1. Προβλήματα αρχικών τιμών

Ασκήσεις

1.1 Έστω $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι κάθε λύση της *ομογενούς* γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t)$, $t \in [a, b]$, είναι της μορφής

$$y(t) = C\mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}$$

με μια σταθερά C.
[*Υπόδειξη*: Με παραγώγιση διαπιστώνει κανείς αμέσως ότι οι συναρτήσεις της δεδομένης μορφής αποτελούν πράγματι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Για το αντίστροφο, υποθέστε ότι y είναι μια λύση της εξίσωσης, θεωρήστε τη συνάρτηση u,

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}y(t), \quad t \in [a, b],$$

και βεβαιωθείτε ότι $u' = 0$, δηλαδή ότι η u είναι σταθερή συνάρτηση.]

1.2 (Η μέθοδος της μεταβολής των σταθερών.) Έστω $p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι οι λύσεις της *μη ομογενούς* γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$, $t \in [a, b]$, είναι της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}\Big[C_0 + \int_a^t q(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\Big], \quad a \le t \le b,$$

με μια σταθερά C_0, βλ. την (1.3).
[*Υπόδειξη*: Για να βεβαιωθείτε ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις, αρκεί να παρατηρήσετε ότι η διαφορά δύο λύσεων της μη ομογενούς εξίσωσης αποτελεί λύση της ομογενούς και να λάβετε υπ' όψιν την Άσκηση 1.1. Για να προσδιορίσετε λύσεις, δοκιμάστε λύσεις της μορφής

$$y(t) = C(t)\mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds},$$

όπως στην Άσκηση 1.1, αλλά τώρα με μια συνάρτηση C στη θέση της σταθεράς C · γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο αυτή η τεχνική λέγεται *μέθοδος της μεταβολής των σταθερών*. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση C πληροί μια απλή διαφορική εξίσωση, η οποία είναι εύκολο να επιλυθεί.]

1.3 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2 για κατάλληλα c και L. Προσδιορίστε τη λύση y με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

1.4 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.4). Ελέγξτε ότι το Θεώρημα 1.2 εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του (1.4) τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $[0, b']$. Επειδή η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$, μελετήστε το b' ως συνάρτηση του c.

1.6 Έστω $t^\star \in (0,1)$. Προσδιορίστε μια μη μηδενική σταθερά c τέτοια ώστε η συνάρτηση $y : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$y(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t^\star, \\ c(t-t^\star)^2, & t^\star < t \le 1, \end{cases}$$

να αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.5). [Σημειώνουμε ότι για $t^\star = 1/2$ μια τέτοια λύση δόθηκε στη θεωρία.]

***1.9** Οι εκτιμήσεις ευστάθειας (1.12) και (1.13) γενικεύονται και για συστήματα διαφορικών εξισώσεων: Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που πληροί τη συνθήκη του Lipschitz (1.20) ως προς την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$. Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z' = f(t,z), & t \in [a,b], \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a,b]$, ισχύει

$$\|y(t) - z(t)\| \le \mathrm{e}^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\|.$$

[*Υπόδειξη*: Συμβολίζουμε με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Αν $x : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\big[\big(x_1(t)\big)^2 + \cdots + \big(x_m(t)\big)^2\big] = 2\big[x_1(t)x_1'(t) + \cdots + x_m(t)x_m'(t)\big] \\ &= 2\big(x'(t), x(t)\big). \,] \end{aligned}$$

***1.10** Θεωρούμε τα προβλήματα αρχικών τιμών (1.10), υποθέτοντας αυτή τη φορά ότι η συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\forall t \in [a,b] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad \big(f(t,y_1) - f(t,y_2)\big)(y_1 - y_2) \le \nu (y_1 - y_2)^2,$$

για κάποια σταθερά ν. (Σημειώνουμε ότι για $\nu = 0$ η παρούσα συνθήκη συμπίπτει με την (1.14).) Συνθήκες αυτής της μορφής αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως *μονόπλευρες* συνθήκες του Lipschitz. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a,b]$, ισχύει

$$|y(t) - z(t)| \le \mathrm{e}^{\nu(t-a)} |y_0 - z_0|.$$

***1.11** Το αποτέλεσμα ευστάθειας (1.15) καθώς και η Άσκηση 1.10 γενικεύονται και για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η γενίκευση της (1.15) είναι: Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της,

$$\forall t \in [a,b] \ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m \quad \big(f(t,y_1) - f(t,y_2), y_1 - y_2\big) \le 0.$$

Έστω y και z οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b], \\ y(a) = y_0, \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z' = f(t,z), & t \in [a,b], \\ z(a) = z_0, \end{cases}$$

αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t \in [a,b]$, ισχύει

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|.$$

Συμβολίσαμε εδώ με $(\cdot,\cdot)$ και $\|\cdot\|$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και την Ευκλείδεια νόρμα, αντίστοιχα, στον $\mathbb{R}^m$.

***1.13** (Η ανισότητα του Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή.) Έστω φ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,T]$, και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \ge 0$. Αν ισχύει

$$\varphi(t) \le \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T],$$

αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \alpha\, \mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0,T].$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε ένα θετικό ε και αποδείξτε ότι η συνάρτηση ψ, $\psi(t) := (\alpha+\varepsilon)\mathrm{e}^{\beta t}$, $t \in [0,T]$, ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\, ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Προφανώς $\varphi(0) < \psi(0)$. Έστω t_0 ο μικρότερος αριθμός στο διάστημα $[0, T]$ για τον οποίον $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Αποδείξτε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν, γιατί οδηγεί στη σχέση $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$.]

***1.15** (Η ανισότητα του Gronwall σε διαφορική μορφή.) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση φ της Άσκησης 1.13 είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, T]$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\varphi'(t) \le \beta\varphi(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \varphi(0)\mathrm{e}^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T].$$

[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) \le \varphi(0) + \beta \int_0^t \varphi(s)\, ds \quad \forall t \in [0, T]$$

και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.12. Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης: Γράψτε τη διαφορική ανίσωση στη μορφή

$$\big(\mathrm{e}^{-\beta s}\varphi(s)\big)' \le 0$$

και ολοκληρώστε από 0 μέχρι t.]

***1.27** Έστω $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας *μη θετικά* ορισμένος πίνακας, $(Mx, x) \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \ge 0,\\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|y(\cdot)\|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση· βλ. Άσκηση 1.11.

***1.28** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \ge 0,\\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \ge 0,\\ x(0) = x_0,\\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $[x(\cdot)]^2 + [y(\cdot)]^2$ είναι φθίνουσα.
[*Υπόδειξη*: Ο πίνακας $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 1\\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ είναι αρνητικά ορισμένος. Βλ. την Άσκηση 1.26.]

***1.29** Έστω $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ ένας *αντισυμμετρικός* πίνακας, δηλαδή τέτοιος ώστε $M^T = -M$, οπότε για τα στοιχεία του ισχύει $M_{ij} = -M_{ji}$, $i, j = 1, \dots, m$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \ge 0,\\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $\|y(\cdot)\|$ είναι σταθερή συνάρτηση, $\|y(t)\| = \|y(0)\|$, για κάθε $t \geq 0$.
[*Υπόδειξη*: Αφού $M^T = -M$, για $x, y \in \mathbb{R}^m$ θα ισχύει $(Mx, y) = -(x, My)$. Ιδιαίτερα, λοιπόν, $(Mx, x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Πάρτε τώρα στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων το εσωτερικό γινόμενο με $y(t)$ και χρησιμοποιήστε την προαναφερθείσα ιδιότητα. Μάλιστα, η ιδιότητα $(Mx, x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ χαρακτηρίζει τους αντισυμμετρικούς $m \times m$ πραγματικούς πίνακες, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα από τη σχέση $(M(x + y), x + y) = (Mx, x) + (My, y) + (Mx, y) + (x, My)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^m$.]