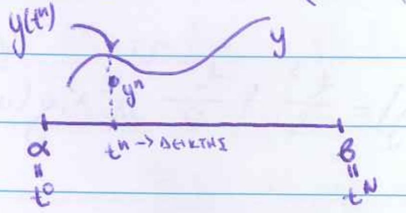
3/11/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[1]

Η μεθοδος του Euler

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υποθεση: Το προβλημα εχει μοναδικη λυση



Εστω $a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = b$ ενας διαμερισμος του $[a,b]$

Ομοιομορφος Διαμερισμος: Αποστασεις διαδοχικων κομβων σημειων ισαπεχουν

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$ (βημα διαμερισμου)

$t^n := a + nh \quad n = 0, \dots, N \quad | \quad t^{n+1} - t^n = h \quad \forall n$

Μεθοδος του Euler: Δινει προσεγγισεις y^i των $y(t^i)$ ως εξης:

$$\begin{cases} \cdot\ y^0 = y_0 \\ \cdot\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

(Για μη ομοιομορφο διαμερισμο: $y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) f(t^n, y^n)$

πληθος πραξεων → Κοστος: Ενας υπολογισμος της f ανα βημα

Τροποι Κατασκευής της Μεθόδου

1ος Τρόπος: με αριθμητική διαφόριση (παραγώγιση)

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$
$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\underbrace{t^{n+1} - t^n}_{h}}$$

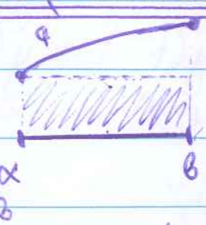
Άρα $\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$

Αντικαθιστούμε τα $y(t^i)$ με προσεγγίσεις y^i και το $\approx$ με $=$ και παίρνουμε $\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n) \Rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

2ος Τρόπος: με αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y(t)\,dt}_{y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Αριστερός Τύπος Ορθογωνίου



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\,\varphi(a)$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$
$$\approx \underbrace{(t^{n+1} - t^n)}_{h} f(t^n, y(t^n))$$
$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστούμε τα $y(t^i)$ με προσεγγίσεις y^i και το $\approx$ με $=$ και παίρνουμε $y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

– Τέλος Διάλεξης –

8/11/2016 - ΤΡΙΤΗ

[2] - Αρχη Διαλεξης -

Η μεθοδος Euler:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ $y^m \approx y(t^m)$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

3ος Τροπος: αναπτυγμα Taylor

Εχουμε $y(t^{n+1}) = y(t^n) + \overbrace{(t^{n+1} - t^n)}^{h} y'(t^n) + \frac{\overbrace{(t^{n+1} - t^n)^2}^{h^2}}{2} y''(\xi_n)$
με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\underline{y'(t^n)} \to f(t^n, y(t^n))$

$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))$

Αντικαθιστουμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m (για $m = n$) και παιρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

Μελετη: Συνεπεια και Ευσταθεια $\Rightarrow$ Συγκλιση

$\Downarrow$

Εκτιμηση Σφαλματος

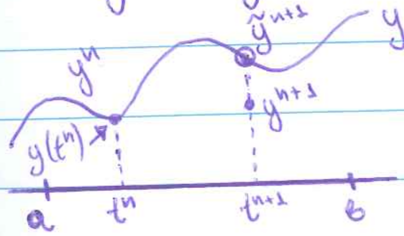
Συνέπεια: Το μέγεθος $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^n, y(t^n))$ ή το αντίθετό του λέγεται σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα της μεθόδου του Euler

?- Τι είναι το δ^n;

1ος Τρόπος: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \delta^n$ δηλαδή το δ^n είναι το μέγεθος της αποτυχίας της ακριβούς λύσης του προβλήματος να ικανοποιήσει την αριθμητική μέθοδο (σφάλμα συνέπειας)

2ος Τρόπος: Ξεκινώντας από την τιμή $y(t^n)$ της ακριβούς λύσης και κάνοντας ένα βήμα με την μέθοδο του Euler παίρνουμε μια άλλη προσέγγιση

$$\tilde{y}^{n+1} = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)).$$ Τότε το $\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1}$



Το τοπικό σφάλμα δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε γιατί εξαρτάται από την άγνωστη λύση y. Είναι όμως χρήσιμο για την μελέτη της μεθόδου

Μελέτη του σφάλματος συνέπειας:
↳ Έχουμε $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^n)$

Ανάπτυγμα Taylor:

1ος Τρόπος: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \overbrace{\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)}^{\text{Υπόλοιπο, σε σημειακή μορφή}}, \quad \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

Άρα $\delta^n = \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'}(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)\right] - \cancel{y(t^n)} - \cancel{hy'}(t^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$. Επομένως $|\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \cdot \underbrace{\max_{a\le t\le b} |y''(t)|}_{M}$

$\Rightarrow \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$

(μόνο για βαθμωτές περιπτώσεις)

Αλλά, αυτή η μορφή του υπολοίπου του αναπτύγματος Taylor δεν ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις.

<u>2ος Τρόπος:</u> $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, y''(t)\, dt}_{\text{Υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή}}$

Τότε...

$$\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, y''(t)\, dt \Rightarrow$$

Ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις

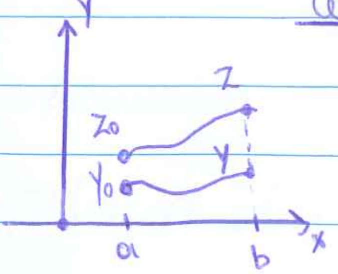
$$\Rightarrow |\delta^n| \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t) \overset{\le M}{\boxed{|y''(t)|}}\, dt \le M \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, dt}_{h^2/2}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{M}{2} \cdot h^2$$

Το δ^n φθίνει καθώς το $h\to 0$ όπως το h^2. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μέθοδος λέγεται <u>συνεπής.</u>

Συμπέρασμα: Η μέθοδος του Euler είναι συνεπής

<u>Ευστάθεια</u>



Θεωρούμε δύο ακολουθίες προσεγγίσεων

- $y^0, \dots, y^N$ και
- $z^0, \dots, z^N$ τ.ω.

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$, $n=0,\dots,N-1$ και $z^{n+1} = z^n + hf(t^n, z^n)$, $n=0,\dots,N$

Υποθεση: Η f ικανοποιει τη συνθηκη του Lipschitz ως προς y, ομοιομορφα ως προς t.

Δηλαδη... $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Η μεθοδος λεγεται ευσταθης αν υπαρχει σταθερα C ανεξαρτητη των h και N τω

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C|y^0 - z^0|$$

Ισχυρισμος: Η μεθοδος του Euler, ειναι ευσταθης

Αφαιρωντας λοιπον κατα μελη τις σχεσεις των y^{n+1} και z^{n+1}...

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+Lh)|y^n - z^n| \Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+Lh)|y^n - z^n| \Rightarrow$$

Επαγωγικα $\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (1+Lh)^n |y^0 - z^0| \quad n = 0, \ldots, N$

Τωρα... $1 + x \leq e^x$ για $x \geq 0$

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \geq 1 + x$

- $\varphi(x) = e^x - x - 1$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(0) = 0 \\ &\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\varphi(x) \geq 0 \\ &\forall x \geq 0 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \varphi$ αυξουσα

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (e^{Lh})^n (y^0 - z^0) = e^{nLh} |y^0 - z^0|$$

$$= e^{L\underbrace{(nh)}_{\leq b-a}} |y^0 - z^0| \quad \text{αρα} \leq e^{L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

Αρα

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{\text{C ανεξαρτητο των } N \text{ και } h} |y^0 - z^0|$$

<u>Λήμμα</u>: (Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Εστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, d_2, \dots \ge 0$ ώς

(*) $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + K \quad , i = 0,1,2,\dots$

Τοτε ισχύει (**) $d_n \le d_0 e^{n\delta} + K \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \quad n = 0,1,2,\dots$

Αποδειξη: • Για $n=0$ η (**) παιρνει τη μορφή $d_n \le d_0$ που προφανώς ισχυει

• Εστω λοιπον $n \ge 1$

Ισχυρισμος: (+) $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$

Επαγωγή: $n=1$: $d_1 \le (1+\delta) d_0 + K$ (ισχυει συμφωνα με (*))

$n \to n+1$: $d_{n+1} \underset{(*)}{\le} (1+\delta) d_n + K \underset{\text{υποθεση επαγωγης}}{\le} (1+\delta)\{(1+\delta)^n d_0 + K[1+(1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]\} + K$

$= (1+\delta)^{n+1} + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^n]$ ισχυει και για $n+1$ η (+)

Απο τη σχεση αυτή, (+), παιρνουμε

$$d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K \underbrace{[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]}_{\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} &= S \\ \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \omega^n &= \omega S \\ \omega S - S = \omega^n - 1 \Rightarrow S &= \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} \end{aligned} \right\} \ominus$$

$$\Rightarrow d_n \le (\overbrace{1+\delta}^{\le e^\delta})^n d_0 + K \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} \le d_0 e^{n\delta} + K \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

Εκτίμηση του Σφάλματος (Συγκλιση)

Προκύπτει ανδιαφορεας ευστάθεια και συνέπεια της μεθόδου

Θεώρημα: Εστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t.

· Εστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση

· Αν $y^0, \ldots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler (ΕΕ) τοτε ισχυει η εκτίμηση σφάλματος.

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h \quad \text{με } M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

Απόδειξη:

$$\begin{cases} \cdot\ y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + \delta^n \\ \cdot\ \max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| = \frac{M h^2}{2} \\ \cdot\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \end{cases}$$

$$y(t^{n+1}) - y^{n+1} = (y(t^n) - y^n) + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right] + \delta^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(t^{n+1}) - y^{n+1}| \le (1 + Lh)|y(t^n) - y^n| + \delta^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(t^{n+1}) - y^{n+1}| \le (1 + Lh)|y(t^n) - y^n| + \underbrace{\frac{M}{2} h^2}_{k}$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα έχουμε:

$$|y(t^n) - y^n| \le \underbrace{|y(t^0) - y^0|}_{=0} e^{nLh} + \frac{M}{2} h^{\cancel{2}} \frac{e^{nLh} - 1}{L\cancel{h}} \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h$$

– Τέλος Διάλεξης –

10/11/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[3] - Αρχη Διαλεξης -

Μεθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad N \in \mathbb{N},\ h := \frac{b-a}{N}$$

$$t^n := a + nh, \quad n = 0, \ldots, N$$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) & n = 0, \ldots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$$

Τοπικο Σφαλμα - Σφαλμα Συνεπειας

$$e^n = y(t^n) - y^n, \quad n = 0, \ldots, N$$

Σφαλμα - Ολικο Σφαλμα

- Διακριτοποιησης
- Προσεγγισης

Εκφραση Σφαλματος

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]}_{=C} h$$

$$M = \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

(*) $$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le C \cdot h^{1}$$ εις την πρωτη

Τάξη (ακρίβειας) της μεθόδου : $p \geq 1$

Ερώτημα: Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του h στην έκφραση ⊛;

↳ Αν $M=0$ δηλαδή $y \in P_1$ τότε το σφάλμα είναι 0

Απάντηση: Γενικά όχι (άρα $p \leq 1$)

Παράδειγμα: $\begin{cases} y'(t) = 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Λύση: $y(t) = t^2$

(Ελέγχεται ώστε: $y''(t) = 2$, σταθερή)

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = n \cdot h$, $n = 0, \dots, N$

Μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^0 = 0 \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot 2t^n, & n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

$y^{n+1} = y^n + 2nh^2$, $n = 0, \dots, N-1$

Ισχυρισμός: $y^n = y^0 + 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] \cdot h^2$, $n = 0, \dots, N$

(τετριμμένη επαγωγή)

Άρα $y^n = 0 + 2\,\frac{(n-1) \cdot n}{2}\,h^2$, $n = 0, \dots, N$

$y^n = (n-1)nh^2$, $n = 0, \dots, N$

Ιδιαίτερα: $y^N = (N-1)Nh^2 = (N-1)\underbrace{Nh}_{1} \cdot h = (N-1)h = \underbrace{Nh}_{1} - h = 1 - h$

οπότε $y(t^N) - y^N = y(\underbrace{1}_{y=t^2}) - y^N = 1 - y^N = 1 - 1 - h = h$

Συνεπώς το $|y(t^N) - y^N| \geq \hat{c}\,h$ με $c = 1$

Επομένως έχουμε $\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \geq \hat{c}\cdot h$

Ισχυρισμός: $p \leq 1$

Έστω ότι ισχύει...
$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \leq \hat{c}\, h^{1+\varepsilon}$ με $\varepsilon>0$

Τότε $ch \leq \hat{c}\, h^{1+\varepsilon} \Leftrightarrow c \leq \underbrace{\hat{c}\, h^{\varepsilon}}_{\downarrow h\to 0 \atop 0}$ άρα $c\leq 0$ ↯ Άτοπο

Συμπέρασμα: Η τάξη είναι ακριβώς 1, $p=1$

Η τάξη του τοπικού σφάλματος είναι $p+1$ $(=2)$

Ερώτημα: Τι αλλάζει στην περίπτωση προβλημάτων αρχικών τιμών για συστήματα ΣΔΕ (η απόλυτη τιμή αντικαθίσταται από μια νόρμα).

Απάντηση: Η παράσταση για το τοπικό σφάλμα

Σφάλμα Συνέπειας: $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$

Βαθμωτή Περίπτωση

$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h y'(t^n)$

Ανάπτυγμα Taylor

$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

άρα $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ (αυτή η παράσταση δεν ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις)

Διανυσματική Περίπτωση

$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^n)$

$y_i = y_i(t^n) - hy_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{ni})$ Επομένως

$\delta^n = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$ Για την νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$:

$\|\delta^n\|_\infty = \frac{h^2}{2} \max_{1\le i\le m} |y_i''(\xi_{ni})| \le \frac{h^2}{2} \max_{a\le t\le b} \max_{1\le i\le m} |y_i''(t)|$

Επομένως $|\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \underbrace{\max_{a\le t\le b} \|y''(t)\|_\infty}_{M}$

Για τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|$:
Υπάρχει σταθερά C_1 ώστε $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| \le C_1 \|x\|_\infty$

Επομένως $\|\delta^n\| \le C_1 \cdot \|\delta^n\|_\infty \le C_1 \frac{h^2}{2} M$

Εναλλακτικά:
$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) y''(t)\,dt$

Ισχύει και για διανυσματικές συναρτήσεις

Άρα $\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) y''(t)\,dt$ οπότε $\|\delta^n\| \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \|y''(t)\|\,dt$

Επομένως με $\tilde{M} = \max_{a\le t\le b} \|y''(t)\|$ έχουμε

$\|\delta^n\| \le \tilde{M} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\,dt = \frac{h^2}{2} \tilde{M}$

Μεθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(0) = y_0 & N \in \mathbb{N},\ h = \frac{b-a}{N},\ t = a + nh,\ n = 0, \dots, N \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) & n = 0, \dots, N \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ, Α-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ, Β-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Μια αριθμητική μεθοδος λεγεται μονοβηματικη αν για τον υπολογισμο του y^{n+1} χρησιμοποιει μονο την προσεγγιση y^n (οχι την $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots$)

1ο Προβλημα Δοκιμης:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t > 0 \\ y(0) = 1, & \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$ Λυση: $y(t) = e^{\lambda t}$

Ιδιοτητα: Αν $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ τοτε η $|y(t)|$ ειναι φθινουσα
$\left(|y(t)| = e^{(\mathrm{Re}\,\lambda) t}\right)$

2ο Προβλημα Δοκιμης:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ αν $\forall t \in [a,b]\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$
$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$

Ιδιοτητα: $\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(a) = z_0 \end{cases}$, Τοτε η $\|y(t) - z(t)\|$ ειναι φθινουσα

Ορισμός: Α-Ευστάθεια

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Α-ευσταθής αν, όταν εφαρμόσεται στο 1ο Πρόβλημα Δοκιμής με $Re\,\lambda \leq 0$, για οποιοδήποτε βήμα $h>0$ δίνει προσεγγίσεις

$y^0, y^1, \ldots$ τω η $(|y^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι φθίνουσα

Ορισμός: Β-Ευστάθεια

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Β-ευσταθής αν, όταν εφαρμόσεται στο 2ο Πρόβλημα Δοκιμής με οποιοδήποτε βήμα h δίνει προσεγγίσεις

$y^0, y^1, \ldots, y^N$

$z^0, z^1, \ldots, z^N$ τω $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$ $n=0,\ldots,N-1$

Δηλαδή η $\|y^n - z^n\|$ είναι φθίνουσα.

Η μέθοδος μιμείται την συμπεριφορά της ακριβούς λύσης.

Γράφουμε το 1ο πρόβλημα δοκιμής σαν μορφή

$$\oplus \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ y_1(0)=1, \; y_2(0)=0 \end{cases}$$

με $\lambda = a + ib$, $y(t) = y_1(t) + \lambda y_2(t)$

Αν $Re\,\lambda \leq 0$ τότε ικανοποιείται η συνθήκη που έχουμε στο 2ο πρόβλημα δοκιμής

Οι αριθμητικές μέθοδοι που εφαρμόζονται στο 1ο πρόβλημα δοκιμής είτε στο $\oplus$ δίνουν τις ίδιες προσεγγίσεις

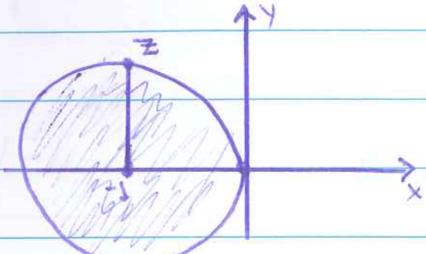
Συμπέρασμα: Από την Β-ευστάθεια έπεται η Α-ευστάθεια. Κάθε Β-ευσταθής μέθοδος είναι και Α-ευσταθής. Το αντίστροφο δεν είναι γενικά σωστό. (Θα δούμε Α-ευσταθείς μεθόδους που δεν είναι Β-ευσταθείς)

Ισχυρισμος: Η μεθοδος του Euler (οπως και ολες οι αμεσες μεθοδοι) δεν ειναι Α-ευσταθης, οποτε δεν ειναι και Β-ευσταθης

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n & n=0,1 \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

Αρα $y^{n+1} = (1+\lambda h)y^n \Rightarrow |y^{n+1}| = |1+\overbrace{\lambda h}^{z}|\,|y^n|$

Re $\lambda \le 0$ Αν $z=\lambda h \in D$ τοτε $|1+z| \le 1$ οποτε $|y^{n+1}| \le |y^n|$



Αν $z \in \mathbb{C}_- = \{\tilde{z} \in \mathbb{C},\ Re\,\tilde{z} \le 0\}$ και $z \in D$ τοτε

$|1+z| = |1+\lambda h| > 1$ οποτε $|y^{n+1}| > |y^n|$

Αρα η μεθοδος δεν ειναι Α-ευσταθης ουτε Β-ευσταθης

Ορισμος: Περιοχη Ευσταθειας S

Περιοχη Ευσταθειας μιας μεθοδου λεγεται το μεγαλυτερο υποσυνολο του $\mathbb{C}$ τ.ω. αν η μεθοδος εφαρμοσθει στο πρωτο προβλημα δοκιμης και το $\lambda h \in S$ τοτε δινει προσεγγισεις $y^0, y^1, \dots$ τ.ω. η $(|y^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ να ειναι φθινουσα

Παρατηρηση: Μια μονοβηματικη μεθοδος ειναι Α-ευσταθης ανν η περιοχη ευσταθειας της S περιεχει το $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z \le 0\}$

Περιοχη Ευσταθειας της Μεθοδου του Euler

$y^{n+1} = (1+\lambda h)y^n$

$r(z) := 1+z$, συναρτηση ευσταθειας της μεθοδου του Euler

Τοτε $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n \Rightarrow |y^{n+1}| = |r(\lambda h)| \cdot |y^n|$

Αρα

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq 1 \} =$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z-(-1)| \leq 1 \}$$ = ο δισκος με κεντρο το -1 και ακτινα 1 στο μιγαδικο επιπεδο

- Τελος Διαλεξης -

15/11/2016 - ΤΡΙΤΗ

[4] - Αρχη Διαλεξης -

(+) ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ EULER

- Η μεθοδος ειναι αμεση, δηλαδη για τον υπολογισμο του y^{n+1} δεν απαιτειται η επιλυση καποιας εξισωσης
- Προγραμματιζεται πολυ ευκολα
- Απαιτει μονο εναν υπολογισμο της f ανα βημα

(-) ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ EULER

- Εχει χαμηλη ταξη ακριβειας $p=1$, επομενως για να επιτυχουμε υψηλη ακριβεια (δηλ. μικρο σφαλμα) πρεπει να χρησιμοποιησουμε μικρο βημα h. Συνεπεια αυτου ειναι η μεγαλη αυξηση του κοστους.
- Επισης λογω των πολλων υπολογισμων οι προσεγγισεις επηρεαζονται απο τα σφαλματα στρογγυλευσης
- Η μεθοδος δεν ειναι B-ευσταθης, ουτε και A-ευσταθης και μαλιστα εχει πολυ μικρη περιοχη ευσταθειας, τον δισκο στο μιγαδικο επιπεδο με κεντρο το σημειο -1 και ακτινα 1.

Η Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Τρόποι Κατασκευής της Μεθόδου:

1ος Τρόπος: Με αριθμητική διαφόριση (παραγώγιση)

Έχουμε $y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ και

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Επομένως $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ Αντικαθιστούμε

το $\approx$ με $=$ και τις $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε

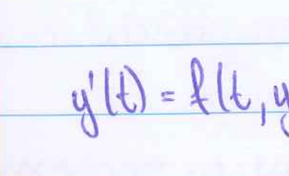
$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Rightarrow y^{n+1} - y^n = h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

2ος Τρόπος: Με αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Δεξιός Τύπος Ορθογωνίου



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\,\varphi(b)$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τις $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε

$$y^{n+1} - y^n = h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

3ος Τροπος: αναπτυγμα Taylor

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) + (t^n - t^{n+1})\, y'(t^{n+1}) + \frac{(t^n - t^{n+1})^2}{2}\, y'(\xi_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^n) \approx y(t^{n+1}) - h\, \underbrace{y'(t^{n+1})}_{\to f(t^{n+1},\, y(t^{n+1}))}$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστουμε το $\approx$ με $=$ και τις $y(t^n)$ με y^n και παιρνουμε $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$

Υπαρξη και Μοναδικοτητα των Προσεγγισεων

Χωρις υποθεσεις στην f και/η στο βημα h οι προσεγγισεις δεν ειναι καλα ορισμενες

Παραδειγμα: $y' = \lambda y$

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Rightarrow (1 - \lambda y)\, y^{n+1} = y^n$$

για $\lambda > 0$ και $h = 1/\lambda$ εχουμε $0 - y^{n+1} = y^n$

Αν $y^n \neq 0$ τοτε δεν υπαρχει λυση y^{n+1}. Αν $y^n = 0$ τοτε καθε $y^{n+1} \in \mathbb{R}$ ειναι λυση.

1η Περιπτωση: Η f ικανοποιει την συνθηκη του Lipschitz ως προς y, ομοιομορφα ως προς t, με σταθερα L

Ισχυρισμος: Για $h > 0$ τω $Lh < 1$ οι προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) := y^n + h f(t^{n+1}, x)$, τότε η $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ γράφεται στην μορφή $y^{n+1} = g(y^{n+1})$

Αν δο η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x) - g(\tilde{x}) = h\left[f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |g(x) - g(\tilde{x})| = h \underbrace{|f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})|}_{\leq L|x - \tilde{x}|}$$

<1

$\Rightarrow \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ $|g(x) - g(\tilde{x})| \leq Lh|x - \tilde{x}|$. Επομένως η g είναι συστολή οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, το y^{n+1}

<u>2η Περίπτωση:</u> Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$$\forall t \in [a,b] \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \text{ ισχύει}$$

$$\left[f(t,x) - f(t,\tilde{x})\right](x - \tilde{x}) \leq 0$$

Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες (χωρίς περιορισμό στο h)

Ορίζω μια συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x - y^n - h f(t^{n+1}, x)$

Τότε η $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ γράφεται στη μορφή $g(y^{n+1}) = 0$. Αν δο η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

<u>> Μοναδικότητα Ρίζας:</u> Η συνάρτηση g είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση (γιατι η $-y - y^n - h f(t^{n+1}, x)$ είναι αύξουσα και η x είναι γνήσια αύξουσα) άρα η g έχει το πολύ μια ρίζα

› **Ύπαρξη Ρίζας:** $g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, x)$

Η g είναι συνεχής (η f υποθέτεται ότι είναι συνεχής).
Αν δο η g παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής θα μηδενίζεται σε κάποιο σημείο.

i) Για $x<0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \geq f(t^{n+1}, 0)$ οπότε
$-hf(t^{n+1}, x) \leq -hf(t^{n+1}, 0)$ άρα

$$g(x) \leq x \underbrace{- y^n - hf(t^{n+1}, 0)}_{\text{σταθερά}} \longrightarrow -\infty, \text{ για } x \to -\infty$$

Συμπέρασμα: Η g παίρνει και αρνητικές τιμές

ii) Για $x \geq 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \leq f(t^{n+1}, 0)$ οπότε
$-hf(t^{n+1}, x) \geq -hf(t^{n+1}, 0)$ άρα

$$g(x) \geq x \underbrace{- y^n - hf(t^{n+1}, 0)}_{\text{σταθερά}} \longrightarrow +\infty, \text{ για } x \to +\infty$$

Συμπέρασμα: Η g παίρνει και θετικές τιμές

Συνέπεια Μεθόδου: $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\underbrace{f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}_{y'(t^{n+1})}$

$\Rightarrow \delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1})$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το t^{n+1} έχουμε

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) - hy'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Επομένως $\delta^n = \cancel{y(t^{n+1})} - \left[\cancel{y(t^{n+1})} - \cancel{hy'(t^{n+1})} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right] - \cancel{hy'(t^{n+1})} \Rightarrow$

$\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ Επομένως $\max\limits_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{h^2}{2} \underbrace{\max\limits_{a \leq t \leq b} |y''(t)|}_{M}$

› Τάξη ακρίβειας Μεθόδου: 1

Ευστάθεια Μεθόδου:

$$\Theta \begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ z^{n+1} = z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \end{cases}$$

Άρα $y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]$ (*)

1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t

Τότε $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \underbrace{|f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})|}_{\leq L|y^{n+1} - z^{n+1}|}$

$\Rightarrow (1-Lh)|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$

Για $h < 1/L$ έχουμε $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1-Lh}|y^n - z^n|$ (**)

Ισχυρισμός: για $Lh < 1/2$ ισχύει $\frac{1}{1-Lh} \leq 1 + 2Lh$ ✓

$\left[\frac{1}{1-Lh} \leq 1+2Lh \Leftrightarrow 1 \leq (1-Lh)(1+2Lh) \Leftrightarrow 1 \leq 1 + Lh - 2(Lh)^2 \Leftrightarrow 0 \leq Lh(1-2Lh)\right]$

Άρα $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+2Lh)|y^n - z^n|$.

Επαγωγικά παίρνουμε $|y^n - z^n| \leq (1+2Lh)^n |y^0 - z^0| = e^{2Lnh}$

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq \underbrace{e^{2L(b-a)}}_{c''} |y^0 - z^0|$$

2η Περίπτωση: Η $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b] \; \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m, \; (f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

όπου $(\cdot,\cdot)$ ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ ευκλείδεια νόρμα

Παίρνουμε στην (*) το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1} - z^{n+1}$

$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 = (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) + h\underbrace{\left(f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}), y^{n+1} - z^{n+1}\right)}_{\leq 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^{\cancel{2}} \underset{\text{Cauchy Swartz}}{\leq} \|y^n - z^n\| \cdot \cancel{\|y^{n+1} - z^{n+1}\|} \Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$

Ιδιαίτερα η μέθοδος είναι B-ευσταθής

Ευσταθεια:

$$\max_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le \|y^0 - z^0\| \quad (\text{το } C=1)$$

και εφοσον η μεθοδος ειναι Β ευσταθης ειναι και Α ευσταθης

Ερωτημα: Ποια ειναι η περιοχη ευσταθειας S, της μεθοδου;

1ο Προβλημα Δοκιμης: $\begin{cases} y' = \lambda y & t \ge 0 \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Εχουμε $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h} y^n$

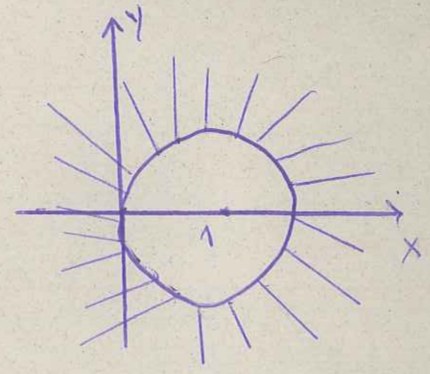
Θετουμε $r(z) = \frac{1}{1-z}$ (συναρτηση ευσταθειας της μεθοδου) και

εχουμε $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$

Αρα $S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1\}$

$S = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \le 1\}$

$S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \ge 1\}$



Συμπερασμα - Απαντηση: Η περιοχη ευσταθειας της πεπλεγμενης μεθοδου του Euler ειναι η περιφερεια του κυκλου με κεντρο 1 και ακτινα 1 και το εξωτερικο του ανοιχτου δισκου

- Τελος Διαλεξης -

22/11/2016 - ΤΡΙΤΗ

[5] - Αρχή Διάλεξης -

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad N \in \mathbb{N} \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad t^n := a + nh, \quad n = 0, \dots, N$$

<u>Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler</u>

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \quad n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

→ Τάξη ακρίβειας $p = 1$

→ B- Ευσταθής

↳ A-Ευσταθής

<u>Εκτίμηση Σφάλματος (σύγκλιση)</u>

• 1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t

Συνδυάζοντας Ευστάθεια και Συνέπεια της μεθόδου, όπως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler, αποδεικνύουμε ότι για h ώστε $Lh \leq 1/2$, ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L} \left[e^{2L(b-a)} - 1 \right] h \quad \text{με} \quad M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$$

• 2η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

Έχουμε
$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

Με $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n$, αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right] + \delta^n \quad \text{(εξίσωση σφάλματος)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $y(t^{n+1}) - y^{n+1} = \varepsilon^{n+1}$ έχουμε

$$|\varepsilon^{n+1}|^2 \le \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \underbrace{h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \cdot \left[y(t^{n+1}) - y^{n+1}\right]}_{\le 0} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1}$$

Άρα $|\varepsilon^{n+1}|^2 \le \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^2 \le |\varepsilon^n| \cancel{|\varepsilon^{n+1}|} + \delta^n \cancel{|\varepsilon^{n+1}|}$

Συμπέρασμα: $|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + |\delta^n|$

Επομένως: $|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + \max\limits_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{M}{2} h^2$

Επαγωγικά έχουμε $|\varepsilon^n| \le \cancel{|\varepsilon^0|} + n \max\limits_{0 \le n \le N-1} |\delta^n|$, $\varepsilon^0 = 0$

$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le n \cdot \frac{M}{2} h^2 \Rightarrow |\varepsilon^n| \le N \frac{M}{2} h^2 \Rightarrow \max\limits_{0 \le n \le N} |\varepsilon^n| \le \frac{NMh^2}{2} = \underbrace{(Nh)}_{b-a} \frac{M}{2} h$

$\Rightarrow \max\limits_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{b-a}{2} M h$

> Άλλες χρήσιμες μέθοδοι, χαμηλής τάξης ακρίβειας

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \qquad n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

→ Πεπλεγμένη μέθοδος

→ Τάξη ακρίβειας $p = 2$

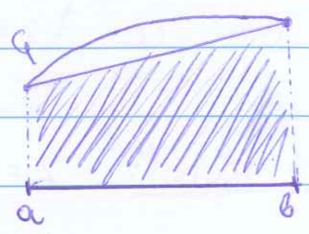
· Τροπος Κατασκευης

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))\right]$$

Τυπος του Τραπεζιου



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(\varphi(a)+\varphi(b))$$

Αντικαθιστωντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^m $(m=n, n+1)$ οδηγουμαστε στην μεθοδο

Ισχυρισμος: Η μεθοδος του τραπεζιου ειναι Α-ευσταθης

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow$$

$$y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\, y^n$$

Συναρτηση Ευσταθειας:

$$r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

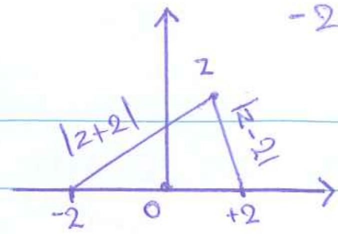
Οποτε $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$

Περιοχη Ευσταθειας:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z+2|}{|2-z|} \le 1\right\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C} : |z+2| \le |z-2|\}$$

Βοηθητικος Ισχυρισμος: $S = \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0\}$



1ος Τροπος:

Τα σημεια z με $Re\, z = 0$ εχουν την ιδιοτητα $|z+2| = |z-2|$. Τα σημεια $z \in \mathbb{C}$ με $Re\, z \leq 0$ οτι το $|z+2| \leq |z-2|$

2ος Τροπος: $z = x + yi$

$$|z+2| \leq |z-2| \Leftrightarrow |(x+2) + iy| \leq |(x-2) + iy| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x+2)^2 + \cancel{y^2} \leq (x-2)^2 + \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{4} + 2x \leq \cancel{x^2} + \cancel{4} - 2x \Rightarrow 4x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

Ισχυρισμος: Η μεθοδος του τραπεζιου δεν ειναι Β-ευσταθης

$y'(t) = \lambda(t) y(t)$ με $\lambda(t) \leq 0$

Η $f(t,y) := \lambda(t) y$ ικανοποιει τη μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz

$$[f(t,x) - f(t,\tilde{x})](x - \tilde{x}) = \lambda(t)(x - \tilde{x})^2 \leq 0$$

Θεωρουμε μια ακολουθια $z^n := 0,\ n = 0, \dots$

Εχουμε $y^{n+1} = y^n + h/2\,[\lambda(t^n) y^n + \lambda(t^{n+1}) y^{n+1}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda(t^n)}{2}}{1 - \frac{h\lambda(t^{n+1})}{2}}\, y^n$$

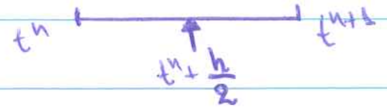
Αν το λ ειναι $h\lambda(t^n) = 8$ και $h\lambda(t^{n+1}) = -1$

τοτε $y^{n+1} = \frac{1-\frac{8}{2}}{1+\frac{1}{2}} y^n = -\frac{3}{\frac{3}{2}} y^n = -2y^n$, για $y^n \neq 0$

$$|y^{n+1}| = 2|y^n| > |y^n|$$

H ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right) & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

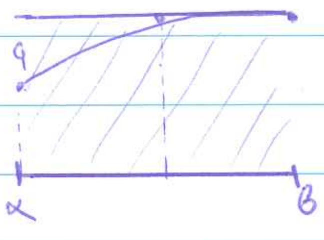


→ Πεπλεγμένη
→ Τάξη ακρίβειας $p=2$

• Τρόπος Κατασκευής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$



$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf\left(t^n + \frac{h}{2}, y\left(t^n + \frac{h}{2}\right)\right) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (b-a)\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{y(t^n) + y(t^{n+1})}{2}\right)$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και ...

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής

$$\left.\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right) \\ z^{n+1} &= z^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{z^n + z^{n+1}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow$$

$$y^{n+1}-z^{n+1}=(y^n-z^n)+h\left[f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{y^n+y^{n+1}}{2}\right)-f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{z^n+z^{n+1}}{2}\right)\right]$$

Παιρνουμε του ευκλειδιο εσωτερικο γινομενο με $\frac{1}{2}\left[(y^n+y^{n+1})-(z^n+z^{n+1})\right]$ και εχουμε

$$\frac{1}{2}\left((y^{n+1}-z^{n+1})-(y^n-z^n),\ (y^n+y^{n+1})-(z^n+z^{n+1})\right)=$$

$$=h\underbrace{\left(f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{y^n+y^{n+1}}{2}\right)-f\left(t^n+\frac{h}{2},\frac{z^n+z^{n+1}}{2}\right),\ \frac{y^n+y^{n+1}}{2}-\frac{z^n+z^{n+1}}{2}\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow\left((y^{n+1}-z^{n+1})-(y^n-z^n),\ (y^{n+1}-z^{n+1})+(y^n-z^n)\right)\leq 0$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2-\|y^n-z^n\|^2\leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\|\leq\|y^n-z^n\|$$

$$\left\{(x-y,x+y)=(x,x)+(x,y)-(y,x)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2\right\}$$

Ισχυρισμος: Στην περιπτωση της ΔΕ $y'(t)=\lambda y(t)$ οι μεθοδοι του τραπεζιου και του μεσου συμπιπτουν

(Ιδιαιτερα: Η περιοχη ευσταθειας S της μεθοδου του μεσου ειναι $\mathbb{C}_-$)

Τραπεζιου: $y^{n+1}=y^n+\frac{h}{2}\left[\lambda y^n+\lambda y^{n+1}\right]$

Μεσου: $y^{n+1}=y^n+h\lambda\frac{y^n+y^{n+1}}{2}$

- ΤΕΛΟΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΘΕΩΡΙΑΣ -

[ΑΣΚΗΣΕΙΣ]

Ασκηση 2.9:

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) & t \geq 0 \\ y'(t) = x(t) & t \geq 0 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(Λυση: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$)

α) ΝΔΟ $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$, $t \geq 0$

$$\left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right)' = \left([x(t)]^2\right)' + \left([y(t)]^2\right)' =$$
$$= 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) =$$
$$= -2x(t)\,y(t) + 2y(t)\,x(t) = 0$$

Συμπερασμα: $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = c$ $t \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$

για $t=0$ εχουμε $x(0)^2 + y(0)^2 = 1$, οποτε $c = 1$

β) Μεθοδος Euler:

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - h y^n \\ y^{n+1} &= y^n - h x^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (x^{n+1})^2 &= (x^n - h y^n)^2 \\ (y^{n+1})^2 &= (y^n - h x^n)^2 \end{aligned}\right\} \textcircled{+} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 - 2h x^n y^n + h^2 (y^n)^2 + (y^n)^2 + 2h x^n y^n + h^2 (x^n)^2$$
$$= (1+h^2)\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$$

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (1+h^2)\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n \underbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right]}_{1}$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h)^n \longrightarrow \infty \quad \text{οταν} \quad n \to \infty$$

— Τελος Διαλεξης —

[ΑΣΚΗΣΕΙΣ] 24/11/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[6] - Αρχη Διαλεξης -

(συνεχεια ασκησης 2.9)

γ) Μεθοδος του Τραπεζιου:

$(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1 \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n &= \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιαζουμε την πρωτη σχεση επι $x^{n+1} + x^n$ και την δευτερη επι $y^{n+1} + y^n$ και προσθετουμε. Οποτε παιρνουμε

$$(x^{n+1} - x^n)(x^{n+1} + x^n) + (y^{n+1} - y^n)(y^{n+1} + y^n) = 0$$
$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 - (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

Συμπερασμα: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^0)^2 + (y^0)^2 \quad n \in \mathbb{N}_0$

οποτε $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1, \ n \in \mathbb{N}_0$

(Παρατηρηση: $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

ο M ειναι αντισυμμετρικος πινακας. Για τη γενικη περιπτωση βλεπε ασκηση 2.14) δ) Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler:

$(x^n)^2+(y^n)^2 \to 0 \quad n\to\infty$

$$\left.\begin{array}{l} x^{n+1}=x^n-hy^{n+1} \\ y^{n+1}=y^n+hx^{n+1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{n+1}+hy^{n+1}=x^n \\ y^{n+1}-hy^{n+1}=y^n\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(x^{n+1}+hy^{n+1})^2+(y^{n+1}-hx^{n+1})^2=(x^n)^2+(y^n)^2$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2+h^2(y^{n+1})^2+(y^{n+1})^2+h^2(x^{n+1})^2=(x^n)^2+(y^n)^2$$

$$\Rightarrow (1+h^2)\left[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2=\frac{1}{1+h^2}\left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]\right] \Rightarrow$$

επαγωγικά $\Rightarrow (x^n)^2+(y^n)^2=\frac{1}{(1+h^2)^n}\underbrace{\left[(x^0)^2+(y^0)^2\right]}_{=1} \Rightarrow (x^n)^2+(y^n)^2=\frac{1}{(1+h^2)^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Άσκηση 2.11:

$$\begin{cases} x'(t)=-2x(t)+y(t) & ,\ t\in[0,1] \\ y'(t)=2x(t)-2y(t) & ,\ t\in[0,1] \\ x(0)=x_0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler:

Ν.Δ.Ο $(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2\leq(x^n)^2+(y^n)^2$

Λύση: $\left.\begin{array}{l} x^{n+1}=x^n-2hx^{n+1}+hy^{n+1} \\ y^{n+1}=y^n+2hx^{n+1}-2hy^{n+1}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^n \\ y^n\end{pmatrix}+h\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1}\end{pmatrix}$$

Ο M είναι μη θετικά ορισμένος, δηλαδή
$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ (Mx, x) \le 0$ (Άσκηση 1.28)

Παίρνω το Ε.Γ. με το διάνυσμα $\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ και έχω

$$\left(\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) + h \underbrace{\left(M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right)}_{\le 0}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le \underbrace{x^n \cdot x^{n+1} + y^n \cdot y^{n+1} \le \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2} \cdot \sqrt{(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2}}_{\text{Ανισότητα Cauchy Swartz (CS)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2} \le \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2} \Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le (x^n)^2 + (y^n)^2$$

Άσκηση 2.12:

$$\begin{cases} y'(t) = My(t) & t \ge 0, \quad M \in \mathbb{R}^{m,m} \text{ μη θετικά ορισμένος} \\ y(0) = y_0 & \text{(παραπομπή σε άσκηση 1.27)} \end{cases}$$

• Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler:

1) $\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|, \ n \in \mathbb{N}_0$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot \underline{My^{n+1}}$ ↳ ένδειξη για το τι να "πάρω" στο Ε.Γ.

$$\Rightarrow (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n, y^{n+1}) + h \underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\le 0}$$
(M είναι μη θετικά ορισμένος)

$$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1}, y^{n+1})}_{\|y^{n+1}\|^2} \le (y^n, y^{n+1}) \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \le (y^n, y^{n+1}) \overset{CS}{\le} \|y^n\| \|y^{n+1}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^{\cancel{2}} \le \|y^n\| \cancel{\|y^{n+1}\|} \Rightarrow \|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$$

2) Μεθοδος του Μεσου ή του Τραπεζιου (συμπιπτουν)

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n + h/2, 1/2(y^n, y^{n+1}))$ $\quad y^{n+1} = y^n + h/2[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$

Μεσου: $y^{n+1} = y^n + hM(1/2(y^n, y^{n+1})) = y^n + \frac{h}{2} M(y^n + y^{n+1}) =$

$= y^n + \frac{h}{2}(My^n + My^{n+1}) \rightarrow$ Τραπεζιου

?- ΝΔΟ $\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$

$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} M(y^n + y^{n+1})$ → Ενδειξη για το α να παρω το Ε.Γ.

$\Rightarrow (y^{n+1}, y^{n+1} + y^n) = (y^n, y^n + y^{n+1}) + \frac{h}{2} \underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), y^n + y^{n+1})}_{\le 0}$

$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1}, y^{n+1} + y^n)} \le (y^n, y^n + y^{n+1}) \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \le \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$ ✓

$\|y^{n+1}\|^2, \cancel{(y^{n+1}, y^n)} \le \|y^n\|^2 + \cancel{(y^n, y^{n+1})}$

Ασκηση 2.14:

$\begin{cases} y'(t) = My(t) & t \ge 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ $\quad M \in \mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικος $\rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^m \ (Mx, x) = 0$, ασκηση 1.29)

Μεθοδος του Μεσου (η του τραπεζιου)

?- ΝΔΟ $\|y^n\| = \|y_0\|$, $n \in \mathbb{N}_0$

$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \boxed{M(y^n + y^{n+1})}$

$\Rightarrow (y^{n+1}, y^n + y^{n+1}) = (y^n, y^n + y^{n+1}) + \frac{h}{2} \underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), y^n + y^{n+1})}_{= 0}$

$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1}, y^n + y^{n+1})} = (y^n, y^n + y^{n+1}) \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| = \|y^n\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|y^n\| = \|y^0\| \quad n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \|y^n\| = \|y_0\|$

$\cancel{(y^{n+1}, y^n)} + \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 + \cancel{(y^n, y^{n+1})}$

Ασκηση 2.15:

$$\begin{cases} y' = -e^y & t \in [0,1] \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Πεπλεγμενη μεθοδος του Euler με βημα h

?- ΝΔΟ οι προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες

(Μεθοδολογια: 1) Ικανοποιει συνθηκη Lipschitz

2) Ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz)

Αρκει (συμφωνα με αυτα που καναμε στην θεωρια) η συναρτηση $f(t,y) = -e^y$ ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz.

Πραγματι: η $-e^y$ ειναι φθινουσα.

($f_y(t,y) = -e^y < 0$) οποτε η $f(t,\cdot)$ ειναι φθινουσα

Ασκηση 2.17:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Η f ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

Μεθοδος του Μεσου:

?- ΝΔΟ οι προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες

Λυση:

$$y^{n+1} = y^n + hf\Big(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})}_{z^{n+1}}\Big) \quad (\text{και } y^{n+1} = 2z^{n+1} - y^n)$$

1ος Τροπος: $2z^{n+1} - y^n = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, z^{n+1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, z^{n+1}\right)$ (*)

Οριζουμε την συναρτηση $g(x)=x-y^n-\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},x)$

Τοτε η (*) γραφεται στη μορφη $g(z^{n+1})=0$

Ανδο η g εχει ακριβως μια ριζα

Μοναδικοτητα: Η g ειναι γνησια αυξουσα οποτε εχει το πολυ μια ριζα

Υπαρξη Ριζας: Η g ειναι συνεχης

• Για $x\le 0$:

Εχουμε $f(t^n+\frac{h}{2},0)\le f(t^n+\frac{h}{2},x) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},0)\ge -\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},x)$

Αρα για $x\le 0$ εχουμε $g(x)=x-y^n\underbrace{-\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},x)}_{\le -\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},0)}$

$\Rightarrow g(x)\le \underbrace{x-y^n-\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},0)}\xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ για

Επομενως η g παιρνει και αρνητικες τιμες

• Για $x\ge 0$:

Εχουμε $f(t^n+\frac{h}{2},x)\le f(t^n+\frac{h}{2},0)$

$\Rightarrow -h/2\, f(t^n+\frac{h}{2},x)\ge -h/2\, f(t^n+\frac{h}{2},0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ για

Επομενως: $g(x)\ge x-y^n-\frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2},0)$ αρα η g παιρνει και θετικες τιμες

Συμφωνα με το Θεωρημα Ενδιαμεσων Τιμων η g παιρνει και την τιμη 0, δηλ. εχει τουλαχιστον μια ριζα.

Ασκηση 2.18

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ f'(x) \leq 0$$

Μεθοδος του Τραπεζιου

?- ΝΔΟ οι προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(y^{n+1})\right]$$

Λυση: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(y^{n+1})\right]$ (*)

Οριζουμε $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = x - y^n - \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(x)\right]$$

Τοτε η (*) γραφεται στη μορφη $g(y^{n+1}) = 0$

Ανδο g εχει ακριβως μια ριζα.

Μοναδικοτητα: Η g ειναι γνησια αυξουσα (αφου η f ειναι φθινουσα) συνεπως εχει το πολυ μια ριζα

Υπαρξη:

- Για $x \leq 0$:

εχουμε $f(0) \leq f(x) \Rightarrow -\frac{h}{2} f(0) \geq -\frac{h}{2} f(x)$

Επομενως

$$g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \boxed{\frac{h}{2} f(x)} \to \leq -\frac{h}{2} f(0)$$

$$\leq x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

Συμπερασμα: Η g παιρνει και αρνητικες τιμες

• Για $x \geq 0$:

εχουμε $g(x) \geq x - y^4 - \frac{h}{2} f(y_4) - \frac{h}{2} f(0) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

Η g παιρνει και θετικες τιμες
άρα απο το Θεωρημα Ενδιαμεσης Τιμης συμπεραινουμε
οτι η εξισωση εχει τουλαχιστον μια ριζα

Ασκηση 2.19:

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \varphi(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Μεθοδος του Τραπεζιου

?- ΝΔΟ προσεγγισεις ειναι καλα ορισμενες

Λυση: Η $f(t,y) = -y^3 + \varphi(t)$ ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz

π.χ. $\frac{\partial f(t,y)}{\partial y} = -3y^2 \leq 0$, αρα φθινουσα αρα ικανοποιει με Lipschitz

Το αποτελεσμα επεται οπως στην προηγουμενη ασκηση.

– ΤΕΛΟΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ –

– Τέλος Διάλεξης –