1 Ανάπτυγμα Taylor

Υπενθυμίζουμε εδώ το ανάπτυγμα Taylor συναρτήσεων μίας και δύο μεταβλητών. Η γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές είναι πολύ εύκολη.

1.1 Συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $n \in \mathbb{N}_0$, και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα I. Έστω $x_0 \in I$.

Τότε, για κάθε $x \in I$, υπάρχει ένα σημείο $\vartheta = \vartheta(x)$ μεταξύ των x_0 και x, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta). \tag{1}$$

Αυτός είναι ο *τύπος του Taylor* και το δεξιό του μέλος λέγεται *ανάπτυγμα Taylor* της συνάρτησης f στο σημείο x_0.

Παρατήρηση 1.1 Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το ανάπτυγμα (1):

- Στην περίπτωση $n = 0$ η σχέση (1) ανάγεται στον τύπο της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(\vartheta)$.
- Το ϑ εξαρτάται από το x και μπορεί να γραφεί στη μορφή $\vartheta = \lambda x + (1-\lambda)x_0$ με κάποιο $\lambda \in (0, 1)$, είναι όπως λέμε ένας *κυρτός* συνδυασμός των x και x_0.
- Ας συμβολίσουμε με $p_n(x)$ τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (1),

  $$p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0).$$

  Προφανώς το p_n είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n, και λέγεται *πολυώνυμο Taylor* της f στο σημείο x_0. Προσεγγίζουμε δηλαδή την f με ένα πολυώνυμο p_n και ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος της (1) αποτελεί μια παράσταση του σφάλματος προσέγγισης $f(x) - p_n(x)$, το οποίο λέγεται και *υπόλοιπο* του τύπου του Taylor. Υπάρχουν και εναλλακτικές παραστάσεις του υπολοίπου.

  Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $p_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, για $i = 0, \dots, n$, δηλαδή οι παράγωγοι τάξης μέχρι n των συναρτήσεων p_n και f στο σημείο x_0 συμπίπτουν – το p_n παρεμβάλλεται με αυτήν την έννοια στην f στο σημείο x_0.
- Αν το ϑ δεν εξαρτάται από το x, τότε το δεξιό μέλος της (1) είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n+1$. Συνεπώς, αυτό συμβαίνει *αν και μόνο αν* και το αριστερό μέλος της (1), δηλαδή η συνάρτηση f, είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n+1$. Σε αυτήν την περίπτωση βέβαια η $f^{(n+1)}$ είναι σταθερή συνάρτηση.
- Ο τελευταίος όρος στον τύπο (1) μηδενίζεται για κάθε $x \in I$, αν και μόνο αν η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. $\square$

1.2 Συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και *κυρτό* σύνολο, δηλαδή τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία του Ω να περιέχεται στο Ω. Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο Ω, δηλαδή τέτοια ώστε όλες οι μερικές παράγωγοι της f τάξης μέχρι και $n+1$ να είναι συνεχείς. Έστω $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Τότε, για κάθε $(x, y) \in \Omega$, υπάρχει ένα σημείο $(\xi, \vartheta) = (\xi(x, y), \vartheta(x, y))$ στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα (x, y) και (x_0, y_0), τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq 0}}^{n} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^{n+1-i}}{i!(n+1-i)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}(\xi, \vartheta). \end{aligned} \tag{2}$$

Παρατήρηση 1.2 Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με το ανάπτυγμα (2):

- Το σημείο (ξ, ϑ) εξαρτάται από το (x, y) και μπορεί να γραφεί στη μορφή $\binom{\xi}{\vartheta} = \lambda\binom{x}{y} + (1-\lambda)\binom{x_0}{y_0}$, με κάποιο $\lambda \in (0, 1)$.
- Ας συμβολίσουμε με $p_n(x, y)$ τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (2),

  $$p_n(x,y) := \sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq 0}}^{n} \frac{(x-x_0)^i (y-y_0)^j}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0).$$

  Προφανώς το p_n είναι πολυώνυμο δύο μεταβλητών, βαθμού το πολύ n, και λέγεται *πολυώνυμο Taylor* της f στο σημείο (x_0, y_0). Προσεγγίζουμε δηλαδή την f με ένα πολυώνυμο p_n και ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος της (2) αποτελεί μια παράσταση του υπολοίπου $f(x, y) - p_n(x, y)$.

  Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\frac{\partial^{i+j} p_n}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0)$, για $i, j = 0, \dots, n$, τέτοια ώστε $i + j \leq n$, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι μέχρι τάξης n των συναρτήσεων p_n και f στο σημείο (x_0, y_0) συμπίπτουν – το p_n παρεμβάλλεται με αυτήν την έννοια στην f στο σημείο (x_0, y_0).
- Αν το (ξ, ϑ) δεν εξαρτάται από το (x, y), τότε το δεξιό μέλος της (2) είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n + 1$. Συνεπώς, αυτό συμβαίνει *αν και μόνο αν* και το αριστερό μέλος της (2), δηλαδή η συνάρτηση f, είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n + 1$. Σε αυτήν την περίπτωση βέβαια οι $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^i \partial y^{n+1-i}}$ είναι σταθερές συναρτήσεις.
- Ο τελευταίος όρος στον τύπο (2) μηδενίζεται για κάθε $(x, y) \in \Omega$, αν και μόνο αν η f είναι πολυώνυμο δύο μεταβλητών βαθμού το πολύ n. $\square$