}$$

$$t^n = a + nh \qquad n = 0, \dots, N$$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array} \qquad t^{n,i} = t^n + \tau_i h$$

$$(1),(+) \begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

Υποθεση: $\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L |y_1 - y_2| \quad \Big\} (*)$$

Προταση 3.1 : (Υπαρξη και Μοναδικοτητα προσεγγισεων)

Εστω οτι ισχυει η (*) και οτι $h < 1/\gamma$ οπου $\gamma = L \cdot \max_{1 \le i \le N} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$, τοτε το συστημα (+) εχει ακριβως μια λυση

Αποδειξη: Θεωρουμε την απεικονιση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

$$F_i(x) := y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j) \quad i=1,\dots,q$$

Καθε σταθερο σημειο της F ειναι λυση του (+) και αντιστροφα

Θα αποδειξουμε οτι η F εχει ακριβως ενα σταθερο σημειο
Αρκει η F ειναι συστολη.
Πραγματικα για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ εχουμε

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\leq L|x_j - \tilde{x}_j|}$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq Lh \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \, |x_j - \tilde{x}_j|$$ Επομενως

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq \underbrace{\left(Lh \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\leq \gamma h} \cdot \underbrace{\max_{1 \leq \ell \leq q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|}_{\|x - \tilde{x}\|_\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq \gamma h \|x - \tilde{x}\|_\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{1 \leq i \leq q} |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \leq \gamma h \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

Αρα $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty \leq \overbrace{\gamma h}^{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

δηλ. η F ειναι συστολη στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$

Ευστάθεια:

Ορισμός: (Ευστάθεια Μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής αν για κάθε ΠΑΤ που ικανοποιεί την (*) και υπό τις προϋποθέσεις της πρότασης (3.1) υπάρχει μια σταθερά C (που εξαρτάται) από το πρόβλημα και από την μέθοδο, αλλά όχι από το h η τις προσεγγίσεις των
για ακολουθίες $y^0, \dots, y^N$ και $z^0, \dots, z^n$ που ικανοποιούν τις (1) και (2)

$$(2)\begin{cases} z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i=1,\dots,q \\ z^{n+1} = z^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

ισχύει $\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C|y^0 - z^0|$ (**)

Πρόταση: (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Έστω μια μέθοδος RK και έστω ότι ικανοποιείται οι συνθήκες της πρότασης 3.1. Έστω ότι $y^0, \dots, y^N$ ικανοποιούν την (1) και οι $z^0, \dots, z^n$ ικανοποιούν την

$$(2')\begin{cases} z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i=1,\dots,q \\ z^{n+1} = z^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$$

με ρ^n δεδομένους όρους (όρους διαταραχής)

Τοτε υπαρχουν σταθερες C_1, C_2 ανεξαρτητες του h των y^n, z^n, ρ^n τω

(3) (++) $$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho^n|$$

Παρατηρηση: Επιλεγοντας $\rho^n = 0$, $n = 0, \ldots, N-1$ απο την (++) επεται αμεσως η (**), δηλαδη η ευσταθεια της μεθοδου.

Αποδειξη: Αφαιρωντας κατα μελη τις προτελευταιες σχεσεις των (1) και (2') παιρνουμε

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left[f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j}) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + Lh \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \underbrace{\left(Lh \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \right)}_{\le \gamma h} \max_{1\le \ell\le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1\le \ell\le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1\le \ell\le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\gamma h)}_{>0} \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \frac{1}{1-\gamma h} |y^n - z^n|$$

Για $h \le h_0$ τω $\gamma h_0 < 1$ εχουμε $\frac{1}{1-\gamma h} \le C$ οποτε $\max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le C_1 |y^n - z^n|$ δηλαδη

$$|y^{n,i} - z^{n,i}| \leq c_i |y^n - z^n|, \quad i = 1, \ldots, q$$

Αφαιρωντας κατα μελη τις τελευταιες σχεσεις των ① και ②' παιρνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i [f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})] - p^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \sum_{i=1}^{q} |b_i| \underbrace{|f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})|}_{\leq L \underbrace{|y^{n,i} - z^{n,i}|}_{\leq C|y^n - z^n|}} + |p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \Big(1 + \underbrace{hLC \sum_{i=1}^{q} |b_i|}_{C}\Big) |y^n - z^n| + \underbrace{\max_{0 \leq n \leq N-1} |p^n|}_{K}$$

Το ζητουμενο επεται αμεσως απο το Λημμα 2.1

Ταξη Ακριβειας και Συγκλιση Μεθοδων RK.

Υποθεση: Η f οποτε και η y ειναι αρκετα ομαλες συναρτησεις

> **Τοπικο Σφαλμα: (Σφαλμα Συνεπειας)**

$$④ \begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \ldots, q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Ταξη ακριβειας (ή ταξη) της μεθοδου, λεγεται ο μεγαλυτερος ακεραιος p τω να ισχυει

$$\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le C\cdot h^{p+1}$$ με σταθερά C ανεξαρτητη του h (εξαρτωμενη απο το προβλημα και απο τη μεθοδο).

Η μεθοδος λεγεται συνεπης αν το $p \geq 1$.

<u>Ασκηση 3.12</u> ... Μεθοδος Συνεπης $\Leftrightarrow b_1 + \ldots + b_q = 1$

<u>Θεωρημα: (Εκτιμηση Σφαλματος Μεθοδων RK)</u>

Εστω οτι ικανοποιειται η συνθηκη του Lipschitz (*) και οτι η f, οποτε και η y, ειναι αρκετα ομαλες. Με το γ της προτασης 3.1 υποθετουμε οτι $h \le h_0$ με h_0 τω $\gamma h_0 < 1$.

Εστω p η ταξη ακριβειας της μεθοδου RK. Τοτε ισχυει

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C_2 h^p$$ με σταθερα C_2 ανεξαρτητη του h.

Αποδειξη: Γραφουμε την (4) στη μορφη

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i = 1,\ldots,q \\ y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) - \delta^n \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε την ③ με $z^n = y(t^n)$ και $\rho^n = -\delta^n$
και παίρνουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le C_1 |y^0 - y(t^0)| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |-\delta^n|$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{C_2}{h} \cdot Ch^{p+1} = \underbrace{C_2 \cdot C}_{\tilde{C}_2} h^p$$

Προσδιορισμός Τάξης Ακρίβειας Μεθόδων RK.

Γενικά Σχόλια:

- $p \le 2q$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια
- $p \le q$ για κάθε άμεση μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια
- Ακριβέστερα άνω φράγματα της p προκύπτουν εύκολα με τον τρόπο που θα δούμε όταν μιλήσουμε για την συνάρτηση ευστάθειας r της μεθόδου.

- $p \ge 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$
- Η τάξη ακρίβειας p προσδιορίζεται με κατάλληλα αναπτύγματα Taylor
- Για μεγάλο q οι πράξεις γίνονται αρκετά πολύπλοκες. Οι πράξεις διευκολύνονται χρησιμοποιώντας τα "δέντρα του Butcher" και συμβολικούς υπολογισμούς.
- Οι λεγόμενες απλοποιημένες συνθήκες μπορούν να ελεγχθούν εύκολα. Δίνουν γενικά κάτω φράγματα της p. Για ορισμένες ιδιαίτερα χρήσιμες στην πράξη οικογένειες μεθόδων RK αυτές οι συνθήκες δίνουν την τάξη ακρίβειας ακριβώς.

Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος του

$\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1}$, $\ell=0,\dots,\tilde{p}-1$, τότε $p \le \tilde{p}$

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(c_i) \qquad \varphi(\tau)=\tau^{\ell}$$

(ο τύπος ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι βαθμού $\tilde{p}-1$ ακριβώς)

<u>Παραδείγματα:</u> $\begin{array}{c|c} \frac12 & \frac12 \\ \hline & 1 \end{array}$ ~ Μέθοδος Μέσου

$(p \ge 1,\ p \le 2)$

Θέλουμε να δούμε αν $p=1$ ή $p=2$

$$y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

$$\delta^n = [y(t^n) + h f(t^{n,1}, y^{n,1})] - y(t^{n+1})$$

$$t^{n,1} = t^n + \frac{1}{2}h = t^n + \frac{h}{2}$$

<u>Taylor:</u> $f(t^{n,1}, y^{n,1}) = f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})\right)$

$$= \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{} + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^{n,1}, y^{n,1})}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$\underset{y'(t^n)}{\shortparallel}$$

$$\Rightarrow f(t^{n,1}, y^{n,1}) = f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) +$$

$$+ \frac{h}{2} \underset{\substack{\shortparallel \\ y'(t^n)}}{f(t^n, y(t^n))} f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

Άρα

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3) -$$

$$- [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= \frac{h^2}{2}\underbrace{\left[f_t(t^n, y(t^n)) + y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)\right]}_{\text{Ισχυρίζομαι οτι ειναι } = 0} + O(h^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \geq 2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \\ y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t) \end{array} \right\}$$

\- Τέλος Διαλέξης -

2/12/16 - ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ

[3] - Αρχη Διαλεξης -

Ασκηση 3.12:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & c_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$p \geq 1 \Leftrightarrow b_1 + \cdots + b_q = 1$

Αποδειξη:

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i=1,\ldots,q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

$t^{n,i} = t^n + c_i h = t^n + O(h)$

$y^{n,i} = y(t^n) + O(h)$

Επομενως

$$f(t^{n,i}, y^{n,i}) = \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h)$$

$$\text{Αρα } \delta^n = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i \left[y'(t^n) + O(h) \right] - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) y'(t^n) + O(h^2) - \left[y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2) \right]$$

$$= h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

Για $y'(t^n) \neq 0$ εχουμε $\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0$

Ασκηση 3.13

$$\begin{cases} y'(t) = 1 , & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λυση: $y(t) = t$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$ $t^n = nh$ $n = 0, \dots, N$

Αν $y^N \to 1 = y(1)$, $N \to \infty$ ΝΔΟ η μέθοδος είναι συνεπής

Ευστάθεια και συνέπεια
$\Downarrow$
Σύγκλιση

Απόδειξη: $y^0 = 0$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot 1 \quad n = 0, \dots, N-1$$

Άρα $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i$ οπότε

$$y^n = nh \sum_{i=1}^{q} b_i$$

(τετριμμένη επαγωγή)

Συνεπώς $y^N = \underbrace{Nh}_{1} \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^N = \sum_{i=1}^{q} b_i$

Αφού $y^N \to 1$, $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$, επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 3.14

$$\max_{\substack{1 \le i \le q \\ 0 \le n \le N-1}} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| \le Ch$$

$$\max_{n} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| \le Ch^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i$$

Απόδειξη: $y^{n,i} = y(t^n) + h \sum a_{ij} \underbrace{f(t^{n,j}, y^{n,j})}_{y'(t^n) + O(h)}$

$$\Rightarrow y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y'(t^n) + O(h^2) \quad (1)$$

Όμως $y(t^{n,i}) = y(t^n + c_i h) = y(t^n) + c_i h y'(t^n) + O(h^2)$

$$\Rightarrow y(t^n) = y(t^{n,i}) - c_i h y'(t^n) + O(h^2) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της (2) στην (1) παίρνουμε:

$$y^{n,i} = y(t^{n,i}) - c_i h y'(t^n) + h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - c_i\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

Επομένως 1) $|y^{n,i} - y(t^{n,i})| \le Ch$

2) Για $y'(t^n) \neq 0$ έχουμε

$|y^{n,i} - y(t^{n,i})| \le Ch^2 \Leftrightarrow \sum a_{ij} - c_i = 0$

Ασκηση 3.15:

1/12	-1/12	1/4	1/4
1/12	1/6	-1/6	1/3
1/6	1/2	1/6	5/6
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	

Είναι συνεπής; Γιατί;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$$

άρα είναι συνεπής

Ασκηση 3.2:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	1

$p = ;$

Απόδειξη:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ \delta^n = y(t^n) + h \cdot 1 \cdot \underbrace{f(t^{n,1}, y^{n,1})} - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

(Θέλω νδο είναι τουλάχιστον $O(h^2)$) $f(t^n, y(t^n)) + O(h)$

Αρα $\delta^n = y(t^n) + \underbrace{hf(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h^2) - y(t^{n+1})$.

$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + O(h^2)] = O(h^2) \Rightarrow p \geq 1$

Τυχαια Επιλογη

$$\begin{cases} y'(t) = 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 & \text{Λυση: } y(t) = t^2 \end{cases}$$

$\delta^n = y(t^n) + 2h\, t^{n,1} - y(t^{n+1})$

$= t^2 + 2h(t^n + \frac{h}{3}) - (t^n + h)^2$

$= \cancel{(t^n)^2} + \cancel{2ht^n} + \frac{2}{3}h^2 - \cancel{(t^n)^2} - \cancel{2ht^n} - \frac{2}{3}h^2$

$\Rightarrow \delta^n = -1/3\ h^2$

$|\delta^n| \geq \frac{1}{3}h^2 \Rightarrow p \leq 1$ Αρα $p = 1$

Ασκηση 3.3

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & c_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array} \qquad p = 2$$

Λυση: $y^{n,1} = y(t^n)$ $\qquad t^n \quad y(t^n)$

$y^{n,2} = y(t^n) + ha_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$\delta^n = y(t^n) + b_1 h\, f(t^{n,1}, y^{n,1}) + b_2 h f(t^{n,2}, y^{n,2}) - y(t^{n+1})$

$t^n \qquad y(t^n) \qquad t^n + c_2 h$

Άρα $\delta^n = y(t^n) + b_1 \cdot h \cdot \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{y'(t^n)} + b_2 \cdot h \cdot f(t^n + c_2 h, y(t^n) + h a_2 \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{y'(t^n)}) - y(t^{n+1})$

$= y(t^n) + b_1 h y'(t^n) + b_2 h [f(t^n, y(t^n)) + c_2 h f_t(t^n, y(t^n)) + h a_{21} y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)] - y(t^{n+1})$

$= y(t^n) + (b_1 + b_2) h y'(t^n) + c_2 b_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) + f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3) -$

$- [y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^2)] =$

$= (b_1 + b_2 - 1) h y'(t^n) + c_2 b_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3) -$

$- \frac{h^2}{2} [f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n))(y'(t^n))]$

$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) y'(t)$

$= (b_1 + b_2 - 1) \underbrace{h y'(t^n)}_{\neq 0} + (b_2 c_2 - 1/2) h^2 \underbrace{f_t(t^n, y(t^n))}_{\neq 0} + (b_2 a_{21} - \frac{1}{2}) \underbrace{h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n))}_{\neq 0} + O(h^3)$

Άρα $\delta^n = O(h^3) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 - 1 = 0 \\ b_2 c_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ b_2 a_{21} - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right\}$ Για $b_2 \neq 0$ έχουμε $b_1 = 1 - b_2$, $a_{21} = c_2 = \frac{1}{2b_2}$ $\quad p \geq 2$

Ισχυρισμός: $p \leq 2$

$\begin{cases} y' = y & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Λύση $y(t) = e^t$

Τότε

$\delta^n = y(t^n) + b_1 h y'(t^n) + b_2 h [y(t^n) + h a_{21} y'(t^n)] - y(t^{n+1}) =$

$= e^{t^n} [1 + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{1/2} h + \underset{1/2}{\underset{\parallel}{b_2 a_{21}}} h^2] - e^{t^{n+1}} = e^{t^n} (1 + h + \frac{h^2}{2}) - e^{t^{n+1}}$

Αρα $\delta^n = e^{t^n}\left[1+h+\frac{h^2}{2} - e^h\right]$

$1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}e^{\xi} \quad \xi\in(0,h)$

$\delta^n = -\frac{h^3}{6}e^{t^n}e^{\xi} \Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{6}h^3 \Rightarrow p\leq 2$

Αρα $p=2$

Θεωρια:

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad p\geq 2$$

Ισχυρισμος: $p\leq 2$

ωχαιο

$$\begin{cases} y' = 3t^2 \\ y(0)=0 \end{cases}, \quad 0\leq t\leq 1$$

Λυση: $y(t)=t^3$

$\delta^n = y(t^n) + h3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1}) =$

$= (t^n)^3 + 3h\left(t^n+\frac{h}{2}\right)^2 - (t^n+h)^3$

$= \cancel{(t^n)^3} + \cancel{3h(t^n)^2} + \cancel{3h^2t^n} + \frac{3}{4}h^3 - \cancel{(t^n)^3} \cancel{+3(t^n)^2h} - \cancel{3t^nh^2} - h^3$

$\Rightarrow |\delta^n| \geq 1/4\, h^2 \rightsquigarrow p\leq 2$

Συμπερασμα: $p=2$

<u>Ικανες συνθηκες για την ταξη ακριβειας μεθοδων RK</u>

Θεώρημα (απλοποιημένες συνθήκες)

Έστω $p, r, s \in \mathbb{N}$ τω

① $\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^k = \frac{1}{k+1}$ για $k=0,\ldots,p-1$

② $\sum_{j=1}^{q} a_{ij} c_j^k = \frac{c_i^{k+1}}{k+1}$ για $1<i\leq q$ και $k=0,\ldots,s-1$

③ $\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^k a_{ij} = \frac{b_j(1-c_j^{k+1})}{k+1}$ για $1\leq j\leq q$ και $k=0,\ldots,r-1$

④ $p\leq r+s+1$ και $p\leq 2s+2$

Συμπέρασμα: Η τάξη ακρίβειας είναι τουλάχιστον p

Η έννοια της 4 είναι ότι η τάξη ακρίβειας είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$

Πόρισμα (Butcher, Crouzeix)

α) Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η ① και η ② ισχύουν για $s=p-1$, τότε η τάξη είναι ακριβώς p

β) Έστω q' το πλήθος των c_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίον ισχύει η ① και η ② ισχύει για $s=q'$ τότε η τάξη είναι ακριβώς p

γ) Υπάρχει ακριβώς μια μέθοδος με τάξη $p=2q$ $\forall q$
(όλες οι άλλες έχουν τάξη $p<2q$)
Είναι με $b_1,\ldots,b_q$ και $c_1,\ldots,c_q$ τα βάρη και τους κόμβους του τύπου του Gauss στο διάστημα $[0,1]$ (με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$)

Τα a_{ij} υπολογίζονται από τις ② με $s=q$.

Αυτή η οικογένεια μεθόδων, λέγονται
μέθοδοι RK Gauss-Legendre.
- Τέλος Διάλεξης -

6/12/2016 - ΤΡΙΤΗ
[4] - Αρχή Διάλεξης -

<u>Περιοχή Ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις της εκθετικής συνάρτησης.</u>

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

Θεωρούμε το 1ο πρόβλημα δοκιμής.

$$\text{④} \begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \text{ λύση: } y(t) = e^{\lambda t}$$

Εφαρμόζουμε στο ④ τη μέθοδο RK με βήμα h και παίρνουμε

$$① \quad y^{n,i} = y^n + \lambda h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot y^{n,j} \qquad i = 1, \ldots, q$$

$$② \quad y^{n+1} = y^n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} b_i y^{n,i}$$

Λύνουμε την ① ως προς τα $y^{n,1}, \ldots, y^{n,q}$. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n\\ y^n\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix} + \lambda h A \begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix} \Rightarrow (I_q - \lambda h A)\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}$$

Αν το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν ειναι ιδιοτιμη του A, τοτε ο πινακας

$I_q - \lambda h A$ ειναι αναστρεψιμος, οποτε η προηγουμενη σχεση δινει

$$\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \begin{pmatrix} y^n\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix} = y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}_{e}$$

Συμπερασμα: $\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} = y^n (I_q - \lambda h A)^{-1}$ ③

Συμφωνα με την ② εχουμε

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h b^T \begin{pmatrix} y^{n,1}\\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} \overset{③}{=} y^n + \lambda h y^n b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot e$$

Αρα $y^{n+1} = [1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda A h)^{-1} e] y^n$

Οριζουμε τη συναρτηση ευσταθειας r της μεθοδου

④ $r(z) := 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} e$ και η προηγουμενη σχεση γραφεται στη μορφη $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$ ⑤

Η συναρτηση r δεν οριζεται για το πολυ q μιγαδικους αριθμους. (Παντου αλλου οριζεται)

Ερωτημα: Ποιας μορφης ειναι η συναρτηση r;

Θετουμε $w := (I_q - zA)^{-1} \cdot e$ και εχουμε

⑥ $(I_q - zA) w = e.$

Λυνουμε το γραμμικο συστημα ⑥ ως προς $w_1, \ldots, w_q$ με τον κανονα του Cramer

Ο παρονομαστης ειναι $\det(I_q - zA)$ δηλαδη ειναι πολυωνυμο βαθμου το πολυ q. Αντιστοιχα καθε αριθμητης ειναι πολυωνυμο βαθμου το πολυ $q-1$.

Συμπερασμα: Η r ειναι ρητη συναρτηση με αριθμητη και παρονομαστη πολυωνυμα βαθμου το πολυ q

<u>Περιοχη Ευσταθειας:</u> $S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1\}$

$y(t) = e^{\lambda t}$
$y(t^{n+1}) = e^{\lambda t^{n+1}} = e^{\lambda(t^n + h)} = e^{\lambda t} \cdot e^{\lambda h}$

<u>Σφαλμα Συνεπειας:</u> $\delta^n = r(\lambda h) y(t^n) - y(t^{n+1}) = r(\lambda h) y(t^n) - e^{\lambda h} y(t^n)$

$\Rightarrow \delta^n = [r(\lambda h) - e^{\lambda h}] \underbrace{y(t^n)}_{\neq 0}$

Επομενως αν η ταξη ακριβειας της μεθοδου ειναι p τοτε
(**) $|e^z - r(z)| \leq C|z|^{p+1}$ για $h \to 0$

Η (**) ειναι αναγκαια για να εχει η μεθοδος ταξη ακριβειας p. (Η συνθηκη δεν ειναι ικανή αφου το r δεν εξαρτασαι απο τα $\tau_1, \ldots, \tau_q$)

<u>Αμεσοι Μεθοδοι:</u> Παρονομαστης: $\det(I_q - zA)$

Ο A ειναι γνησια κατω τριγωνικος οποτε ο $I_q - zA$ ειναι κατω τριγωνικος πινακας με μοναδες στη διαγωνιο.
Αρα $\det(I_q - zA) = 1$.

Συμπερασμα: Η r ειναι πολυωνυμο βαθμου το πολυ q

Υποθεση: Η ταξη της μεθοδου ειναι p. Τοτε συμφωνα με την (**).

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1}z^{p+1} + \dots + C_q z^q$$

Επομενως η μεγιστη δυνατη ταξη μιας αμεσης μεθοδου ειναι το πολυ $p = q$

Αν $p = q$ τοτε $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^q}{q!}$

Συναρτησεις Ευσταθειας:

Αμεση Euler: $r(z) = z + 1$

Πεπλεγμενη Euler: $r(z) = \frac{1}{1-z}$

Πεπλεγμενη Μεσου / Μεθοδος Τραπεζιου: $r(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$

Ικανη και Αναγκαια συνθηκη για Α-Ευσταθεια

Μια μεθοδος RK ειναι Α ευσταθης, δηλαδη ισχυει $S \supseteq \mathbb{C}^-$ αν $|r(iy)| \leq 1$ $\forall y \in \mathbb{R}$ και η r δεν εχει πολους στο $\mathbb{C}$, δηλ ο παρονομαστης δεν μηδενιζεται σε καποιο $z \in \mathbb{C}^-$. Οπου υποθεσαμε πως αριθμητης και παρονομαστης δεν εχουν κοινες ριζες (διαφορετικα απλοποιουμε).

<u>Προσεγγίσεις Padé:</u> Μια συνάρτηση $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$ $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ λέγεται προσέγγιση Padé της e^z αν $e^z - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1})$

Αποδεικνύεται ότι για κάθε $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ακριβώς μια προσέγγιση Padé $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$ της e^z.

Κατά κανόνα οι συναρτήσεις ευστάθειας r μεθόδου RK είναι προσεγγίσεις Padé της e^z. Τότε η μέθοδος είναι A-ευσταθής αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος ή κατά 1 ή κατά 2 από τον βαθμό του αριθμητή.

<u>Εφαρμογή:</u> Μέθοδος RK Gauss-Legendre με q ενδιάμεσα στάδια

Αφού η τάξη της μεθόδου είναι $p=2q$ ο βαθμός τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή της r είναι q και η r είναι προσέγγιση Padé της e^z.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μέθοδος είναι A-ευσταθής

<u>B-Ευστάθεια:</u>

<u>Ορισμός:</u> (Αλγεβρική Ευστάθεια)

Μια μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής αν:
- $b_i \geq 0$, $i=1,\dots,q$
- Ο $q \times q$ πίνακας M με στοιχεία m_{ij}
  $m_{ij} := b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$ $i,j=1,\dots,q$ είναι μη αρνητικά ορισμένος

Δηλαδη $\forall x \in \mathbb{R}^{m} \ (Mx, x) = \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0$

Αυτη η ιδιοτητα ελεγχεται αλγεβρικα και γι' αυτο λεγεται αλγεβρικη ευσταθεια

Τωρα ισχυουν:

α) Μεθοδος αλγεβρικα ευσταθης $\Rightarrow$ μεθοδος B-ευσταθης

β) Αν τα $c_1, \dots, c_q$ ειναι διαφορετικα μεταξυ τους τοτε B-Ευσταθεια $\Rightarrow$ αλγεβρικη ευσταθεια

Παραδειγματα:

I. Πεπλεγμενη Μεθοδος του Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

α) $b_1 = 1 \geq 0$ ✓

β) $m_{11} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \geq 0$ ✓

Αρα η μεθοδος ειναι αλγεβρικα ευσταθης (και B-ευσταθης)

II. Μεθοδος του Μεσου

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

α) $b_1 = 1 \geq 0$ ✓

β) $m_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = 0 \geq 0$ ✓

Αρα η μεθοδος ειναι αλγεβρικα ευσταθης (και B-ευσταθης)

III Μεθοδος του Τραπεζιου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$M \in \mathbb{R}^{2,2}$

$m_{11} = 0 + 0 - 1/4 = -1/4 < 0$

Επομενως

$$\left(M\binom{1}{0}, \binom{1}{0}\right) = \left(\binom{-1/4}{0}, \binom{1}{0}\right) = -1/4 < 0 \Rightarrow$$

ο M δεν ειναι μη αρνητικα ορισμενος, οποτε η μεθοδος δεν ειναι αλγεβρικα ευσταθης. Αφου $c_1 = 0 \neq 1 = c_2$ δεν ειναι ουτε ευσταθης

– ΤΕΛΟΣ $3^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ –