

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2^η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρούμε τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = A_1 y(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} y'(t) = A_2 y(t), & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

με

$$y_0 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Βεβαιωθείτε ότι ο πίνακας A_1 είναι *αντισυμμετρικός*, $A_1^T = -A_1$, και (συνεπώς) ότι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $(A_1 x, x)$ μηδενίζεται, για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^3$, δηλαδή $(A_1 x, x) = 0$.
- Βεβαιωθείτε ότι, στην περίπτωση του πρώτου προβλήματος, η Ευκλείδεια νόρμα της λύσης y είναι σταθερή, $\|y(t)\| = 5, 0 \leq t \leq 10$.
- Βεβαιωθείτε ότι ο πίνακας A_2 είναι *συμμετρικός*, $A_2^T = A_2$, και θετικά ημιορισμένος, οπότε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $(A_2 x, x)$ είναι μη αρνητικό, για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^3$, δηλαδή $(A_2 x, x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$.
- Βεβαιωθείτε ότι, στην περίπτωση του δεύτερου προβλήματος, η Ευκλείδεια νόρμα $\|y(t)\|$ της λύσης y είναι φθίνουσα συνάρτηση του t , $\|y(t)\| \leq \|y(s)\|$, για $0 \leq s \leq t \leq T$.
- Διακριτοποιούμε κάθε ένα από αυτά τα δύο προβλήματα αρχικών τιμών με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0, 10]$, με βήμα h .
- Εξετάστε θεωρητικά πώς συμπεριφέρονται οι Ευκλείδειες νόρμες των προσεγγιστικών λύσεων y^n , για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα;
- Γράψτε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα FORTRAN ή σε MATLAB, σε διπλή ακρίβεια, και προσδιορίστε τις προσεγγίσεις y^n , για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα, τόσο με βήμα $h = 0.25$ όσο και με βήμα $h = 0.125$. Δοκιμάστε, αν θέλετε, και με άλλες τιμές του h . Τυπώστε τις Ευκλείδειες νόρμες των προσεγγίσεων y^n , για n τέτοια ώστε $nh = 0, 1, 2, \dots, 10$, δηλαδή για τις προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης y στα σημεία $0, 1, 2, \dots, 10$.

8. Πώς συμπεριφέρονται οι Ευκλείδειες νόρμες των προσεγγιστικών λύσεων y^n για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα; Συγκρίνετε τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα αντίστοιχα θεωρητικά σας αποτελέσματα, από το 6.

Παράδοση

- Θα παραδώσετε ένα πρωτόκολλο με το πρόγραμμά σας και τα αποτελέσματα. Επίσης, κατά την παράδοση θα κληθείτε να εξηγήσετε πώς ακριβώς δουλεύει το πρόγραμμά σας, τι κάνει σε κάθε βήμα, να το τρέξετε στον υπολογιστή κ.λπ.
- Το πρόγραμμά σας πρέπει να περιέχει πολλά σχόλια, ώστε να μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει τι ακριβώς γίνεται σε κάθε βήμα.
- Η παράδοση των εργαστηριακών Ασκήσεων θα γίνει στο χρονικό διάστημα από τη Δευτέρα, 9–1–2017, έως την Παρασκευή, 13–1–2017, σε ημέρα και ώρα που θα κανονίσετε εκ των προτέρων σε συνεννόηση με τον διδάσκοντα.

Παρακαλούνται όσοι από τους φοιτητές κανονίσουν να παραδώσουν τις Ασκήσεις μια συγκεκριμένη ώρα και δεν μπορέσουν να το κάνουν, να ενημερώσουν εγκαίρως τον διδάσκοντα.