11/10/2016 - ΤΡΙΤΗ

[1] - Αρχη Διαλεξης -

ΣΔΕ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: Απο σημειωσεις στην ιστοσελιδα

1. Γραμμικες Δ.Ε. ✓

→ 2. Δ.Ε. Bernoulli:

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma} \quad a \le t \le b$$

- $\sigma = 0$ ή $\sigma = 1$ ⇝ προκυπτει γραμμικη Δ.Ε.
- $\sigma > 0$ η συναρτηση $y(t) = 0$ ειναι λυση

Ανακατασταση: Θετω $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$

(Υποθεση: Τα $[y(t)]^{\sigma}$ και $[y(t)]^{1-\sigma}$ εχουν νοημα)

↳ πρεπει να ελεγξει στο τελος για τα y που θα βρω

Τοτε εχουμε $u'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma} y'(t)$

Αντικαθιστουμε στην αρχική Δ.Ε. και εχουμε

$$y'(t) = \frac{1}{1-\sigma}(y(t))^{\sigma} u'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma}$$

οποτε διαιρωντας με το $[y(t)]^{\sigma}$ παιρνω

$$\frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t)\underbrace{(y(t))^{1-\sigma}}_{u(t)} + q(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t)u(t) + q(t)$$ ⇝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ως προς $\underline{u}$

Αρα μπορω να λυσω την $u(t)$ και ανακαθιστω επειτα το αποτελεσμα στη σχεση $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ και βρισκω την $y(t)$

- Τελος Διαλεξης -

13/10/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[2] - Αρχη Διαλεξης -

~~[illegible]~~

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ BERNOULLI

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma} \quad a \le t \le b, \quad \sigma \ne 0, \ \sigma \ne 1$$

Παραδειγμα: $y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \quad a \le t \le b$

Εχουμε ΔΕ τυπου Bernoulli με $\sigma = 2$

> Η $y(t)=0$ αποτελει λυση

> Ζητουμε μη τετριμμενες λυσεις

Θετουμε $u(t) = [y(t)]^{1-\overset{=2}{\sigma}} = [y(t)]^{-1} = 1/y(t)$

Εχουμε $u'(t) = \dfrac{-y'(t)}{[y(t)]^2} = -\dfrac{1}{(y(t))^2} \cdot y'(t)$

οποτε αντικαθιστωντας στην αρχικη Δ.Ε. εχουμε

$$-[y(t)]^2 \cdot u'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -u'(t) = -\overbrace{\frac{1}{y(t)}}^{=u(t)} + 1 \Rightarrow -u'(t) = -u(t) + 1$$

Αρα $u'(t) - u(t) = -1$

Πολλαπλασιαζοντας με τον ολοκληρωτικο παραγοντα e^{-t} και παιρνουμε

$$\underbrace{e^{-t} \cdot [u'(t) - u(t)]}_{} = -e^{-t} \rightarrow = (e^{-t})'$$

$$(e^{-t}u(t))' = -e^{-t} = (e^{-t})'$$

Έπεται ότι $e^{-t}v(t) = e^{-t} + \overset{\text{σταθερά}}{c}$ ⇒ πολλ/ζω με e^{+t} ⇒

⇒ $v(t) = ce^{t} + 1$

Άρα $y(t) = (ce^{t}+1)^{-1}$ $\quad a \le t \le b$

$= \frac{1}{ce^{t}+1}$ $\quad a \le t \le b$

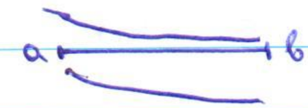
Αλλά... πότε έχει νόημα το $y(t)$ που βρήκα?

Όταν ο παρονομαστής είναι $\neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

- Αν $c \geq 0$ τότε $ce^{t}+1 > 0$ $\quad \{e^{t} \nearrow, \overset{<0}{c}e^{t} \searrow, ce^{t}+1 \searrow$

  Ιδιαίτερα $c \cdot e^{t} + 1 \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$

- Αν $c < 0$ τότε η $ce^{t}+1$ είναι φθίνουσα



Αν δω $\varphi(a) < 0$ ή $\varphi(b) > 0$ και αν το δείξω τότε δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ RICCATI

$$y'(t) = r(t) + p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^2$$

- $r = 0$ τότε έχουμε εξίσωση Bernoulli με $\sigma = 2$
- αν $q = 0$ τότε έχουμε γραμμική Δ.Ε.

Υπόθεση: Έστω πως ξέρουμε μια ειδική λύση y_E της εξίσωσης

Για να βρω την γενική λύση γράφουμε την y στην μορφή

$$y(t) = y_E(t) + \frac{1}{z(t)}$$ με άγνωστη την συνάρτηση z

ΚΑΙ

$$y'(t) = y_E'(t) - z'(t)\frac{1}{[z(t)]^2}$$

Ανακαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις των $y(t)$ και $y'(t)$ στην αρχική μου εξίσωση Δ.Ε. και παίρνω

$$y_\varepsilon'(t) - z'(t)\frac{1}{[z(t)]^2} = r(t) + p(t)\cdot\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t)\cdot\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{[z(t)]^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{y_\varepsilon'(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \cancel{r(t)} + \cancel{p(t)y_\varepsilon(t)} + p(t)\cdot\frac{1}{z(t)} + \cancel{q(t)[y_\varepsilon(t)]^2} + 2q(t)y_\varepsilon(t)\frac{1}{z(t)} + \frac{q(t)}{[z(t)]^2}$$

(Φεύγουν γιατί $y_\varepsilon(t)$ είναι ειδική λύση)

Πολλαπλασιάζω με $[z(t)]^2$

$$-z'(t) = p(t)z(t) + 2q(t)y_\varepsilon(t)z(t) + q(t)$$

$$\Rightarrow z'(t) = -q(t) - \left[\overbrace{p(t) + 2q(t)y_\varepsilon(t)}^{\text{ΓΝΩΣΤΟ}}\right] z(t)$$

Και έτσι προκύπτει γραμμική εξίσωση ως προς z. Άρα προσδιορίζω το z και μετά ανακαθιστούμε στην σχέση $y(t) = y_\varepsilon(t) + 1/z(t)$ οπότε παίρνουμε την y

Παράδειγμα: $y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2 \quad 1<t<2$

$y_\varepsilon(t) = 1/t$ ειδική λύση

Θέτω $y(t) = y_\varepsilon(t) + 1/z(t) = 1/t + 1/z(t)$ και έχω

$$y'(t) = -1/t^2 - 1/[z(t)]^2 \cdot z'(t)$$

Ανακαθιστώ στην αρχική Δ.Ε. και προκύπτει

$$-1/t^2 - 1/[z(t)]^2\, z'(t) = 1/t^2 - 1/t\,(1/t + 1/z(t)) - (1/t + 1/z(t))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-1/t^2} - 1/[z(t)]^2 \cdot z'(t) = \cancel{1/t^2} - \cancel{1/t^2} - 1/t \cdot 1/z(t) - \cancel{1/t^2} - 2/t \cdot 1/z(t) - 1/[z(t)]^2$$

$$\Rightarrow -1/[z(t)]^2 \cdot z'(t) = -3/t \cdot 1/z(t) - 1/[z(t)]^2 \Rightarrow$$

Πολλαπλασιαζω με $[z(t)]^2$

$$\Rightarrow -z'(t) = -3/t \cdot z(t) - 1 \Rightarrow z'(t) = 3/t \cdot z(t) + 1 \Rightarrow z'(t) - \frac{3}{t} z(t) = 1$$

Γραμμικη ΔΕ (πολλ/ζω με καταλληλο ολοκληρωτικό παραγοντα κλπ.)

- Τελος Διαλεξης -

18/10/2016 - ΤΡΙΤΗ

[3] - Αρχη Διαλεξης -

Παραδειγμα ⇝ Riccati

$$y'(t) = 1/t^2 - y(t)/t - [y(t)]^2 \qquad 1 \le t \le 2$$

$y_\varepsilon(t) = 1/t$ ειδ. λύση

Με $y(t) = y_\varepsilon(t) + 1/z(t)$ η ΔΕ γραφεται στη μορφη

$$z'(t) - 3/t \, z(t) = 1 \qquad 1 \le t \le 2$$

Πολλ/ζω με τον ολοκληρωτικο παραγοντα $e^{-3\log t} = e^{\log 1/t^3} = 1/t^3$ και παιρνουμε

$$\left(1/t^3 \, z(t)\right)' = 1/t^3 \Rightarrow$$

$$\left(\left(1/t^3 \, z(t)\right)' = 1/t^3 \, z'(t) + \underbrace{\left(1/t^3\right)'}_{= -3/t^4} z(t) = 1/t^3 \, z'(t) - 3/t^4 \cdot z(t) = 1/t^3 \left(z'(t) - 3/t \, z(t)\right) \right)$$

$(t^{-2})' = -2t^{-3} = -2\frac{1}{t^3}$

$-\left(\frac{t^{-2}}{2}\right)' = 1/t^3$

$\Rightarrow \left(1/t^3\, z(t)\right)' = -\left(\frac{1}{2t^2}\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{t^3} z(t) = -\frac{1}{2t^2} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) = ct^3 - t/2$ άρα $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - t/2}$ $\quad 1 \le t \le 2$

Αυτή η y είναι όντως λύση της αρχικής Δ.Ε. ανν
$ct^3 - t/2 \neq 0 \quad \forall t \in [1,2]$

Τώρα $ct^3 - \frac{t}{2} \neq 0 \Leftrightarrow ct^2 - 1/2 \neq 0 \quad \forall t \in [1,2]$

- $c \le 0$ Τότε $ct^2 - 1/2 \le -1/2 \Rightarrow ct^2 - 1/2 \neq 0$
- $c > 0$ Τότε η $\varphi(t) = ct^2 - 1/2$ είναι αύξουσα $[1,2]$

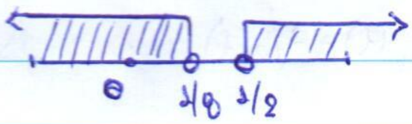
Άρα η φ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$ ανν συμβαίνει ένα από τα εξής:

- $\varphi(1) > 0$
- $\varphi(2) < 0$

Αλλά $\varphi(1) = c - 1/2$ οπότε $\varphi(1) > 0 \Leftrightarrow c > 1/2$
$\varphi(2) = 4c - 1/2 < 0 \Leftrightarrow c < 1/8$ ΚΑΙ $c > 0$

$c < 1/8$ ή $c > 1/2$

Συνολικά:



Δ.Ε. ΜΕ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

$y'(t)=\frac{g(t)}{f(y(t))} \Rightarrow f(y(t))\cdot y'(t)=g(t)$. Θελω να λυσω την εξισωση σε ενα διαστημα I. Σταθεροποιω ενα σημειο a στο I και ολοκληρωνω απο a εως $t \in I$ και παιρνουμε

$$\int_a^t f(y(t))y'(t)\,dt = \int_a^t g(t)\,dt$$ → Αλλαγη μεταβλητης

$\tau = y(t)$ $\quad$ $\alpha = y(\alpha)$, $t = y(t)$

$d\tau = y'(t)\,dt$

και ετσι

$$\int_{y(a)}^{y(t)} f(\tau)\,d\tau = \int_a^t g(t)\,dt$$

Εστω F και G παραγουσες (δηλ. αοριστα ολοκληρωματα) των f και g αντιστοιχα). Δηλαδη τ.ω. $F' = f$ και $G' = g$

Τοτε $\overbrace{F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(\alpha)}^{(*)}$

Αν εχουμε σταθεροποιησει το a και γνωριζουμε την τιμη $y(a)$ τοτε γραφουμε την τελευταια σχεση στη μορφη $F(y(t)) = \underbrace{G(t) + F(y(a)) - G(\alpha)}_{\text{γνωστα}}$

Αν μπορουμε να λυσουμε αυτη την αλγεβρική εξισωση βρισκουμε την $y(t)$

Διαφορετικα αυτη η σχεση δινει την $y(t)$ σε πεπλεγμενη μορφή

Αν δεν εχω σταθεροποιησει το a τοτε γραφουμε την (*) ως $F(y(t)) = G(t) + \underbrace{C}_{F(y(a)) - G(\alpha)}$ με $C \in \mathbb{R}$

Παραδειγμα: $e^{y(t)}\cdot y'(t)=t+t^3$ στο μεγαλυτερο δυνατο διαστημα I

Ολοκληρωνω απο $\alpha\to t$ $(\alpha, t\in I)$ και παιρνω

$\int_\alpha^t e^{y(t)}\cdot y'(t)dt=\int_\alpha^t s+s^3\,dt$, Θετουμε $\tau := y(t)$ και εχουμε $d\tau = y'(t)dt$

$$\int_{y(\alpha)}^{y(t)} e^\tau d\tau = \left[\frac{s^2}{2}+\frac{s^4}{4}\right]_{s=\alpha}^{s=t} = \frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{y(t)}-e^{y(\alpha)}=\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{y(t)}=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+\underbrace{e^{y(\alpha)}-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{4}}_{c}\Rightarrow \underbrace{e^{y(t)}}_{>0}=\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+c$$

αρα $\forall c\in\mathbb{R}$ παιρνουμε το μεγαλυτερο διαστημα I αν για $t\in I$ $t^2/2+t^4/4+c>0$ (για $c>0$, $I=\mathbb{R}$)

και παιρνουμε $y(t)=\log(\underbrace{t^2/2+t^4/4+c}_{>0})$ για $t\in I$

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε.

Ομογενεις ΔΕ λεγονται οι ΔΕ της μορφης

$$y'(t)=g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

⚠: Να μην μπερδευεται αυτη η κατηγορια των ΔΕ με εκεινη των ομογενων ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ Δ.Ε. της μορφης $y'(t)=p(t)y(t)$

• Δουλευω με αντικατασταση $v(t)=y(t)/t$

Τοτε $y(t)=t\cdot v(t)\Rightarrow \underbrace{y'(t)}_{g(v(t))}=t v'(t)+v(t)$ αφου $y'(t)=g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ και $v(t)=y(t)/t$

Συμπερασμα: Η αρχική Δ.Ε. γραφεται στη μορφή $t\cdot v'(t)=g(v(t))-v(t)$

Αυτη ειναι ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητων

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Υποθετουμε οτι $g(v(t))-v(t)\neq 0$ για $t\in I$
I ενα διαστημα που δεν περιεχει το 0

Τοτε
$$t\,v'(t)=g(v(t))-v(t)\Rightarrow \frac{v'(t)}{g(v(t))-v(t)}=1/t$$

Ανακαθιστουμε το t με s και ολοκληρωνουμε απο α ως t
(α,t πρεπει να ειναι ομοσημα για να εχει νοημα το $\int_\alpha^t 1/t\,dt$)

$$\text{Ετσι παιρνω: } \int_\alpha^t \frac{v'(s)}{g(v(s))-v(s)}\,ds=\int_\alpha^t 1/s\,ds \rightarrow \log|t|-\log|\alpha|$$

Αλλαγη μεταβλητης: $\tau:=v(s)$ $\begin{cases}\alpha=v(\alpha)\\ t=v(t)\end{cases}$
$d\tau=v'(s)\,ds$

$$\int_{v(\alpha)}^{v(t)} \frac{1}{g(\tau)-\tau}\,d\tau=\log|t|-\log|\alpha|$$

Εστω G μια παραγουσα της $\frac{1}{g(\tau)-\tau}$, τοτε

$$G(v(t))=\log|t|+G(v(\alpha))-\log|\alpha|$$

Διακρίνουμε 2 περιπτωσεις:

- Αν εχουμε σταθεροποιησει το α και μας εχει δωθει και η $g(\alpha)$ τοτε εχουμε $G(v(\alpha))-\log|\alpha|$ ειναι γνωστα και αν μπορω συνεχιζω και βρισκω λυση.

• Αν δεν εχω $y(a)$, θετω $G(v(a)) - \log|a| = \log|c|$ και εχαμε

$G(v(t)) = \log|t| + \log|c|$ η ισοδυναμα

$G(v(t)) = \log|ct|$ και αν μπορω συνεχιζω και βρισκω λυση

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Εστω $v^* \in \mathbb{R}$ τω $g(v^*) - v^* = 0$

δηλαδή $g(v^*) = v^*$, και επεται πως το v ειναι σταθερο σημειο της g

Τοτε $t v'(t) = g(v(t)) - v(t)$ δινει 0

$t v'(t) = 0$ δηλαδη $v(t) = $ σταθερή

οποτε $v(t) = \underbrace{v^*}_{\text{σταθερά}} \ \forall t$

Ετσι εφοσον $v(t) = \frac{y(t)}{t} \Rightarrow \underline{\underline{y(t) = v^* \cdot t}}$

↳ λυσεις αυτης της μορφης, λεγονται ιδιαζουσες λυσεις της Δ.Ε.

Παραδειγμα: $g'(t) = \dfrac{[y(t)]^2 + 2t\,y(t)}{t^2} \qquad t \neq 0$

$\left(= \left(\dfrac{y(t)}{t}\right)^2 + \dfrac{2y(t)}{t} \right)$

Η ΔΕ ειναι προφανως ομογενης

Ανακατασταση $v(t) = \dfrac{y(t)}{t}$

Τοτε $y(t) = t\,v(t) \Rightarrow y'(t) = t \cdot v'(t) + v(t)$

$= (v(t)^2 + 2v(t))$

Αρα $t \cdot v'(t) = [v(t)]^2 + v(t)$ (+)

- Ιδιάζουσες λύσεις : $v^2 + v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ v=-1 \end{cases}$

  αρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε δύο ιδιάζουσες λύσεις $\begin{cases} y(t)=0 \\ y(t)=-1 \end{cases}$

- Μη Ιδιάζουσες λύσεις: Υπόθεση $v(t) \neq 0$ και $v(t) \neq -1$

Τότε αντικαθιστώντας το t με s γράφουμε την (+) ως

$\frac{v'(s)}{[v(s)]^2 + v(s)} = \frac{1}{s}$ και για αυθαίρετα α, t παίρνω

$$\int_a^t \frac{v'(s)}{[v(s)]^2 + v(s)} ds = \int_\alpha^t 1/s \, ds = \log|t| - \log|a|$$

Αλλαγή μεταβλητής $\tau := v(s)$

$$\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau^2 + \tau} d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{A}{\tau} + \frac{B}{\tau+1} = \dots \quad A=-B, \; A=1, \; B=-1$$

$$\frac{1}{\tau^2+\tau} = \frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1}$$

Αρα $$\int_{v(a)}^{v(t)} 1/\tau \, d\tau - \int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau+1} d\tau = \log|t| - \log|a| \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow [\log|v(t)| - \log|v(a)|] - [\log|v(t)+1| - \log|v(a)+1|] = \log|t| - \log|a|$$

Αρα $$\log|v(t)| - \log|v(t)+1| = \log|t| \underbrace{- \log|a| - \log|v(a)+1| + \log|v(a)|}_{= \log|c|} =$$

$$\rightarrow \log\left|\frac{v(t)}{v(t)+1}\right| = \log|ct| \text{ δλδ } \frac{v(t)}{v(t)+1} = c \cdot t$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{c \cdot t}{1-ct} \quad \text{και} \quad y(t) = \frac{ct^2}{1-ct}$$

σε διαστημα οπου ο παρονομαστης ειναι $\neq 0$, δλδ $t \neq 1/c$.

- Τελος Διαλεξης -

20/10/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[4] - Αρχη Διαλεξης -

ΠΛΗΡΕΙΣ (Η' ΑΚΡΙΒΕΙΣ) Δ. Ε.

Μια Δ.Ε. της μορφης $\boxed{y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}}$ ①

λεγεται πληρης αν υπαρχει μια συναρτηση $f(t,y)$ ετσι.

② $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y)$

Εστω οτι η ① ειναι πληρης και οτι γνωριζουμε μια f που ικανοποιει την ②. Τοτε

$$f(t,y(t)) \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}\left(f(t,y(t))\right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t)) \cdot y'(t) \overset{②}{=} M(t,y(t)) + N(t,y(t)) \cdot y'(t) \overset{①}{=} 0$$

αρα η $f(t,y(t))$ ειναι σταθερη $\Rightarrow \underbrace{f(t,y(t)) = c \text{ με } c \in \mathbb{R}}_{③}$

Ξέροντας την f η ③ είναι αλγεβρική εξίσωση ως προς την $y(t)$. Αν μπορούμε να την λύσουμε βρίσκουμε την $y(t)$ σε άμεση μορφή, διαφορετικά η ③ δίνει την $y(t)$ σε πεπλεγμένη μορφή.

Ερώτημα: Πότε μια εξίσωση είναι πλήρης (για ποια M και N) και σε περίπτωση που είναι πλήρης πως υπολογίζουμε μια f που ικανοποιεί την ②

Υπόθεση: Οι M και N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ισχυρισμός: Η ① είναι πλήρης ανν $\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)$ ④

Μάλιστα όταν ισχύει η ④ μπορούμε να υπολογίσουμε μια f που ικανοποιεί την ②

"$\Rightarrow$": Υποθέτουμε ότι η ① είναι πλήρης και ΘΔΟ ισχύει η ④.

Πράγματι τότε ισχύει η ② και έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη έχουμε

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}$ δηλαδή $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ δηλ. ισχύει όντως η ④

"$\Leftarrow$": Υποθέτουμε ότι ισχύει η (4). Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση είναι πλήρης και θα προσδιορίσουμε μία f που ικανοποιεί τη (2)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \Rightarrow f(t,y) = \int \frac{M(t,y)dt}{g(y)} \quad (*)$$

Προφανώς για κάθε τέτοια f ικανοποιείται η 1η σχέση της (2)

Η $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y)$ γράφεται στη μορφή

$$\int M_y(t,y)dt + g'(y) = N(t,y)$$

Σύμφωνα με την (4) έχουμε $M_y = N_t$ οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει $\int N_t(t,y)dt + g'(y) = N(t,y)$ δηλαδή

$$g'(y) = \underbrace{N(t,y) - \int N_t(t,y)dt}_{\text{δεν εξαρτάται από το } t}$$

Άρα $g(y) = \int \left[N(t,y) - \int N_t(t,y)dt \right] dy + C_1 \quad (**)$

Από τις (*) και (**) προκύπτει ότι η

$f(t,y) = \int M(t,y)dy + (**)$ ικανοποιεί τη (2)

Ιδιαίτερα η (1) είναι πλήρης. Βρήκαμε μάλιστα και μία f που να ικανοποιεί τη (2)

Παραδειγμα:

$$y'(t) = -\frac{e^{y(t)}}{t\cdot e^{y(t)}+2y(t)}$$

{ αν ηταν της μορφης $y'(t) = \frac{+A}{B}$

ή $y'(t) = -\frac{-A}{B}$

ή $y'(t) = -\frac{A}{-B}$

Τοτε $M(t,y) = e^y$

$N(t,y) = te^y + 2y$

1) ΝΔΟ ειναι πληρης

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \Leftrightarrow e^y = e^y$ ΝΑΙ ειναι πληρης

2) Θελουμε να βρω μια f που ικανοποιει την (2)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y \Rightarrow f(t,y) = t\cdot e^y + g(y)$$

Αρα $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t\cdot e^y + g'(y)$

Ομως θελουμε να ισχυει $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t\cdot e^y + 2y$

Συνεπως $\cancel{t\cdot e^y} + g'(y) = \cancel{t\cdot e^y} + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + c$

Συμπερασμα: $f(t,y) = t\cdot e^y + y^2 + c$

Συμφωνα με οτι ειδαμε στην θεωρια οι λυσεις της ΔΕ δινονται σε πεπλεγμενη μορφη απο

$$t\cdot e^{y(t)} + [y(t)]^2 = C \quad C\in\mathbb{R}$$

?- Εστω οτι 1 δεν ειναι πληρης, μηπως ∃ συναρτηση $\mu(t,y)$ ετσι η ΔΕ

$$y'(t) = -\frac{\mu(t,y(t))\cdot M(t,y(t))}{\mu(t,y(t))\cdot N(t,y(t))}$$ πληρης

-Τελος Διαλεξης-

25/10/2016 - ΤΡΙΤΗ

[5] - Αρχή Διάλεξης -

ΠΛΗΡΕΙΣ Η ΑΚΡΙΒΕΙΣ Δ.Ε.

① $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$

Η ① λεγεται πληρης αν ∃ συναρτηση $f(t,y)$ τω.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y)$$

Τοτε οι λυσεις $y(t)$ της ① δινονται σε πεπλεγμενη μορφη απο την $f(t,y(t)) = C$, C σταθερα

Υποθεση: M και N ομαλες συναρτησεις

Τοτε η ① ειναι πληρης ανν $\dfrac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \dfrac{\partial N}{\partial t}(t,y)$

Δ.Ε που αναγονται σε πληρεις

Ερωτημα: Υπαρχει μη μηδενική $\mu(t,y)$ τω η Δ.Ε.

② $y'(t) = -\dfrac{\mu(t,y(t))\, M(t,y(t))}{\mu(t,y(t))\, N(t,y(t))}$

που ειναι ισοδυναμη με την ① να ειναι πληρης; πως μπορουμε να βρουμε μια τετοια συναρτηση (t,y)

Καθε τετοια συναρτηση εαν υπαρχει λεγεται ολοκληρωτικο παραγοντας της ΔΕ ①

Συμφωνα με αυτα που αποδειξαμε η ② ειναι πληρης ανν

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

Γραφουμε αυτην την σχεση στη μορφή

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \frac{\mu \partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot N + \frac{\mu \partial N}{\partial t}$$

ή

$$\frac{1}{\mu}\left(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial t}\right) = \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$1/\mu\left(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \quad ③$$

Η ③ ειναι μερική και οχι συνήθης Δ.Ε. γιατι υπαρχουν μερικες παραγωγοι. (Δ.Ε. με μερικες παραγωγους)

Γενικα η επιλυση της ③ ειναι πολυ δυσκολοτερο προβλημα απο την επιλυση της ①

Ομως, αν η ③ εχει λυσεις $\mu(t)$ η $\mu(y)$ δηλ μιας μονο μεταβλητης ειτε της t ειτε της y τοτε η ③ ειναι συνήθης Δ.Ε. και μαλιστα γραμμική. Ετσι, επιλυεται πολυ πιο ευκολα.

1η Περίπτωση: $\mu = \mu(t)$

Τότε, η ③ γράφεται στην μορφή

$$1/\mu \cdot N \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

Συμπέρασμα: Αν η συνάρτηση $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ είναι ανεξάρτητη του y τότε $\exists$ ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$. Τον βρίσκουμε λύνοντας τη γραμμική συνήθη Δ.Ε.

$$④ \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \cdot \mu$$

Μια λύση της ④ είναι

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}$$

2η Περίπτωση: $\mu = \mu(y)$

Τότε η ③ δίνει $-M \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$

ή $\quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = -\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$

Αν αυτή είναι ανεξάρτητη συνάρτηση του t, τότε έχουμε

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} dy}$$

Παραδειγμα: $y'(t) = \dfrac{-y(t)}{t^2 \cdot y(t) - t}$

Εχουμε: $M(t,y) = y$, $N(t,y) = t^2 \cdot y - t$

Τοτε $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$ και $\dfrac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$ δλδ η εξισωση δεν ειναι πληρης (η ΔΕ δεν ειναι πληρης)

~> Ψαχνω να δω αν αναγεται σε πληρη δηλαδη ψαχνω ολοκληρωτικο παραγοντα που να ειναι συναρτηση μονο του t, $\mu = \mu(t)$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}{N(t,y)} = \frac{1-(2ty-1)}{t^2y - t} = \frac{2-2ty}{t^2y-t}$$

επομενως $\exists$ ολοκληρωτικος παραγοντας ο

$$\mu(t) = e^{-\int \frac{2}{t}\,dt} = e^{-2\log|t|} = e^{\log 1/t^2} = 1/t^2$$

Για να λυσουμε την αρχικη Δ.Ε. πολλ/ζω αριθμητη και παρονομαστη στο δεξιο μελος με $\mu(t) = 1/t^2$

Παιρνουμε $y'(t) = \dfrac{-\frac{y(t)}{t^2}}{y(t) - 1/t}$ $\quad \tilde{M}(t,y) = y/t^2$, $\tilde{N}(t,y) = y - 1/t$

$\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 1/t^2 = \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial y} = 1/t^2$ αρα ειναι πληρης

Ζητειται $f(t,y)$ ωστε $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \tilde{M} = y/t^2$

και $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \tilde{N} = \frac{y-1}{y}$ (*)

$-y/t$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = y/t^2 \Rightarrow f(t,y) = \int y/t^2 \, dt + g(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t,y) = -y/t + g(y)$

Εχουμε $f(t,y) = -y/t + g(y)$ ικανοποιει την $\tilde{M}$ και περιμενω αν την παραγωγισω ως προς y να παρω $\tilde{N}$

Επομενως.... $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -1/t + g'(y)$ και συγκρινω με την (*)

$-1/t + g'(y) = y - 1/t \Rightarrow g(y) = y^2/2 + C$

Συμπερασμα: $f(t,y) = -y/t + y^2/2 + C$

Αρα οι λυσεις της Δ.Ε. δινονται πεπλεγμενα απο τη σχεση

$$\frac{y(t)}{t} + \frac{(y(t))^2}{2} + C = 0 \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

Παρατηρηση: Σε αυτο το παραδειγμα $\nexists$ ολοκληρωτικος παραγοντας που ειναι συναρτηση μονο του y $\mu = \mu(y)$

Πραγματι: $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}{M} = \frac{1-(2ty-1)}{y} =$

$= -2t + 2/y$

Εξαρταται απο t!

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΔΕ (ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ):

Αρχικα βλεπουμε να υπαρχει εξαρτηση (γενικη περιπτωση)

Προβλημα: $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y(0) \end{cases}$

Εδω $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχως παραγωγισιμη
$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχης
$A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ με στοιχεια: συνεχεις συναρτησε του t $(A(t) \in \mathbb{R}^{n,n})$

Αυτο το προβλημα αποτελει γενικευση του ΠΑΤ

$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

για μια βαθμωτη γραμμικη Δ.Ε.
(βαθμωτη <> διανυσματικη)

Αν $p, q \in C[a,b]$ τοτε το $y'(t) = -\dfrac{+f(t,y(t))\, M(t,y(t))}{p(t,y(t))\, N(t,y(t))}$ (②)

εχει ακριβως μια λυση την
$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \cdot y_0 + \int_a^t q(s)\, e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}\, ds$$

- Το προβλημα ① εχει ακριβως μια λυση
- Ερωτημα: Δινεται η λυση του ① απο εναν τυπο "ανεστοιχο" του ③

Απαντηση: Γενικα Αρνητικη ~ ΟΧΙ
(Καταφατικη μονο αν οι πινακες $A(t)$ και $A(s)$ αντιμετατιθενται $\forall\, t,s \in [a,b]$)

Ειδική Περίπτωση: $A(t)=A$ (ανεξάρτητο του t)

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

Το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Το ομογενές σύστημα:

$$(4) \quad \begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Αν η αρχική συνθήκη δίνεται σε ένα σημείο a τότε το πρόβλημα ανάγεται στο (4) με την αλλαγή μεταβλητής $t = s + a$

Βαθμωτή Περίπτωση: $\begin{cases} y'(t) = a\, y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Λύση: $y(t) = e^{at} \cdot y_0 \quad t \in \mathbb{R}$

Ερώτημα: Πότε έχει το (4) λύση της μορφής $y(t) = e^{\lambda t} \cdot y^{(0)}$; (με ζητούμενο το λ)

Απάντηση: $y(0) = e^{\lambda 0} y^{(0)} = y^{(0)}$ άρα η αρχική περίπτωση ικανοποιείται. $\forall \lambda$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε πως $y^{(0)} \neq 0$ (διαφορετικά η λύση είναι $y(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$)

Έχουμε $y'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} y(0)$ και $Ay(t) = A(e^{\lambda t} y^{(0)}) = e^{\lambda t} A y^{(0)}$

Συμπέρασμα: $y'(t) = Ay(t) \Rightarrow \lambda \cancel{e^{\lambda t}} y^{(0)} = \cancel{e^{\lambda t}} A y^{(0)} \Rightarrow$
$\Rightarrow A y^{(0)} = \lambda y^{(0)}$

Απάντηση: Η $y(t) = e^{\lambda t} y^{(0)}$ αποτελεί λύση της (4) αν το λ είναι ιδιοτιμή του A και το y_0 αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

Γενικότερη Περίπτωση: Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμές του A και $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

↳ Υπόθεση: Το $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \dots + c_m x^{(m)} \text{ με } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$$

↳ Ισχυρισμός: Η $y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot x^{(1)} + \dots + c_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} \cdot x^{(m)}$ είναι λύση του (4)

↳ Αρχική Τιμή: $y(0) = c_1 \cdot \cancel{e^{\lambda_1 \cdot 0}}^{1} x^{(1)} + \dots + c_m \cdot \cancel{e^{\lambda_m \cdot 0}}^{1} x^{(m)} =$
$= c_1 x^{(1)} + \dots + c_m x^{(m)} = y(0)$

↳ Σύστημα Δ.Ε.:

$$y'(t) = (c_1 e^{\lambda_1 \cdot t} x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m \cdot t} x^{(m)})' =$$
$$= c_1 (e^{\lambda_1 \cdot t})' x^{(1)} + \dots + c_m (e^{\lambda_m \cdot t})' x^{(m)} \quad \text{ΚΑΙ}$$

$$Ay(t) = A(c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m \cdot t} x^{(m)}) =$$
$$= A(c_1 e^{\lambda_1 \cdot t} x^{(1)}) + \dots + A(c_m e^{\lambda_m \cdot t} x^{(m)}) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \underbrace{A x^{(1)}}_{= \lambda_1 x^{(1)}} + \dots + c_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} \underbrace{A x^{(m)}}_{= \lambda_m x^{(m)}}$$
$= c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \lambda_1 x^{(1)} + \dots + c_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} \lambda_m x^{(m)}$ οπότε ονεως
$y'(t) = Ay(t)$

Σαν περίπτωση που $\begin{cases} y'(t) = A\,y(t) \\ y(\alpha) = y^{(0)} \end{cases}$

Η αντίστοιχη λύση είναι

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1(t-\alpha)} \cdot x^{(1)} + \dots + c_m \cdot e^{\lambda_m(t-\alpha)}\, x^{(m)}$$

- Τέλος Διάλεξης -

27/10/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[6] - Αρχή Διάλεξης -

Ασκήσεις από τις Σημειώσεις

Άσκηση 1.3:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. είναι εξίσωση του Bernoulli και την επιλύσαμε στο παράδειγμα 1.3

Λύσεις: $y(t) = 0$ και $y(t) = \frac{1}{c \cdot e^t + 1}$ (*)

με $c \in \mathbb{R}$ στα διαστήματα που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής

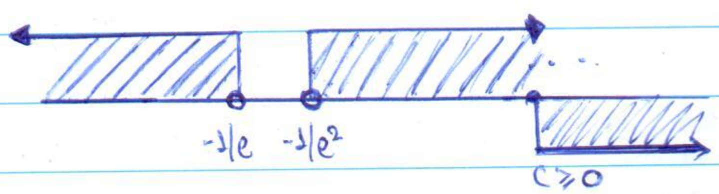
α) Η (*) αποτελεί λύση της Δ.Ε. στο διάστημα $[1,2]$

αν είτε $c < -1/e$

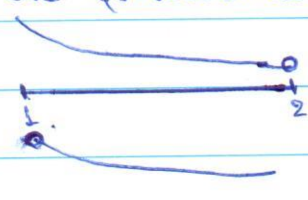
είτε $c > -1/e^2$

$g(t) = c \cdot e^t + 1$, $t \in [1,2]$

1) $c \ge 0$ προφανώς $g(t) \ge 1$ ιδιαίτερα είναι $\neq 0$ $\forall t \in [1,2]$



2) $c < 0$ τότε η συνάρτηση g είναι φθίνουσα στο $[1,2]$



δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$ αν είτε $\varphi(2)>0$ είτε $\varphi(1)<0$

Τωρα: $\cdot\ \varphi(1)<0 \Leftrightarrow c\cdot e+1<0 \Leftrightarrow c<-1/e$

$\cdot\ \varphi(2)>0 \Leftrightarrow c\cdot e^2+1>0 \Leftrightarrow c>-1/e^2$

β) Για $y_0=\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$, το προβλημα δεν εχει λυση. Ακριβεστερα

$y(t)\longrightarrow\infty$ καθως $t\uparrow 3/2$

αφου $y_0\neq 0$ η $y(t)=0$ δεν ειναι λυση

$\cdot$ Απο την ⊛ παιρνουμε

$$y(1)=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c=-\frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{αρα} \dots$$

$$y(t)=\frac{1}{1-\frac{e^t}{e\sqrt{e}}}=\frac{1}{1-e^{(t-3/2)}}$$

Τωρα για $t<3/2$ εχουμε $1-e^{t-3/2}>0$

και $1-e^{t-3/2}\longrightarrow 0$, $t\uparrow 3/2$ Αρα

$y(t)\longrightarrow\infty$ για $t\uparrow 3/2$

γ) Λυση για $y_0=-1$

$y(1)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{ce+1}=-1 \Leftrightarrow c=-2/e$ Αρα συμφωνα με ⊛

$y(t)=\dfrac{1}{1-\frac{2\cdot e^t}{e}}=\dfrac{1}{1-2e^{t-1}}$ Για $t\in[1,2]$ εχουμε $e^{t-1}\geq 1$

οποτε $-2e^{t-1}\leq -2$ αρα $1-2^{t-1}\leq 1-2=-1$

Ιδιαιτερα $1-2e^{t-1}\neq 0 \quad \forall t\in[1,2]$

Ασκηση 1.4:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Λυση: το μεγαλυτερο δυνατο διαστημα

Εξισωση Bernoulli

↳ Λυσεις: $y(t)=0$ αλλα δεν ικανοποιει την αρχικη συνθηκη οποτε δεν ειναι λυση του ΠΑΤ

Θετω $v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ $\overset{2}{=}$ $[y(t)]^{-1} = 1/y(t) \rightsquigarrow \neq 0$

και εχουμε $v'(t) = -\dfrac{y'(t)}{[y(t)]^2}$ Αντικαθιστω στην αρχικη Δ.Ε και παιρνω...

$-[y(t)]^2 v'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -v'(t) = \underbrace{\dfrac{1}{y(t)}}_{v(t)} - 1 \Rightarrow v'(t) + v(t) = 1 \rightsquigarrow$ Γ.Δ.Ε.

Πολλ/ζω με ολοκληρωτικο παραγοντα $e^t \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^t v(t))' = e^t \rightsquigarrow (e^t)'$

$e^t v(t) = e^t + c$ Επομενως $v(t) = \dfrac{c}{e^t} + 1 = 1 + ce^{-t}$

Συνεπως η λυση της Δ.Ε. ειναι $\left(y(t) = \dfrac{1}{v(t)}\right)$

$y(t) = \dfrac{1}{1+ce^{-t}}$ σε διαστηματα που $1 + ce^{-t} \neq 0$

Αρχικη Συνθηκη: $y(0) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+c} = 2 \Leftrightarrow 1 = 2 + 2c \Leftrightarrow 2c = -1$

$\Leftrightarrow c = -1/2$

Λυση του ΠΑΤ ειναι $y(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}}$ (1)

Τωρα $1-\frac{1}{2}e^{-t}=0 \Leftrightarrow e^{-t}=2 \Leftrightarrow -t=\log 2 \Leftrightarrow t=-\log 2$

αρα η (1) αποτελει λυση της Δ.Ε. στο διαστημα $I_1=(-\infty,-\log 2)$ και $I_2=(-\log 2,\infty)$. Για να ειναι και λυση του ΠΑΤ πρεπει το ζητουμενο διαστημα να περιεχει και το 0 επειδη εκει μας δινεται αρχικη τιμη, και εφοσον $0\notin I_1$ ενω $0\in I_2$, το ζητουμενο διαστημα ειναι το I_2

Απαντηση: Το μεγαλυτερο διαστημα στο οποιο η (1) αποτελει λυση του ΠΑΤ ειναι το I_2 δηλαδη το $(-\log 2,\infty)$

$A\in \mathbb{C}^{n,n}$

$$(*)\begin{cases} y'(t)=A\,y(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0)=y^{(0)} \end{cases}$$

Εστω $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ ιδιοτιμες του A και $x^{(1)},\dots,x^{(m)}$ αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα.

Τοτε αν $y^{(0)}=c_1x^{(1)}+\dots+c_mx^{(m)}$, η λυση του (*) ειναι
$y(t)=c_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}\cdot x^{(1)}+\dots+c_m\cdot e^{\lambda_m\cdot t}\cdot x^{(m)}$

(+) Υποθεση: Ο A εχει n γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ που αντιστοιχουν στις ιδιοτιμες $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Τοτε τα $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ αποτελουν βαση του $\mathbb{C}^n$ οποτε καθε $y^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ γραφεται στη μορφη $y^{(0)}=c_1x^{(1)}+\dots+c_nx^{(n)}$

Συμπερασμα: Για καθε $y^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ η λυση του (*) ειναι

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} x^{(1)} + \dots + c_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} x^{(m)} \quad (**)$$

Ιδιαιτερα η γενική λυση του $y'(t) = Ay(t)$ $t \in \mathbb{R}$ δίνεται απο την (**) με $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}^n$

Ερωτημα: Ποτε ικανοποιειται η (*) ;

Ικανη Συνθήκη: ο A εχει n, ανα δυο διαφορετικες μεταξυ τους ιδιοτιμες

Ικανη και Αναγκαια Συνθηκη: Η αλγεβρικη και γεωμετρικη πολλαπλοτητα καθε ιδιοτιμης του A, συμπιπτουν.

• ΙΔΙΟΤΙΜΗ: $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I_n)x \overset{x \neq 0}{=} 0 \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{p(\lambda) = p \in \mathbb{P}_n} = 0$

λεγεται ιδιοτιμη αν $\exists\, x \in \mathbb{C}^n$ $x \neq 0$

• ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ: μιας ιδιοτιμης λ_m του A, λεγεται η πολλαπλοτητα του λ_m ως ριζας του χαρακτηριστικου πολυωνυμου p του A

• ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ: μιας ιδιοτιμης λ_m του A λεγεται το μεγιστο πληθος αντιστοιχων γραμμικα ανεξαρτητων ιδιοδιανυσματων

⇝ Γενικα: Γεωμετρικη ≤ Αλγεβρική

Παραδειγμα: ΝΒ τη γενικη λυση του $y'(t)=Ay(t),\ t\in\mathbb{R}$

με $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Χαρακτηριστικο Πολυωνυμο:

Μονο στη διαγωνιο το λ

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 4\\ 3 & 2-\lambda & -1\\ 2 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow p(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$

$p(1)=0$

Διαιρουμε το p με $\lambda-1$ και οδηγουμαστε σε πολυωνυμο q βαθμου 2 λιγοτερα Βρισκουμε τις ριζες του q που ειναι $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-2$

Συμπερασμα: Οι ιδιοτιμες του A $\begin{cases}\rightarrow \lambda_1=1\\ \rightarrow \lambda_2=3\\ \rightarrow \lambda_3=-2\end{cases}$

Αντιστοιχα ιδιοδιανυσματα

α) $\lambda_1=1$: Ζητειται $v\in\mathbb{C}^3$ $v\neq 0$ τω

$Av=\lambda_1 v$ δηλαδη

$(A-\underset{1}{\lambda_1} I_3)v=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 0\cdot v_1-v_2+4v_3&=0\\ 3v_1+v_2-v_3&=0\\ 2v_1+v_2-2v_3&=0\end{aligned}\right\}\ \ominus \quad \left.\begin{aligned} v_2&=4v_3\\ \\ v_1+v_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow v_1=-v_3$$

Επιλεγουμε αυθαιρετα το v_3 και απο τις δυο (2) αυτες σχεσεις παιρνουμε τα v_1 και v_2. Π.χ. για $v_3=1$

Εχουμε

$$v=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα: η $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ αποτελεί λύση του $y'(t) = A\,y(t)$ αντίστοιχα με τις άλλες περιπτώσεις

β) $\lambda_2 = 3 \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ [Δ Η ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΠΟΛ/ΣΙΟ ΤΟΥ]

$$\varphi^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 \cdot t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

γ) $\lambda_3 = -2 \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ [Δ· Η ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΠΟΛ/ΣΙΟ ΤΟΥ]

$$\varphi^{(3)}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα: Η γενική λύση του $y'(t) = A\,y(t)$ είναι

$$y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t) =$$

$$= \cancel{c_1 \cdot e^{t}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}} + c_2 \cdot e^{3t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-c_1e^{t} + c_2e^{3t} - c_3e^{-2t}\\ 4c_1e^{t} + 2c_2e^{3t} + c_3e^{-2t}\\ c_1e^{t} + c_2e^{3t} + c_3e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Με A όπως πριν ζητείται λύση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\,y(t) \\ y(2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\end{cases}$$

...Σύμφωνα με τα προηγούμενα ζητούνται $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}$) αν

$$y(2) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-c_1e^{2} + c_2e^{6} - c_3e^{-4}\\ 4c_1e^{2} + 2c_2e^{6} + c_3e^{-4}\\ c_1e^{2} + c_2e^{6} + c_3e^{-4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Λυνοντας αυτο το συστημα (γραφικο)

$c_1 = -e^{-2}$, $c_2 = 2e^{-6}$, $c_3 = 2 - e^{4}$

Η ζητουμενη λυση ειναι

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{t-2} + 2e^{3t-6} - 2e^{-2t+4} \\ -4e^{t-2} + 4e^{3t-6} + 2e^{-2+4} \\ -e^{t-2} + 2e^{3t-6} + 2e^{-2+4} \end{pmatrix}$$

— Τελος Διαλεξης —

1/11/2016 - ΤΡΙΤΗ

[7] — Αρχη Διαλεξης —

(*) $y'(t) = Ay(t) \quad t \in \mathbb{R} \quad (A \in \mathbb{C}^{n,n})$

<u>Ειδική Περιπτωση:</u> ο A εχει n γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ που αντιστοιχουν στις ιδιοτιμες $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

- Αν η γεωμετρική πολλαπλοτητα καθε ιδιοτιμης λ_i ταυτιζει με την αντιστοιχη αλγεβρικη πολλαπλοτητα τοτε η γενική λυση του (*) ειναι $y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot x^{(1)} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} x^{(n)}$ με $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

<u>Γενικη Περιπτωση:</u> Αφου η λυση του προβληματος

$$\begin{cases} y'(t) = a y(t), \ t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ειναι $y(t) = e^{at} \cdot y_0$, μηπως και η

$y(t) = e^{\boxed{t \cdot A}} y^{(0)}$ αποτελει λυση του

$$(+) \begin{cases} y'(t) = Ay(t), \ t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Ερωτηση: Τι εννοουμε με e^{A} για εναν πινακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$;

Ξέρουμε ότι $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!}$ για $z \in \mathbb{C}$

Για $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορίζουμε τον πίνακα e^A ως

$$e^A := I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!}$$

(οι δυνάμεις A^l είναι καλά ορισμένες αφού ο A είναι τετραγωνικός πίνακας)

Παρατήρηση: • $e^{0} = I_n$ ($0 \in \mathbb{C}^{n,n}$) • $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} \cdot I_n$ ($A = \lambda I_n \Rightarrow A^l = \lambda^l I_n$)

Επίσης: • $(e^{tA})' = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$

• ($e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ αννν $AB = BA$) αναμετασιδεύεται

Ισχυρισμός: Η $y(t) = e^{tA} \cdot y^{(0)}$ είναι λύση του (*)

[⚠: ΠΡΟΣΟΧΗ: Πρώτα ο πίνακας και μετά γράφεται το διάνυσμα]

• Πράγματι:

→ Αρχική Τιμή: $y(0) = e^{0 \cdot A} \cdot y(0) = e^{0} y(0) = I_n y^{(0)} = y^{(0)}$ ($e^0 = I_n$ (μιλάμε για πίνακες))

→ Σ.Δ.Ε: $y'(t) = (e^{t \cdot A} y^{(0)})' \overset{\frac{d}{dA}}{=} (e^{tA})' \cdot y^{(0)} =$ (→ δεν εξαρτάται από A)

$$= A \cdot \underbrace{e^{tA} \cdot y^{(0)}}_{y(t)} = A y(t)$$ άρα είναι όντως λύση

Συμπέρασμα: Η λύση του $\begin{cases} y'(t) = A y(t) & t \in \mathbb{R} \\ y(\alpha) = y^{(0)} \end{cases}$

είναι $y(t) = e^{(t-\alpha) \cdot A} \cdot y^{(0)}$

Το μη ομογενες ΣΔΕ

$$(**)\quad \begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Μεθοδος της Μεταβολης των Σταθερων:

Αναζητουμε μια λυση της μορφης
$y(t) = e^{t\cdot A} v(t)$ με καταλληλη $v(t)$

→ Αρχικη Συνθηκη: $y(0) = \overbrace{e^{0A}}^{=I_n} \cdot v(0) = I_n \cdot v(0) = v(0)$
πρεπει $v(0) = y^{(0)}$

→ ΣΔΕ: $y'(t) = (e^{tA}\cdot v(t))' = (e^{tA})' \cdot v(t) + e^{tA}\cdot v'(t)$
$= \underbrace{A e^{tA} v(t)}_{y(t)} + e^{tA} v'(t) = Ay(t) + e^{tA} y'(t)$

Η y ικανοποιει το Σ.Δ.Ε αν ισχυει
$e^{t\cdot A} v'(t) = f(t) \quad t\in\mathbb{R}$

Αρα
$v'(t) = e^{-tA} f(t) \rightsquigarrow v'(s) = e^{-sA} f(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t v'(s)\,ds}_{v(t) - \underbrace{v(0)}_{y^{(0)}}} = \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds \Rightarrow v(t) = y^{(0)} + \int_0^t e^{-s\cdot A} f(s)\,ds$

Επομενως η λυση του (**) ειναι
$$y(t) = e^{t\cdot A}\left[y^{(0)} + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right] =$$

$$= e^{tA}\cdot y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds$$

Σημειωση: Η λυση του $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ ειναι

$$y(t) = e^{(t-a)A}\cdot y^{(0)} + \int_a^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds$$

Ορισμένες: $\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$

Λυση: $y(t) = e^{tA}y^{(0)}$ $t\in\mathbb{R}$

Ερωτημα: Πως μπορουμε να υπολογισουμε την παρασταση $e^{tA}\cdot y^{(0)}$;

Ισοδυναμα: Για $x\in\mathbb{C}^n$ πως υπολογιζουμε την παρασταση $e^{tA}\cdot x$;

Εστω $\lambda\in\mathbb{C}$: Οι πινακες $t(A-\lambda I_n)$ και $t(\lambda I_n)$ αναμετατιθενται οποτε

$$e^{tA} = e^{t\lambda I_n}\cdot e^{t(A-\lambda I_n)} = e^{t\lambda}\cdot I_n\cdot e^{t(A-\lambda I_n)} = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda I_n)}$$

$$\left\{e^{B} = I_n + B + \frac{B^2}{2!} + \dots\right\}$$

Συμπερασμα:

$$e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t}\cdot e^{t(A-\lambda I_n)}x$$

$$\Rightarrow e^{tA}x = e^{\lambda t}\left[I_n x + t\cdot(A-\lambda I_n)x + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I_n)^2 x + \dots\right] \quad (***)$$

Διακρινω δυο Περιπτωσεις

1]: Το x ειναι ιδιοδιανυσμα του A και το λ αντιστοιχη ιδιοτιμη $\left\{\begin{array}{l} Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)x = 0 \\ (A-\lambda I_n)^{\ell}x = 0, \ \ell = 1,2,\dots \end{array}\right\}$

Τοτε $(A-\lambda I_n)^{\ell}x = 0$, $\ell = 1,\dots$ οποτε η $(***)$ δινει

$$e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t}\cdot x$$

2] Το x είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή λ, δηλαδή $(A-\lambda I_n)^m x = 0$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$

Τότε $(A-\lambda I_n)^\ell x = 0$, $\ell = m, m+1, \ldots$ και η (***) δίνει

$$e^{tA} \cdot x = e^{\lambda t}\left[x + t(A-\lambda I_n)x + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I_n)^{m-1} x\right]$$

Τώρα, κάθε πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχούν τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα όση η αλγεβρική της πολλαπλότητα

Έστω $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ή γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A

Τότε κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφεται ως

$$x = c_1 x^{(1)} + \ldots + c_n x^{(n)} \text{ με } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$$

Επομένως

$$e^{tA} x = c_1 \left(e^{tA} x^{(1)}\right) + \ldots + c_n \left(e^{tA} x^{(n)}\right)$$

Η παράσταση στο δεξιό μέλος υπολογίζεται όπως είδαμε, οπότε βρίσκουμε το $e^{tA} x$

(ΤΕΛΟΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ)

[ΑΣΚΗΣΕΙΣ]

Ασκηση 1.5: (+) $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2 & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$

α) Νδο για $y_0 = -3$ η (+) δεν εχει λυση
Ακριβεστερα $y(t) \to -\infty$ για $t \uparrow \sqrt{2}$

β) Λυση για $y_0 = 3$

α) Δ.Ε. Riccati
⇝ Γενικη Λυση: (παραδειγμα 1.4)

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - t/2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Συμφωνα με την (+) εχουμε οτι $y(1) = -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = -3 \Leftrightarrow c = 1/4$

Και παλι συμφωνα με την (+) η λυση (αν υπαρχει) ειναι

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{t(t^2-2)}{4}}$$

Τωρα για $1 \le t < \sqrt{2}$ εχουμε $t^2 - 2 < 0$ και
$t^2 - 2 \to$ καθως $t \uparrow \sqrt{2}$

Επομενως οντως $y(t) \to -\infty$ καθως $t \uparrow \sqrt{2}$ και συνεπως $\nexists$ λυση στο $[1, 2]$

β) Ζητειται η λυση για $y_0 = 3$
Συμφωνα με την (+)
$y(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - 1/2} = 3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c = 1$

Αντικαθιστω στην (*) και

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3 + \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{2}{2t^3 - t} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t(2t^2-1)}$$

για $t \in [1,2]$ εχουμε $2t^2 - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1$ οποτε η $y(t)$ ειναι καλα ορισμενη σε ολο το διαστημα $[1,2]$ αρα ειναι λυση.

<u>Ασκηση 1.6:</u> Να βρεθει σε πεπλεγμενη μορφη την λυση της

$$y'(t) = \frac{1 + [y(t)]^2}{2t\, y(t)} \Rightarrow \frac{2y(t)\, y'(t)}{1 + [y(t)]^2} = \frac{1}{t}$$ ΔΕ χωριζομενων μεταβλητων

(Λυση: Θα ολοκληρωσω απο ενα a ως t)

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^t \frac{2y(s)\, y'(s)}{1 + [y(s)]^2}\, ds}_{} = \underbrace{\int_a^t \frac{1}{s}\, ds}_{= \log|t| - \log|a|} \quad a, t \text{ ομοσημα}$$

Αλλαγη Μεταβλητης:
$\tau = [y(s)]^2$ (εδω βολευει)
$d\tau = 2y(s)\, y'(s)\, ds$ οποτε

$$\int_{[y(a)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\, d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\log([y(t)]^2 + 1) - \log([y(a)]^2 + 1) = \log|t| - \log|a|$$

$$\log([y(t)]^2 + 1) = \log|t| + \underbrace{\log([y(a)]^2 + 1) - \log|a|}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2 + 1 = |ct| \Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{\underbrace{|ct| - 1}_{\geq 0}}$$

— Τελος Διαλεξης —

3/11/2016 - ΠΕΜΠΤΗ

[8] - Αρχή Διάλεξης -

<u>Ασκηση 1.7:</u> $y'(t) = \dfrac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$

Λυση: Η Δ.Ε. ειναι χωριζομενων μεταβλητων

Εχουμε $\left\{[y(s)]^3 - y(s)\right\} y'(s) = 2s - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^t \left\{[y(s)]^3 - y(s)\right\} y'(s)\,ds = \int_a^t (2s-1)\,ds$ $\quad \tau := y(s)$, $d\tau = y'(s)ds$ ΚΑΙ

$\int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3 - \tau)\,d\tau = \int_a^t (2s-1)\,ds \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{[y(t)]^4 - [y(a)]^4\right\} - \frac{1}{2}\left\{[y(t)]^2 - [y(a)]^2\right\} = t^2 - a^2 - (t - a)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(y(t))^4 - \frac{1}{2}(y(t))^2 = t^2 - t + \underbrace{\frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(a)]^2 - a^2 + a}_{c}$

$\frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = t^2 - t + c$ με $c \in \mathbb{R}$

Η λυση πρεπει να ειναι ειω $\forall t$ σε ενα διαστημα να ισχυει

$[y(t)]^3 - y(t) \neq 0 \Rightarrow y(t)\left[(y(t))^2 - 1\right] \neq 0$

$y(t) \neq 0$ ΚΑΙ $y(t) \neq \pm 1$

Διαιρω αριθ. και παρον. με t^2

Ασκηση 1.8: $y'(t) = \dfrac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\,y(t)} =$

$$= y'(t) = \frac{3\left[\frac{y(t)}{t}\right]^2 + 1}{2 \cdot \frac{y(t)}{t}}$$ $\rightsquigarrow$ Η ΔΕ ειναι Ομογενης

α) Γενικη Λυση

Θετουμε $v(t) = \dfrac{y(t)}{t}$ οποτε εχουμε $y(t) = t \cdot v(t)$

Εχουμε $y'(t) = v(t) + t\,v'(t)$ οποτε αντικαθιστωντας στην αρχικη Δ.Ε.

$$v(t) + t\,v'(t) = \frac{3[v(t)]^2 + 1}{2 \cdot v(t)} = \frac{3}{2} v(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{v(t)} \Rightarrow$$

$t \cdot v'(t) = \frac{1}{2} v(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{v(t)} \neq 0$ αρα $\nexists$ ιδιαζουσες λυσεις

Εχουμε $\dfrac{2 \cdot v'(t)}{v(t) + \frac{1}{v(t)}} = \dfrac{1}{t}$ (ΔΕ χωριζ. μεταβλητων)

Αρα $$\int_a^t \frac{2\,v(s)v'(s)}{[v(s)]^2 + 1}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

Με $\tau = [v(s)]^2$ παιρνουμε $d\tau = 2v(s)v'(s)ds$ και παιρνουμε

$$\int_{[v(a)]^2}^{[v(t)]^2} \frac{1}{\tau + 1}\,d\tau = \log|t| - \log|a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log([v(t)]^2 + 1) - \log([v(a)]^2 + 1) = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log([v(t)]^2 + 1) = \log|t| + \underbrace{\log([v(a)]^2 + 1) - \log|a|}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log\left([v(t)]^2+1\right) = \log|ct| \Rightarrow [v(t)]^2 + 1 = ct \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow [v(t)]^2 = \underbrace{ct-1}_{>0}$$ Αρα $$\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2 = ct - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2 = t^2(ct-1) \quad (*)$$

β) Λυση του ΠΑΤ με $y(1)=1$ και το μεγιστο διαστημα

Συμφωνα με την $(*)$ $y(1)=1 \Rightarrow 1 = c-1 \Rightarrow c=2$

Αντικαθιστωντας στην $(*)$ $[y(t)]^2 = \underbrace{t^2(2t-1)}_{>0 \rightsquigarrow t>1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = \pm t\sqrt{2t-1}$$

- "$-$": Με το $-$ εχουμε $y(1) = -1$ ↯ Απορρ.
- "$+$": $(+\, t\sqrt{2t-1})$ ειναι η ζητουμενη λυση

$$y(t) = t\sqrt{2t-1} \quad \text{στο} \quad t \in (1/2, \infty)$$

Ασκηση 1.9α

$$y'(t) = \frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)} \quad (\text{ομογενης, πληρης})$$

$$M(t,y) = 2t + y \qquad \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) = 1 \quad \text{ειναι πληρης}$$
$$N(t,y) = t + 2y$$

Ζητουμε τωρα μια συναρτηση f τω

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) = 2t + y \quad \text{ΚΑΙ}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t + 2y$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t+y \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}} f(t,y) = t^2 + y\cdot t + g(y)$$

Άρα $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t + g'(y)$

Αφού θέλουμε να ισχύει

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t + 2y$ συμπεραίνουμε πως

→ ∃ πολλές λύσεις

$g'(y) = 2y$. Μια λύση είναι π.χ $g(y) = y^2$

Επομένως μια τέτοια f (που ικανοποιεί τις δύο σχέσεις) είναι $f(t,y) = t^2 + yt + y^2$

Οι λύσεις της Δ.Ε. σε πεπλεγμένη μορφή δίνονται από τη σχέση

$f(t, y(t)) = c$, με $c \in \mathbb{R}$ δηλαδή

$t^2 + ty(t) + [y(t)]^2 = c, \; c \in \mathbb{R}$

Επαλήθευση:

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 + ty(t) + [y(t)]^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2t + y(t) + ty'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Λύνω ως $y'(t) \Rightarrow [t + 2y(t)]\,y'(t) = -[2t + y(t)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$

Ασκηση 1.10:

$$y'(t) = -\frac{t+[y(t)]^2}{t\,y(t)}$$

Γενική Λύση (ανάγεται σε πλήρη)

Λυση:

Θετουμε $M(t,y)=t+y^2$ και $N(t,y)=ty$

Τοτε

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)}_{2y} \neq \underbrace{\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}_{y}$$ οποτε δεν ειναι πληρης

Τωρα $$\frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]\frac{2y-y}{ty} = 1/t$$

ανεξαρτητη του y. Επομενως υπαρχει ολοκληρωτικος παραγοντας $\mu=\mu(t)$. Εχουμε

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\log t} \overset{t>0}{=} t$$

Γραφουμε την αρχικη ΔΕ στη μορφη (πολλ/ζω με $\mu(t)=t$)

$$(*) \quad y'(t) = -\frac{t^2+t[y(t)]^2}{t^2\,y(t)}$$

Θετουμε $\tilde{M}(t,y)=t^2+ty^2$ και
$\tilde{N}(t,y)=t^2y$

Παρατηρω οτι

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(t,y)}_{2ty} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}(t,y)}_{2ty}$$ οποτε η (*) ειναι πληρης

Ζητούμε μια συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \tilde{M}(t,y) = t^2 + ty^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \tilde{N}(t,y) = t^2 \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = t^2 + ty^2 \xrightarrow{\text{ολοκληρώνω}} f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2 + \overset{\text{σταθερό}}{g(y)}$$

Επομένως

$$\frac{d}{dy} f(t,y) = t^2 y + g'(y)$$

Αλλά θέλουμε να ισχύει

$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t^2 \cdot y$ οπότε πρέπει $g'(y) = 0$

Μια λύση είναι $g(y) = 0$

Επομένως μια τέτοια f είναι η $f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2$

Συμπέρασμα: Οι λύσεις $y(t)$ (για $t \neq 0$) δίνονται από τις σχέσεις

$f(t, y(t)) = c$, $c \in \mathbb{R}$ δηλαδή

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2 = c \quad \text{(λύνω ως προς } y(t))$$

Επαλήθευση: $\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2\right) = 0 \Rightarrow t^2 + t[y(t)]^2 + \frac{t^2}{\cancel{2}}\cancel{2}y(t)y'(t) = 0$

$$\overset{t\neq 0}{\Rightarrow} t + [y(t)]^2 + t\,y(t)\,y'(t) = 0 \Rightarrow y'(t) = \frac{t + [y(t)]^2}{t\,y(t)} \quad ✓$$

(ΤΕΛΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡ. ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ)