Τρίτη 27/9/2016

[1] - Αρχη Διαλεξης -

Προβληματα Αρχικων Τιμων [ΠΑΤ]

- **Δεδομενα:** $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχης συναρτηση
  $(a,b \in \mathbb{R},\ b > a)$
  $y_0 \in \mathbb{R}$
- **Ζητουμενο** $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχως παραγωγισιμη τω.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

⚠ ΚΑΘΕ ΤΕΤΟΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΛΕΓΕΤΑΙ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΤ

- **Υπαρξη και Μοναδικοτητα Λύσης**

Ειδική Περιπτωση: $f(t,y) = p(t)y + q(t)$
↳ γραμμικες Δ.Ε. 1ης το πολυ 1ου βαθμου, $p,q : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχεις

$$⊛ \begin{cases} y(t) = p(t)y(t) + q(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υποθεση ⟶ $p,q \in C[a,b]$

Ισχυρισμος: Το ⊛ εχει ακριβως μια λυση, την

↳ $y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left[y_0 + \int_a^t q(s) + e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \right]$ ή αλλιως

↳ $y(t) = y_0 e^{\int_a^t p(s)ds} + \int_a^t q(s) e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} ds \qquad a \le t \le b$

Για $q(t)=0$ $(a\le t\le b)$ η Δ.Ε. λεγεται ΟΜΟΓΕΝΗΣ

[1η Περιπτωση] **$p=0$ (συναρτηση $p=0$ $\forall t$)**

Τοτε $y'(t)=q(t) \rightsquigarrow y'(s)=q(s) \overset{\text{ολοκληρωνω}}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \underset{y(t)-y(a)}{\underbrace{\int_a^t y'(s)\,ds}} = \int_a^t q(s)\,ds \Rightarrow y(t)-y(a) = \int_a^t q(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=y(a)+\int_a^t q(s)\,ds}$$

[2η Περιπτωση] **p δεν ειναι αναγκαστικά 0 - ΓΕΝΙΚΗ**

Τοτε $y'(s)=p(s)y(s)+q(s) \Rightarrow y'(s)-p(s)y(s)=q(s)$

$$y'(s)-p(s)y(s)=q(s) \rightsquigarrow \underbrace{\varphi(s)y'(s)-\varphi(s)p(s)y(s)}=\varphi(s)q(s)$$

$$\varphi(s)y'(s)-\varphi(s)p(s)y(s) \xrightarrow{} \text{Ισως } \varphi'(s)$$

$\parallel$ Θυμαμαι πως $(fg)'=f'g+fg'$ $\parallel$

Ισχυει αν $\varphi'(s)=\varphi(s)p(s) \Rightarrow$ Αναζητω μια (γνωστη) συναρτηση με αυτο το χαρακτηριστικό

$\varphi'(s)=-\varphi(s)p(s)\ldots$

$$\varphi(s)=e^{-\int_a^s p(t)dt} \rightsquigarrow \varphi'(s)=\underset{\varphi(s)}{e^{-\int_a^s p(t)dt}}\cdot\underset{p(s)}{(-p(s))}=-e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot p(s)$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\right)'=e^{-\int_a^s p(t)dt}\cdot\underbrace{\left(-\int_a^s p(t)dt\right)'}_{=-p(s)}$$

(το κατω οριο α δε παιζει ρολο στην παραγωγιση)

Αρα... πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μελη με

$e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$ ⇝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

$$e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \cdot y'(s) - e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} p(s)y(s) = q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \Rightarrow$$

$$(fg)' \Rightarrow \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, y(s)\right)' = q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \xrightarrow{\text{ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΩ}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^t \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \cdot y(s)\right)' ds}_{} = \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, ds \Rightarrow$$

$$= e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot y(t) - \underset{\overset{\|}{e^0}}{e^{\boxed{-\int_a^a p(t)dt}}} \cdot y(a) = \qquad \rightarrow 0 \ \ // \int_a^a = 0$$

$$= e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot y(t) - y(a) \rightsquigarrow y(a) = y_0$$

Ετσι η σχεση γινεται...

$$e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot y(t) = y_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, ds \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{y_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, ds}{e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau}} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = e^{\int_a^t p(\tau)d\tau}\left[y_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, ds\right]}$$

- Τελος Διαλεξης -

Πεμπτη 29/9/2016

[2] -Αρχη Διαλεξης-

Ασκηση 1.1:

p, $[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχης
νδο οι λυσεις της Δ.Ε.

$\circledast$ $y'(t) = p(t)y(t)$ (ομογενης) ειναι της μορφης

$\oplus$ $y(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ $\forall\ t \in [a,b]$

Αποδειξη: 1. Καθε συναρτηση y της μορφης $\oplus$ αποτελει λυση της $\circledast$

$$y'(t) = \left(C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}\right)' = C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} \cdot \underbrace{\left(\int_a^t p(s)ds\right)'}_{p(t)} =$$

$$= C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} \cdot p(t),$$ της μορφης $\circledast$

2. Καθε λυση της $\circledast$ ειναι της μορφης $\oplus$:

- Εστω y η λυση της εξισωσης $\circledast$
- Θετουμε $u(t) = y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}$

↳ Νδο u ειναι σταθερη ($u'(t) = 0$) οποτε $u(t) = c$
δλδ

$$\begin{cases} C_1 = y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} \quad \text{και} \\ y(t) = c \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} \end{cases}$$

Εχουμε $u'(t) = \left(y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)' =$

$= y'(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} + y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\overset{\longrightarrow -p(t)}{\left(-\int_a^t p(s)\,ds\right)} =$

$= y'(t)\,\underline{e^{-\int_a^s p(s)ds}} - y(t)\,\underline{e^{-\int_a^t p(s)ds}}\;p(t) -$

$= e^{-\int_a^s p(s)ds}\left[y'(t) - p(t)y(t)\right] = 0$ αρα ειναι ονεως σταθερή

$\overset{\|}{0}$

$y'(t) = p(t)y(t)$

Ασκηση 1.2:

⊛ $y'(t) = p(t)y(t) + q(t) \qquad a \le t < b$

Νδο οι λυσεις της ΔΕ ⊛ ειναι της μορφης

⊕ $y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds}\left[c_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right]$

Αποδειξη:

1. Οι συναρτησεις της μορφης ⊕ ειναι λυσεις της ⊛

$y'(t) = \left(e^{\int_a^t p(s)ds}\right)'\left[c_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right] +$

$+ e^{\int_a^t p(s)ds}\left[c_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right]' =$

1

$= p(t)\underbrace{e^{\int_a^s p(s)ds}\cdot\left[c_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right]}_{y(t)} + \underset{\sim}{e^{\int_a^t p(s)ds}}\cdot q(t)\cdot\underset{\sim}{e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau}}$

$= p(t)y(t) + q(t)$

2. Θέλω ν.δ.ο. ∄ άλλες λύσεις.
Κάθε λύση $\tilde{y}$ της ⊛ είναι της μορφής ⊕

Θεωρώ μια λύση της μορφής ⊕ και θέτω $u = \tilde{y} - y$. Τότε έχουμε $u'(t) = \tilde{y}'(t) - y'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u'(t) = p(t)\tilde{y}(t) + \cancel{q(t)} - p(t)y(t) - \cancel{q(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(t) = p(t)(\tilde{y}(t) - y(t)) = p(t)u(t)$$

Άρα η u είναι λύση της ανισεστάχης ομογενούς Δ.Ε. οπότε σύμφωνα με την άσκηση 1.1

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$$

$\{u(t) = \tilde{y}(t) - y(t)\}$

Επομένως $\tilde{y}(t) = u(t) + y(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + e^{\int_a^t p(s)ds} [C_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau}$ d

$$= e^{\int_a^t p(s)ds} [\underbrace{C_0 + C_1}_{\Downarrow \; C_{10}} + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} ds$$ δηλαδή της μορφής ⊕

$(q = 0, 11)$

Οι λύσεις της ομογενούς είναι της μορφής

$$y(t) = C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Θα προσπαθήσω να λύσεις της μορφής $y(t) = c(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$

(ΤΕΧΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ)

Έχω $p(t)y(t) + q(t) = y'(t) = \left[c(t)e^{\int_a^t p(s)ds}\right]' =$

$= c'(t)\cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + \underbrace{c(t)e^{\int_a^t p(s)ds}}_{y(t)} p(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t) \Rightarrow c'(s) = q(s) / e^{\int_a^s p(\tau)d\tau} = q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΝΩ $\Rightarrow \int_\alpha^t c'(s)ds = \int_\alpha^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)ds} ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ c_0 \text{ (σταθερα)}}}{c(t) - c(a)} = \dots\dots \Rightarrow c(t) = c_0 + \int_\alpha^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds$

Εαν τωρα αντικαταστησω την $c(t)$ στην $y(t) =$

$= c(t)\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ οδηγουμαι στην ⊕

Μη Υπαρξη Λυσης: $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2$ | $f(t,y) = y^2$ απειρες φορες παραγωγισιμη

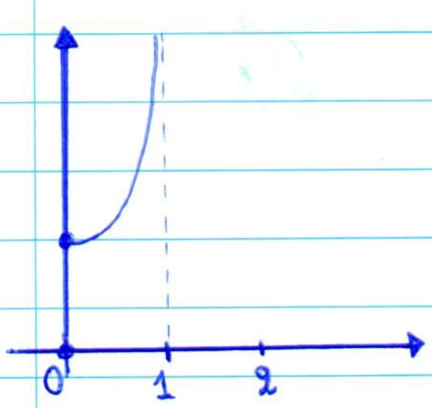
- $y^2 > 0$: γνησια αυξουσα $y(t) \geq 1$

$y'(t) = [y(t)]^2 \Rightarrow \frac{y'(t)}{[y(t)]^2} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{y(t)}\right)' = 1$, (1)

Ολοκληρωνω την (1) απο $s=0$ μεχρι $s=t \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^t (-1/y(s))' ds = \int_0^t ds \Rightarrow -1/y(t) + 1/y(0) = t \Rightarrow$

$\Rightarrow -1/y(t) = t-1 \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$ $\quad 0 \leq t \leq 2$



η $y(t)$ τεινει στο $+\infty$ καθως το $t \to 1$

Μη Μοναδικοτητα Λυσης:

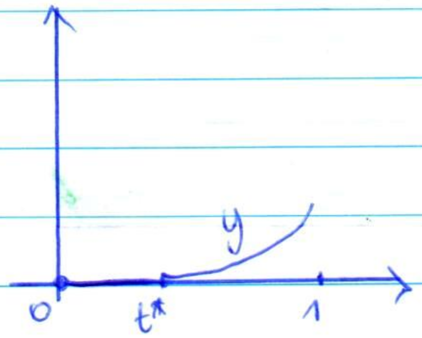
$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & 0 \le t \le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

Ισχυρισμος: $\exists$ Απειρες Λυσεις

$y(t)=0$ λυση $0 \le t \le 1$

Εστω $t^* \in (0,1)$ Θα κατασκευασουμε λυση

$y(t)=0 \quad 0 \le t \le t^*$
$y(t)>0 \quad t^* < t \le 1$



$y'(s) = \sqrt{y(s)} \quad , \quad t^* < t \le 1$

$$\frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1 \Rightarrow \frac{y'(s)}{2\sqrt{y(s)}} = 1/2 \Rightarrow \left(\sqrt{y(t)}\right)' = 1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = 1/2 \int_{t^*}^{t} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{y(t)} - \underbrace{\sqrt{y(t^*)}}_{0\ (y(t^*)=0)} = 1/2\,(t-t^*) \Rightarrow \sqrt{y(t)} = \underbrace{1/2\,(t-t^*)}_{>0}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1/4\,(t-t^*)^2$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^* \\ \dfrac{(t-t^*)^2}{4}, & t^* < 1 \le 1 \end{cases}$$

- Τελος Διαλεξης -

[3] -Αρχη Διαλεξης- Τριτη 4/10/2016

Θεωρημα: (Υπαρξη και Μοναδικοτητα Λυσεων για ΠΑΤ)

Εστω $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχης συναρτηση η οποια ικανοποιει τη συνθηκη του Lipschitz ως προς y και ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ως προς t

$\exists\, L \ge 0 \quad \forall t\in[a,b] \quad \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$

$\circledast \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1-y_2|$

Τοτε $\forall$ αρχική τιμή $y_0\in\mathbb{R}$ το προβλημα αρχικων τιμων

$$\circledast \begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\circledast$: ολική συνθήκη Lipschitz γιατί ειναι σε όλο το $\mathbb{R}$

Εχει ακριβως μια λύση.

Συνθήκη Lipschitz

$\exists\, L \ge 0 \quad \forall x_1,x_2\in[a,b]$

$\Rightarrow |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le L|x_1-x_2|$

ΘΜΤ

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} = \varphi'(\xi)$$

2ο Παραδειγμα

$f(t,y) = y^2$

$f(t,y_1) - f(t,y_2) = (y_1)^2 - (y_2)^2 = (y_1+y_2)(y_1-y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1+y_2|\,|y_1-y_2|$

Ερωτημα:

$\exists$ σταθερα L τω $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R}: |y_1+y_2| \le L$

A: πρεπει $y_1,y_2 > L$ οι τιμες αρα ΟΧΙ

Εστω οτι η f ειναι παραγωγισιμη ως προς y
Ποτε ικανοποιει η f την $\circledast$;

Για $y_1 \neq y_2$ εχουμε $\dfrac{f(t,y_1)-f(t,y_2)}{y_1-y_2} = f_y(t,\xi)$ ⟶ παραγωγος

με ξ μεταξυ y_1 και y_2

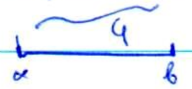
Συμπερασμα: Η f ικανοποιει την $\circledast$ αν $\forall t \in [a,b]$ $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$|f_y(t,y)| \leq L$$

$$f(t,y) = y^2 \Rightarrow f_y(t,y) = 2y$$

$$|f_y(t,y)| = 2|y| \longrightarrow \infty$$
$$y \longrightarrow \infty$$

Αν αντι για $\mathbb{R}$ ηταν στο a,B τοτε η παραγωγος ειναι φραγμενη αρα ικανοποιειται η συνθήκη του Lipschitz



Θεωρημα: (Τοπική υπαρξη και μοναδικοτητα)
Εστω $y_0 \in \mathbb{R}$ και $c > 0$. Αν $f : [a,b] \times [y_0-c, y_0+c] \to \mathbb{R}$ συνεχης συναρτηση η οποια ικανοποιει την τοπική συνθήκη του Lipschitz ως προς y και ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ως πρ

$$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1 y_2 \in [y_0-c, y_0+c]$$

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$, τοτε το προβλ

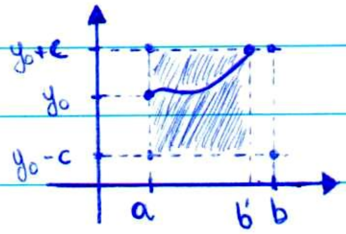
$$\oplus \begin{cases} y' = f(t,y), & \alpha \leq t \leq b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

λυνεται μονοσημαντα τουλαχιστον στο διαστημα $[a,b']$ οπου

$A = \max\limits_{\substack{\alpha \le t \le b \\ y_0 - c \le y \le y_0 + c}} |f(t,y)|$ εχαμε $b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right)$

$\Downarrow$

ο μεγαλυτερος αριθμος για τον οποιον η f δεν βγήκε εκτος οριων



$f(t,y) = \sqrt{y} \quad y>0$

$f_y(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ και οταν $y \to 0$ τοτε $f_y \to \infty$

και ετσι δεν ικανοποιει τη συνθηκη του Lipschitz σε κανενα διαστημα που περιεχει το 0

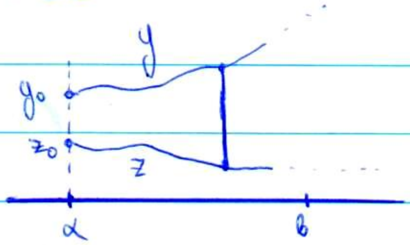
$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \alpha \le t \le b \\ y(a) = y_0 & f \text{, συνεχης} \end{cases}$$

I. Η ολικη συνθηκη Lipschitz της f ως προς y εξασφαλιζει ολικη υπαρξη και μοναδικοτητα

II. Η τοπικη συνθηκη Lipschitz της f εξασφαλιζει τοπική υπαρξη και μοναδικοτητα σε ενα διαστημα [a, b]

III. Η συνεχεια της f εξασφαλιζει τοπικη υπαρξη αλλα οχι τοπικη μοναδικοτητα

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \alpha \le t \le b \\ y(a) = 0 \end{cases}$$



Ευσταθεια: (συνεχης εξαρτηση)

$$\begin{cases} z' = f_1(t,z) & \alpha \le t \le b \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$$

Ερωτημα: Μπορουμε να εκτιμησουμε τη διαφορα $|y(t) - z(t)|$ με μια σταθερα επι $|y_0 - z_0|$;

Προυποθετει μοναδικοτητα λυσης. Αν δεν εχουμε μοναδικοτητα αυτο ειναι αδυνατον.

Συμπερασμα: Απαιτουνται συνθηκες.

Θετουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ και εχουμε $\varepsilon'(t) = y'(t) - z'($
$= f(t, y(t)) - f(t, z(t)$

Για να εκτιμησουμε την $|\varepsilon(t)|$ ή ισοδυναμα την $[\varepsilon(t)]^2$ χρειαζομαστε πληροφοριες για την παραγωγο της. Εχουμε $((\varepsilon(t))^2)' = 2\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t)$

Αρα πολλ/ζουμε την σχεση $\varepsilon'(t) = f(t, y(t) - f(t, z(t)$ με $\varepsilon($

$$\underbrace{\varepsilon(t)\varepsilon'(t)}_{1/2 \cdot ((\varepsilon(t))^2)'} = \overbrace{\left[f(t, y(t) - f(t, z(t) \right]}^{\rightarrow \text{πρεπει να το εκτιμησω (συνθηκες)}} \varepsilon(t)$$

1η Υποθεση: Η f ικανοποιει την ολικη συνθηκη του Lipschitz

Τοτε $\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \underbrace{\left[f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right]}\varepsilon(t)$

$$\le \underbrace{\left|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right|}\cdot|\varepsilon(t)|$$

$$\le L\,\underbrace{|y(t)-z(t)|}_{\varepsilon(t)}$$

Συμπερασμα: $\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' \le L\cdot(\varepsilon(t))^2$

Θετω $\varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$. Οποτε $\varphi'(t) \le L\varphi(t) \Leftrightarrow \varphi'(t) - 2L\varphi(t) \le 0$

$\overset{e^{-2Lt}>0}{\Longleftrightarrow} e^{-2Lt}\varphi'(t) - 2Le^{-2Lt}\varphi(t) \le 0 \Rightarrow \left(e^{-2Lt}\varphi(t)\right)' \le 0$ αρα η συναρτηση $e^{-2Lt}\varphi(t)$ ειναι φθινουσα

Ιδιαιτερα εχουμε $e^{-2Lt}\varphi(t) \le e^{-2Lt}\cdot\varphi(a)$ $\forall t\in[a,b]$
$\Rightarrow \varphi(t) \le e^{2L(t-\alpha)}\varphi(\alpha)$ $\forall t\in[a,b]$

Αρα $(\varepsilon(t))^2 \le e^{2L(t-\alpha)}|y_0-z_0|^2 \Rightarrow |\varepsilon(t)| \le e^{L(t-\alpha)}|y_0-z_0|$

Δηλαδη $|y(t)-z(t)| \le e^{L(t-\alpha)}|y_0-z_0|$ $\forall t\in[\alpha,b]$

$$\Rightarrow \max_{\alpha\le t\le b}|y(t)-z(t)| \le \underbrace{e^{L(b-\alpha)}}_{C}|y_0-z_0|$$

Το γινομενο $L(b-\alpha)$ πρεπει να ειναι μικρο

2η Υποθεση: Η f ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz (η συνθηκη μονοτονιας)

$$\forall\, t \in [a,b] \;\; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \;\; [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$$

Τοτε εχουμε... $1/2\,((\varepsilon(t))^2)' = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))][y(t) - z(t}_{\leq 0}$

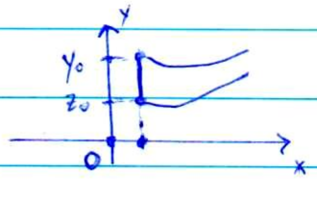
$\Rightarrow ((\varepsilon(t))^2)' \leq 2$ επεται οτι ειναι φθινουσα

Ιδιαιτερα ισχυει οτι $(\varepsilon(t))^2 \leq (\varepsilon(a))^2 \;\; \forall\, t \in [a,b] \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(a)| \Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |y_0 - z_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| \;\; \forall\, t \in [\alpha, b]$$

δηλαδη $y_0 - z_0$ ειναι η μεγιστη διαφορα

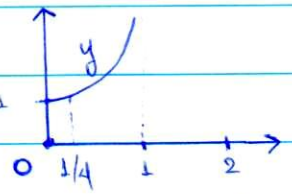


\- Τελος Διαλεξης -

Πεμπτη 6/10/2016

[4] - Αρχη Διαλεξης -

Ασκηση 1.4



$y(t) = 1/_{1-t} \quad 0 \le t \le 1$

$$\circledast \begin{cases} y' = y^2 & \alpha \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

• $f(t,y) = y^2$

Εχουμε $f_y(t,y) = 2y$. Ιδιαιτερα, η f ικανοποιει την τοπική συνθήκη του Lipschitz σε καθε διαστημα της μορφης $[1-c, 1+c]$ Συμφωνα με το Θεωρημα 1.2 το προβλημα εχει μοναδική λυση στο διαστημα $[0, b']$ με $b' = \min(2, \frac{c}{A})$, $A = \max\limits_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 1-c \le y \le 1+c}} |f(t,y)|$

$A = \max\limits_{1-c \le y \le 1+c} |y^2| = (1+c)^2$

Επομενως $b' = \min(2, \frac{c}{(1+c)^2})$ $\begin{cases} \frac{c}{(1+c)^2} \le 1/2 \text{ (προφανως) } \Leftrightarrow \\ 2c \le 1 + c^2 \Leftrightarrow 2c \le 1 + 2c + c^2 \\ \Leftrightarrow 0 \le c^2 + 1 \checkmark \end{cases}$

Ετσι, $b' = \frac{c}{(1+c)^2}$ → εκει παραγωγιζω και βλεπω που εχει ελαχιστα (πινακακι)

↳ $b' = \frac{c}{(1+c)^2} = \frac{c}{1+2c+c^2} = \frac{1}{2+(c+1/c)} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} c + 1/c \geq 2 \Leftrightarrow c^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (c-1)^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$b' = \max\limits_{c \geq 0} \frac{c}{(1+c)^2} = 1/_{(1+1)^2} = 1/4$

Ασκηση 1.10:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & \alpha \leq t \leq b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z) & \alpha \leq t \leq b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Υποθεση: $\forall t \in [\alpha, b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq v(y_1 - y_2)^2$$

ΝΔΟ $|y(t) - z(t)| \leq e^{v(t-\alpha)} |y_0 - z_0|$

Αποδειξη:

$\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ και $\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t,y(t) - f(t,z(t)$

οπως στη θεωρια πολλ/ζω με $\varepsilon(t)$

$$\underbrace{\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t)}_{1/2((\varepsilon(t))^2)'} = \underbrace{(f(t,y(t)) - f(t,z(t)))\overbrace{(y(t) - z(t))}^{\varepsilon(t)}}_{\leq v(y(t) - z(t))^2}$$

Αρα $\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \leq v(\varepsilon(t))^2$

Με $\varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$ παιρνουμε $1/2\, \varphi'(t) \leq v\varphi(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(t) - 2v\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow e^{-2vt}[\varphi'(t) - 2v\varphi(t)] \leq 0$

$\Rightarrow (e^{-2vt}\varphi(t))' \leq 0 \quad a \leq t \leq \beta$

Επομενως η e^{-2vt} ειναι φθινουσα οποτε

$e^{-2vt}\varphi(t) \leq e^{-2va}\varphi(a) \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2v(t-\alpha)}\varphi(a) \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$

Επομενως $[\varepsilon(t)]^2 \leq e^{2v(t-\alpha)}[\varepsilon(a)]^2$

$|\varepsilon(t)| \leq e^{v(t-\alpha)}|\varepsilon(a)|$

$\rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_m)^2}$

Ασκηση 1.9

$f:[\alpha,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\|$ ευκλειδεια νορμα στον $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \alpha \le t \le b \quad \begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$$

Εσωτερικο Γινομενο: $(x,y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$

Ανισοτητα Cauchy $|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$

Υποθεση: $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [\alpha,b] \ \forall x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L\|x-\tilde{x}\|$$

ΝΔΟ

$$\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-\alpha)} \|y_0 - z_0\|$$

Αποδειξη: $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

Εχουμε $\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$

Παιρνουμε το εσωτερικο γινομενο με $\varepsilon(t)$ και εχουμε

$$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = \left[\left(f(t,y(t) - f(t,z(t)\right), \varepsilon(t)\right]$$

Δεν μπορω να πολλ/σω λογω διανυσ. οποτε ΕΣ ☺

και μεσω της Ανισοτητας Cauchy - Swartz

$$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) \le \underbrace{\|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\|}_{\le L\underbrace{\|y(t)-z(t)\|}_{\varepsilon(t)} \text{ (υποθεση)}} \cdot \|\varepsilon(t)\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ οποτε } \underset{\overset{\|}{1/2\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)'}}{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))} \le L\|\varepsilon(t)\|^2$$

$(\|\varepsilon(t)\|^2)' \le 2L\|\varepsilon(t)\|^2$ με $\varphi(t) = \|\varepsilon(t)\|^2$ εχουμε

$$\varphi'(t) \le 2L\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - 2L\varphi(t) \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi(t) \le e^{L(t-\alpha)}\varphi(\alpha)$$

Συνεπως $\|\varepsilon(t)\|^2 \le e^{2L(t-\alpha)}\|\varepsilon(\alpha)\|^2 \Rightarrow \|\varepsilon(t)\| \le e^{L(t-\alpha)}\|\varepsilon(\alpha)\|$

ωστε: $(\|x(t)\|)' = \left(\sum_{i=1}^{m}(x(t))^2\right)' = \sum_{i=1}^{m}\left((x_i(t))^2\right)' = \sum_{i=1}^{m} 2x_i(t)x_i'(t)$

$$= 2\sum_{i=1}^{m} x_i(t)x_i'(t) = 2(x'(t), x(t))$$

Ευσταθεια

$\begin{cases} y' = f(t,y) & \alpha \le t \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$ $f\ [\alpha,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1η Περιπτωση: Υποθεση: $\exists\, L \ge 0\ \forall t \in [\alpha,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

① $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$

Τοτε $|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-\alpha)}|y_0 - z_0|$

2η Περιπτωση: Υποθεση: $\forall t \in [\alpha,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

② $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \le 0$

Τοτε $|y(t) - z(t)| \le |y_0 - z_0|$

Ειδικη Περιπτωση: $f(t,y) = \lambda(t)y + \mu(t)$

Ποτε η f ικανοποιει την ②?

$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \lambda(t)(y_1 - y_2)$

αρα $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) = \lambda(t)(y_1 - y_2)^2$

Συμπερασμα: Αυτη η f ικανοποιει την ② ανν $\lambda(t) \le 0$ $\forall t \in [a,b]$

$$(*) \begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t) + \mu(t) \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

Τοτε με $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

$$(**) \begin{cases} z'(t) = \lambda(t) z(t) + \mu(t) \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$$

εχουμε

$$\varepsilon'(t) = \lambda(t)\,[y(t) - z(t)]$$

ή

$$\varepsilon'(t) = \lambda(t)\,\varepsilon(t)$$

Συμπερασμα: Στην περιπτωση γραμμικής Δ.Ε. η μελετη της ευσταθειας αναγεται στη μελετη του προβληματος αρχικων τιμων για την αντιστοιχη ομογενη Δ.Ε.

$$(+) \begin{cases} \varepsilon'(t) = \lambda(t)\varepsilon(t) & \alpha \le t \le b \\ \varepsilon(\alpha) = \varepsilon_0 \end{cases}$$

Εστω οτι: $|\varepsilon(t)| \le c|\varepsilon_0|$

Τοτε για τη διαφορά $y(t) - z(t)$ των (*) (**) ισχυει $|y(t) - z(t)| \le c|y_0 - z_0|$

Μαλιστα εαν $\tilde{\varepsilon}$ η λυση του

$$(++) \begin{cases} \varepsilon'(t) = \lambda(t)\tilde{\varepsilon}(t) & \alpha \le t \le b \\ \tilde{\varepsilon}(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Τοτε η λυση (+) είναι $\varepsilon(t) = \underbrace{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}(t)}_{\varphi(t)}$

Ισχυρισμος: Η $\varphi(t) = \xi_0 \cdot \tilde{\xi}(t)$ ειναι λυση του ⊕

1) Πραγματι $\varphi(a) = \xi_a \cdot \cancelto{1}{\tilde{\xi}(a)} \Rightarrow \varphi(a) = \xi_0$ ικανοποιει την αρχικη τιμη

2) $\varphi'(t) = \xi_0 \cdot \tilde{\xi}'(t) \overset{(**)}{=} \xi_0 \lambda(t) \tilde{\xi}(t) = \lambda(t) \cdot \underbrace{\xi_0 \tilde{\xi}(t)}_{\varphi(t)} = \lambda(t) \varphi(t)$

αρα ικανοποιει και την Δ.Ε.

Πολλες φορες στη συνεχεια θα ασχοληθουμε με το προβλημα $y'(t) = \lambda(t) y(t)$ οταν $t > 0$ και $y(0) = 1$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t) y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ειδικοτερα θα μας απασχολησει η περιπτωση που το $\lambda(t) \leq 0$

Ιδιαιτερα για λ ανεξαρτητη του t εχουμε

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λυση: $y(t) = e^{\lambda t}, \ t \geq 0$

Για $\lambda \in \mathbb{C}$ το προβλημα λεγεται Δοκιμης
(1ο προβλημα Δοκιμης)

— Τελος Διαλεξης —

Τριτη 11/10/2016

[5].1 - Αρχη Διαλεξης -

Συστήματα (Σ.Δ.Ε.)

Δεδομενα: $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ζητουμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ τ.ω. $(*) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \alpha \leq t \leq \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$

Σχετικα με την υπαρξη και μοναδικοτητα λυσης καθως και την ευσταθεια ισχυουν αντιστοιχα αποτελεσματα με αυτα που ειδαμε για Δ.Ε.

Θεωρημα (Υπαρξη και Μοναδικοτητα)

Εστω $f [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχης διανυσματική συναρτηση η οποία ικανοποιεί τη συνθηκη του Lipschitz ως προς y, ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ως προς t, δηλαδή

$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$(**) \quad \| f(t,x) - f(t,\tilde{x}) \| \leq L \| x - \tilde{x} \|$

ως προς μια νορμα $(\|\cdot\|)$ του $\mathbb{R}^m$

Τοτε... το προβλημα $(*)$ εχει ακριβως μια λυση

Ευσταθεια:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & \alpha \le t \le b \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$$

1η Περιπτωση: Η f ικανοποιει τη συνθηκη του Lipschitz (**)

Τοτε... $\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-\alpha)} \|y_0 - z_0\|$ (Ασκηση 1.9)

2η Περιπτωση: Υποθετουμε οτι η f ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz (**συνθηκη Μονοτονιας**)

$\forall t \in [a,b], \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

{Εσωτερικο Γιν} $(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$

↳ Ευκλειδιο Εσωτερικο Γινομενο στον $\mathbb{R}^m$

→ C (αν μιλαμε για αλλη νορμα)

Τοτε $\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in [a,b]$

Με $\|\cdot\|$ την Ευκλειδια Νορμα στον $\mathbb{R}^m$ (Ασκηση 1.12)

- Προβληματα της μορφης (*) εμφανιζονται συχνα στις εφαρμογες

⚠ • **Προβληματα Α.Τ. (ΠΑΤ) για βαθμωτες Δ.Ε ανωτερης ταξης, αναγονται σε προβληματα της μορφης (*)**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Πραγματι... εστω $m \in \mathbb{N}$ $m \ge 2$ και το ΠΑΤ για μια Δ. βαθμωτη, ταξεως m. Δηλαδη

$$(++) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ \qquad \alpha \le t \le b \\ y^{(i)}(a) = y_i, \quad i=0, \dots, m-1 \end{cases}$$

(γνωριζουμε τις παραγωγους) →

Ισχυρισμος: Το (++) γραφεται στην μορφη (*)

Πραγματι με $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$

$z(a) = \begin{pmatrix} z_1(\alpha) \\ z_2(\alpha) \\ \vdots \\ z_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(\alpha) \\ y'(\alpha) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$ [αρχικη τιμη για το z]

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_{m-1}'(t) \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ \underbrace{y^{m}(t)} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ ΑΠΟ (++) $= f(t, y(t) \ldots y^{m-1}(t))$

Συνεπως $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, y(t), \ldots, y^{m-1}(t)) \end{pmatrix}$ ✓ Αποδειχθηκε

Μονοπλευρη Συνθηκη του Lipschitz

$\forall t \in [\alpha, b] \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \quad (f(t,x) - f(t,\tilde{x}),\ x - \tilde{x}) \leq 0$

Γραμμικα Συστηματα (Σ.Δ.Ε)

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\, y(t) + g(t) & \alpha \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ και $g(t) \in \mathbb{R}^m$ $\forall\ t \in [a,b]$

Ερωτημα: Ποτε ικανοποιειται η μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz?

$f(t,x) = A(t)x + g(t)$

Εχουμε $f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t)x - A(t)\tilde{x} = A(t)(x-\tilde{x})$

Αρα η μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz ικανοποιειται σε αυτην την περιπτωση αν

$$\forall t \in [\alpha,b] \quad \forall x,\tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ (A(t)(x-\tilde{x}),\ x-\tilde{x}) \leq 0 \iff$$

$$\iff \forall t \in [\alpha,b] \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \ (A(t)z,z) \leq 0$$

Λεμε οτι ο $A(t)$ ειναι <u>Μη Θετικά</u> ορισμενος

Θετικα Ορισμενος =

$= \forall x \in \mathbb{R}^m \ (Ax,x) \underline{\underline{>0}}$

και $x \neq 0$

Θετικα Ημι-Ορισμενος

$= \forall x \in \mathbb{R}^m,$ [redacted] $(Ax,x) \underline{\underline{\geq 0}}$

Πρωτο Προβλημα Δοκιμης (ΠΠΔ)

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 & \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

|| Ιδιαιτερα, μας ενδιαφερει η περιπτωση που $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$

Δευτερο Προβλημα Δοκιμης (ΔΠΔ)

$$\begin{cases} y' = f(t,y(t)) & \alpha < t < b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

και $f[\alpha,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιει την μονοπλευρη συνθηκη του Lipschitz

$\boxed{y' = \lambda y}$, $y = y_1 + iy_2$, $\lambda = \alpha + ib$

$\alpha, b \; y_1(t), y_2(t) \in \mathbb{R}$

Τοτε $y_1'(t) + iy_2'(t) = (\alpha + ib)(y_1(t) + iy_2(t)) =$
$= (\alpha y_1(t) - by_2(t)) + i(by_1(t) + \alpha y_2(t))$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha y_1(t) - by_2(t) \\ y_2'(t) &= by_1(t) - \alpha y_2(t) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -b \\ b & \alpha \end{pmatrix}}_{\boxed{A:=}} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Ερωτημα: Ποτε ο A ειναι μη θετικα ορισμενος?

Για $x \in \mathbb{R}^2$ εχουμε $Ax = \begin{pmatrix} \alpha & -b \\ b & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - bx_2 \\ bx_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix}$

Συνεπως το (Ax, x) $= (Ax)_1 x_1 + (Ax)_2 x_2 =$
{εσωτερικο γιν}
$= (\alpha x_1 - bx_2)x_1 + (bx_1 + \alpha x_2)x_2$
$= \alpha x_1^2 - bx\cancel{_1}x_2 + bx\cancel{_1}x_2 + \alpha x_2^2$
$= \alpha \|x\|_2^2$

Προφανως $\forall x \in \mathbb{R}^2 \; (Ax, x) \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0$

Συμπερασμα: Το ΠΠΔ οταν $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ ειναι ειδικη περιπτωση του ΔΠΑ

- ΤΕΛΟΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ -

Πεμπτη 13/10/2016

[6].1 - Αρχη Διαλεξης -

Ασκηση 1.11

$f:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ συνεχης

και $\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$

$$(f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x})\le 0$$

$(\ ,\ )$: Ευκλειδειο Εσωτερικο Γινομενο στον $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'=f(t,y) & \alpha\le t\le b \\ y(\alpha)=y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'=f(t,z) \\ z(\alpha)=z_0 \end{cases}$$

ΝΔΟ $\|y(t)-z(t)\|\le\|y_0-z_0\|$ $\quad a\le t\le b$

με $\|\cdot\|$ την ευκλειδια νορμα στο $\mathbb{R}^m$

Λυση: Θετω $\varepsilon(t):=y(t)-z(t)$

τοτε $\varepsilon'(t)=f(t,y(t))-f(t-z(t))\Rightarrow$

$$\Rightarrow(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))=\underbrace{(f(t,y(t))-f(t,z(t)),\ \underbrace{y(t)-z(t)}_{\varepsilon(t)})}_{\le 0\ (\text{Απο υποθεση})}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))\le 0\quad\Rightarrow\quad(\|\varepsilon(t)\|^2)\le 0$$

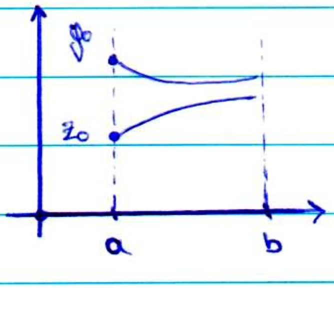
$$\|$$

$$\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)'\ (\text{απο ασκηση } 1.9)$$

Επεται συνεπως οτι $\|\varepsilon(t)\|^2$ ειναι φθινουσα αρα και $\|\varepsilon(t)\|$ ειναι φθινουσα

Επομενως ισχυει πως $\|\varepsilon(t)\|\le\|\varepsilon(\alpha)\|$ δηλ

$\|y(t)-z(t)\|\le\|y_0-z_0\|$ ✓ Αποδειχθηκε



Άσκηση 1.13 Ανισότητα του Grönwall
(Σε ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ)

$\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\alpha, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$

Υπόθεση: $\varphi(t) \leq \alpha + b\int_0^t \varphi(s)ds \quad \forall t \in [0,T]$

ΝΔΟ: $\varphi(t) \leq \alpha e^{bt}$, $t \in [0,T]$

⚠ ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΓΟΡΕΥΤΙΚΗ!

Απόδειξη (με υπόδειξη):

1º ΒΗΜΑ: $\varepsilon > 0$, $\psi(t) = (\alpha+\varepsilon)e^{bt}$ (1)

[redacted]

Τότε $\psi(t) = \alpha + \varepsilon + b\int_0^t \psi(s)ds$ (2)

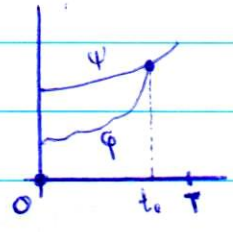
Δηλαδή η 1 ικανοποιεί την 2:

$$\alpha+\varepsilon+b\int_0^t \psi(s)ds = \alpha+\varepsilon+b\int_0^t \underbrace{(\alpha+\varepsilon)}_{\text{σταθερά}} e^{bs}ds =$$

$$= \alpha+\varepsilon+(\alpha+\varepsilon)b\cdot\int_0^t e^{bs}ds = \alpha+\varepsilon+(\alpha+\varepsilon)\int_0^t (e^{bs})'ds =$$

$$= \alpha+\varepsilon+(\alpha+\varepsilon)\left[e^{bt}-\cancelto{1}{e^{b0}}\right] = (\alpha+\varepsilon)e^{bt} = \psi(t)$$ άρα ισχύει όντως η σχέση

2º ΒΗΜΑ: Έστω $t_0 \in (0,T]$ τ.ω.



$\varphi(t_0) = \psi(t_0)$

$\varphi(s) < \psi(s) \quad \forall s \in [0,t_0)$.

$\varphi(0) \leq \alpha$ (από $\varphi(t) \leq \alpha + b\int_0^t \varphi(s)ds$)

$\psi(0) = \alpha+\varepsilon$ ενώ $\varphi(0) \leq \alpha < \alpha+\varepsilon = \psi_0$

Νδο ότι ∄ τέτοιο t_0, δηλαδή ότι στο $(0,T]$ η φ δε συναντά την ψ και είναι "από κάτω της"

Άρα Θδο η υπόθεση οδηγεί σε ΑΤΟΠΟ

Εχουμε $\varphi(t_0) \le \alpha + \beta \int_0^{t_0} \varphi(s)\,ds$ → επειδη προσθετω $\varepsilon > 0$

$\le \alpha + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds < \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds = \psi(t_0)$

↗ $\varphi(s) \le \psi(s)$ $\forall s \in [0, t_0)$

Δηλαδη κατεληξα πως $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$ ΚΑΙ ΟΧΙ $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ ↯ Άτοπο

Αφου τετοιο t_0 δεν υπαρχει συμπεραινουμε πως η $\varphi(t) < \psi(t)$ $\forall t \in [0, T]$

→ max $\varepsilon \cdot e^{\beta t}$ για $t = T$

Συμπερασμα: $\varphi(t) < (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t} = \alpha e^{\beta t} + \varepsilon \cdot e^{\beta t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) < \alpha \cdot e^{\beta t} + \varepsilon \cdot e^{\beta t}$

Δηλαδη $\varphi(t) < \alpha \cdot e^{\beta t}$ $\forall t \in [0, T]$

Εξηγηση: Εστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τω $\forall \varepsilon > 0$ $\kappa < \lambda + \varepsilon$

Τοτε ισχυει οτι $\kappa \le \lambda$

Εστω οτι $\kappa > \lambda$ ισχυει για συγκεκριμενα ε

Ασκηση 1.15 Ανισοτητα του Grönwall (Σε ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ)

Υποθεση: $\varphi'(t) \le \beta \cdot \varphi(t)$ $\forall$ $t \in [0, T]$

ΝΔΟ $\varphi(t) \le \varphi(0) \cdot e^{\beta t}$ $\forall t \in [0, T]$

1ος Τροπος:

$\varphi'(t) \le \beta\varphi(t) \Rightarrow \int_0^t \varphi'(s)ds \le \int_0^t \beta\varphi(s)ds$

$\Rightarrow \varphi(t) - \varphi(0) \le \beta \int_0^{t} \varphi(s)ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(t) \le \underbrace{\varphi(0)}_{\alpha} + \beta \int_0^s \varphi(s)ds$

Το συμπερασμα επεται απο την προηγουμενη ασκηση με $\alpha = \varphi(0)$

2ος Τροπος:

$\varphi'(t) \le \beta\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - \beta\varphi(t) \le 0 \Rightarrow$

πολλ/ζω με $e^{-\beta t} \Rightarrow \underbrace{e^{-\beta t}(\varphi'(t) - \beta\varphi(t))}_{(e^{-\beta t}\varphi(t))'} \le 0$

Συμπερασμα: Η $e^{-\beta t}\varphi(t)$ ειναι φθινουσα

οποτε... $e^{-\beta t}\varphi(t) \le e^{-\beta 0} \cdot \varphi(0) = \varphi(0) \Rightarrow$

$x \cdot e^{\beta t} \Rightarrow \varphi(t) \le \varphi(0) e^{\beta t}$

Ασκηση 1.27

$M\in\mathbb{R}^{m,m}$ μη θετικά ορισμενος $[(Mx,x)\le 0]$

$\forall x\in\mathbb{R}^{m}$ $\begin{cases} y'(t)=My(t) & t\ge 0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$

ΝΔΟ: $\|y(t)\|$ ειναι φθινουσα συναρτηση

Αποδειξη: $y'(t)=My(t) \Rightarrow \underset{\frac{1}{2}\left((\|y(t)\|)^2\right)'}{\overset{\|}{(y'(t),y(t))}} = \underbrace{(My(t),y(t))}_{\le 0}$

Η παραγωγος $(\|y(t)\|^2)'\le 0 \quad \forall\, t\ge 0$

Επεται πως $\|y(t)\|^2$ ειναι φθινουσα και

συνεπως οτι $\|y(t)\|$ ειναι φθινουσα ✓ Αποδειχθηκε

Ασκηση 1.28

$$\begin{cases} x'(t)=-2x(t)+y(t), & t\ge 0 \\ y'(t)=2x(t)-2y(t), & t\ge 0 \\ x(0)=x_0 & \\ y(0)=y_0 & \end{cases}$$

ΝΔΟ Η $[x(\cdot)]^2+[y(\cdot)]^2$ ειναι φθινουσα

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Ανδο M ειναι μη θετικά ορισμενος πινακας. Τοτε το ζητουμενο επεται απο την προηγουμενη ασκηση

Εχουμε για $x\in\mathbb{R}^2$

$$Mx = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1+x_2 \\ 2x_1-2x_2 \end{pmatrix}$$

Οποτε...

$(Mx,x) = (-2x_1+x_2)x_1 + (2x_1-2x_2)x_2 =$

$= -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1x_2 =$

$= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 =$

$= \underbrace{-2(|x_1|-|x_2|)^2 - |x_1x_2|}_{\leq 0} - 3(\overbrace{|x_1x_2| - x_1x_2}^{\geq 0})$

αρα ο M ειναι ανεως μη θετικα ορισμενος και απο την προηγουμενη ασκηση επεται το αποτελεσμα

Ασκηση 1.24

Με $\mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικο (δηλ $M_{ij} = -M_{ji}$, $i,j=1,\dots m$
και $M^T=-M$)

$$\begin{cases} y'(t)=My(t), & t\geq 0\\ y(0)=y_0\end{cases}$$

ΝΔΟ $\|y(\cdot)\|$ = σταθερη συναρτηση και εφοσον
$y(0)=y_0 \rightsquigarrow \|y(t)\|=\|y_0\| \quad t>0$

Ισχυριζομαι (και στο τελος αποδεικνύω) οτι
$\forall x\in\mathbb{R}^m \quad (Mx,x)=0$

$$\overset{\frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)'}{\overset{\shortparallel}{(y'(t),y(t))}} = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{(My(t),y(t))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)' = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|y(t)\|^2$ σταθερή και

$\|y(t)\|$ σταθερή

1η Απόδειξη Ισχυρισμού:

$$(Mx,x) = (x, M^{T}x) = (x,-Mx) = -(x, Mx) = -(Mx,x)$$

$$\Rightarrow 2(Mx,x) = 0 \Rightarrow (Mx,x) = 0$$

2η Απόδειξη Ισχυρισμού:

$$(Mx)_i = \sum_{j=1}^{m} M_{ij}x_j$$

$$(Mx,x) = \sum_{i=1}^{m} (Mx)_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{m} M_{ij}x_j\Big) x_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \overset{\rightarrow -M_{ji}}{\boxed{M_{ij}}} x_j x_i \Rightarrow -\sum_{i,j=1}^{m} M_{ji}\, x_i x_j = -(Mx,x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Mx,x) = 0$$

ΤΕΛΟΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ [ΑΣΚ]
