10/12/2015

"Πολυβηματικές Μέθοδοι"

• Προκαταρκτικά: Συμβολισμοί και παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1}) & , n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

Αυτή είναι "διβηματική" μέθοδος

→ Πώς προκύπτει;

• Αριθμητική παραγώγιση

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

• Αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \approx 2h f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \dots$$

μέθοδος του μέσου

Άλλο παράδειγμα:

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t,y(t))\,dt$$

τύπος του Simpson

$$\approx \frac{h}{3}\left[f(t^n,y(t^n)) + 4f(t^{n+1},y(t^{n+1})) + f(t^{n+2},y(t^{n+2}))\right]$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ!

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq (b-a)\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left[\varphi(a) + 4\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \varphi(b)\right]$$

Μέθοδος του Simpson:

$$\begin{cases} y^0,\ y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = \dfrac{h}{3}\left[f(t^n,y^n) + 4f(t^{n+1},y^{n+1}) + f(t^{n+2},y^{n+2})\right], \quad n=0,\dots,N-2 \end{cases}$$

- Γενική περίπτωση

$k \in \mathbb{N}$

$a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, b_k, b_{k-1}, \dots, b_0$

$a_k \neq 0$ και $|a_0| + |b_0| > 0$

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k},y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n,y^n)\right], \quad n=0,\dots,N-k \end{cases}$$

χωρίς περιορισμό της γενικότητας $\Rightarrow$ $\boxed{a_k = 1}$

- $b_k = 0$, το y^{n+k} υπολογίζεται με πράξεις (χωρίς να απαιτείται επίλυση εξίσωσης) $\Rightarrow$ "άμεση μέθοδος"
- $b_k \neq 0$ $\Rightarrow$ "πεπλεγμένη μέθοδος"

Κόστος:

άμεσες μέθοδοι: ένας υπολογισμός της f ανά βήμα

Πεπλεγμένες: Σε κάθε βήμα απαιτείται η επίλυση μιας εξίσωσης (ενός συστήματος) της μορφής:

$$\circledast \quad \boxed{a_k y^{n+k} = h \beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n}$$

▷ Αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και $\left|\frac{\beta_k}{a_k}\right| L h < 1$, το σύστημα λύνεται μονοσήμαντα

▷ Αν a_k, β_k ομόσημα, και η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, τότε πάλι οι προσεγγίσεις ορίζονται μονοσήμαντα

• Η διάσταση του ⊛ είναι m.

(Στις μεθόδους RK το αντίστοιχο σύστημα είναι $qm \times qm$)

Συμπέρασμα: Οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι πολύ λιγότερο δαπανηρές από τις αντίστοιχες μεθόδους RK.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑ: Δεν έχουν τόσο καλές ιδιότητες ευστάθειας.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Πολυβηματική μέθοδος}\\ + \text{ A-ευστάθεια}\end{array}\right\} \Rightarrow p \leq 2$$

~ (Dahlqust) ~

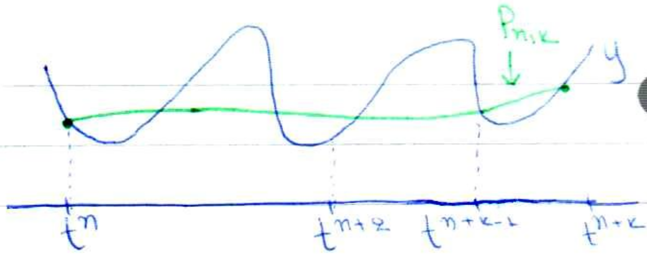
• Σημαντικό παράδειγμα πολυβηματικών μεθόδων:

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΔΡΟΜΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

▶ $m=1$: έστω $p_{n,k} \in \mathbb{P}_k$ τω $P_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i})$, $i=0, \ldots, k$.

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση στο σημείο t^{n+k}.
$y'(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$ και προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+k})$ με την $P_{n,k}'(t^{n+k})$. Αντικαθιστούμε το $\simeq$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m

$m = n, n+k$ και έτσι προκύπτει η k-βηματική μέθοδος αναδρομικών διαφορών



▷ $k=1$: πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

▷ $k=2$: $a_2 = 1$, $a_1 = -4/3$, $a_0 = 1/3$, $b_2 = 2/3$

⋮

Ιδιότητες: Για $k \leq 6$ είναι ευσταθείς, για $k > 6$ ασταθείς.

$\Rightarrow$ Οι μέθοδοι εφαρμόζονται για οποιοδήποτε m.

Παράδειγμα (ιστορικής σημασίας)

Μέθοδοι της μορφής:

$$\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j}), \quad n = 0, \ldots, N-k \end{cases}$$

λέγονται "ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΟΥ Adams"

▷ $b_k = 0$: μέθοδοι του Adams-Bashforth

▷ $b_k \neq 0$: - " - Adams-Moulton

$$\begin{cases} y^0, \quad , y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j}) \end{cases}$$

αυτές λέγονται "μέθοδοι του Nyström" για $b_k = 0$ και "μέθοδοι του Milne-Simpson" για $b_k \neq 0$.

• Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

▷ Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

Ορισμός: Η k-βηματική μέθοδος

(1) $a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)]$ λέγεται "ευσταθής", αν για να υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται από τις f και y_0, αλλά είναι ανεξάρτητη του h, τω. για $y^0, \dots, y^N$ που ικανοποιούν την (1) και $Z^0, \dots, Z^N$ που ικανοποιούν την

(2) $a_k Z^{n+k} + \dots + a_0 Z^n = h[b_k f(t^{n+k}, Z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, Z^n)]$, $n=0, \dots, N$

να ισχύει: $\max\limits_{0\le n\le N} |y^n - Z^n| \le C \max\limits_{0\le j\le k-1} |y^j - Z^j|$

Ορισμός (Συνθήκη των ριζών)

Λέμε ότι μία k-βηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές $a_k, \dots, a_0, b_k, \dots, b_0$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ρ, $\rho(\zeta) = a_k \zeta^k + \dots + a_0$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, δηλαδή αν:

$$\rho(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta| \le 1$$
$$\rho(\zeta) = \rho'(\zeta) = 0 \Rightarrow |\zeta| < 1$$

• Η "συνθήκη των ριζών" είναι αναγκαία για την ευστάθεια. Αυτό προκύπτει από βασικές ιδιότητες εξισώσεων διαφορών.

Πρόταση (Χρήσιμο βοηθητικό αποτέλεσμα τόσο για την ευστάθεια, όσο και για τη σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων) (Χωρίς απόδειξη)

Θεωρούμε μία k-βηματική μέθοδο και υποθέτουμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών. Έστω λ^n, $n=0, \dots, N-k$ δεδομένες σταθερές και έστω b_i^n, $i=0, \dots, k$, $n=0, \dots, N-k$ δεδομένοι αριθμοί με $|b_i^n| \le B$.

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών:

$$a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h[b_k^n \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \psi^n] + \lambda^n, \quad n=0, \dots, N-k$$

Τότε, υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω για $h \le h_0$ να ισχύει:

$$\max_{0\le n\le N} |\psi^n| \le C \left[\max_{0\le j\le k-1} |\psi^j| + N \max_{0\le n\le N-k} |\lambda^n| \right]$$

11/12/2015

Πρόταση (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων)

Αν μία πολυβηματική μέθοδος ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, τότε είναι ευσταθής

Απόδειξη:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k y^{n+k} + \dots + \alpha_0 y^n &= h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)] \\ \alpha_k z^{n+k} + \dots + \alpha_0 z^n &= h[\beta_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, z^n)] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Με $\varphi^i := y^i - z^i$ έχουμε

$$(*) \quad \alpha_k \varphi^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varphi^n = h\{\beta_k[f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k})] + \dots + \beta_0[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]\}$$

· Θέτουμε:

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y^m) - f(t^m, z^m)}{y^m - z^m} & , \alpha\nu\ y^m \neq z^m \\ 0 & , \alpha\nu\ y^m = z^m \end{cases}$$

Η (*) γράφεται τότε στη μορφή

$$\alpha_k \varphi^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varphi^n = h[\beta_k g^{n+k} \varphi^{n+k} + \dots + \beta_0 g^n \varphi^n]$$

Με $\beta_i^n := \beta_i g^{n+i}$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\boxed{\alpha_k \varphi^{n+k} + \dots + \alpha_0 \varphi^n = h(\beta_k^n \varphi^{n+k} + \dots + \beta_0^n \varphi^n)}$$

Τώρα: $\beta_i^n = \beta_i g^{n+i} \Rightarrow |\beta_i^n| = |\beta_i| \underbrace{|g^{n+i}|}_{\leq L} \leq (\max_{0 \leq i \leq k} |\beta_i|) L = B$

Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, οπότε παίρνουμε:

$$\max_{0\le n\le N} |\varphi^n| \le C_1 \max_{0\le j\le K-1} |\varphi^j|,$$

ανεξ. του h

δηλαδή,

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 \max_{0\le j\le K-1} |y^j - z^j|$$

ευστάθεια!

• Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων

Σφάλμα συνέπειας:

$$\rho^n := \sum_{i=0}^{k} a_i\, y(t^{n+i}) - h \sum_{i=0}^{k} b_i \underbrace{f(t^{n+i}, y(t^{n+i}))}_{y'(t^{n+i})}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} [a_i y(t^{n+i}) - h b_i y'(t^{n+i})]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} [a_i y(t^n + ih) - h b_i y'(t^n + ih)]$$

Το σφάλμα συνέπειας το εκφράσαμε συναρτήσει της y και μόνο!

Με $(L_h y)(t) := \sum_{i=0}^{k} [a_i y(t+ih) - h b_i y'(t+ih)]$

Έχουμε $\boxed{\rho^n = (L_h y)(t^n)}$

• Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το σημείο t, παίρνουμε:

$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \dots$$

Ορισμός (Τάξη ακρίβειας της μεθόδου)

Έστω ότι η y είναι αρκετά ομαλή. Τάξη ακρίβειας p της μεθόδου λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος p, τ.ω.

$$\exists\, C_i = C_i(y),\ \forall t \in [a, b-kh]\quad |(L_h y)(t)| \leq C_i h^{p+1}$$

- Η τάξη της μεθόδου είναι p, αν και μόνο αν:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \text{ και } C_{p+1} \neq 0.$$

Τώρα,

▷ $C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k$

▷ $C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k - (b_0 + \dots + b_k)$

και για $j \geq 2$:

▷ $C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$

- Η μέθοδος λέγεται "συνεπής", αν $p \geq 1$. (ορισμός)

$\Rightarrow$ Η μέθοδος είναι "συνεπής" αν και μόνο αν: $\boxed{C_0 = C_1 = 0}$,

δηλαδή αν $\boxed{a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0}$ και $\boxed{a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k = b_0 + b_1 + \dots + b_k}$

$$\left.\begin{aligned} &\rho(\zeta) = a_k \zeta^k + \dots + a_0 \\ &\rho(1) = a_0 + \dots + a_k \end{aligned}\right\}\quad \rho(1) = 0$$

$$\rho'(\zeta) = k a_k \zeta^{k-1} + (k-1) a_{k-1} \zeta^{k-2} + \dots + a_1$$

$$a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k = \rho'(1)$$

Ορίζω ένα νέο πολυώνυμο: $\sigma(\zeta) = \beta_k \zeta^k + \dots + \beta_0$

$$\sigma(1) = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k$$

άρα, $\rho'(1) = \sigma(1)$

Επομένως, $\boxed{\begin{matrix}\rho(1)=0 \\ \rho'(1)=\sigma(1)\end{matrix}}$ ~ Οι 2 προηγούμενες συνθήκες συνέπειας...

- Αν η τάξη της μεθόδου είναι p, τότε ισχύει

$$\max_{0\le n\le N-k} |\rho^n| \le \underset{\substack{\parallel \\ C_{p+1}}}{C'} h^{p+1} \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)|$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Εκτίμηση του σφάλματος πολυβηματικών μεθόδων)
Έστω ότι η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής (ικανοποιεί, δηλ. τη συνθήκη των ριζών), και έχει τάξη ακριβείας p. Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$. Τότε, υπάρχει σταθερά C, ανεξ. του h, τ.ω.

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C \left[h^p \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1} |y(t^j) - y^j| \right]$$

<u>Απόδειξη:</u>
Με $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$, έχουμε

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon^n = h \{ \beta_k [f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) - f(t^{n+k}, y^{n+k})] + \dots + \beta_0 [f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \rho^n \}$$

Όπως και στην απόδειξη της ευστάθειας,
με

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{y(t^m) - y^m}, & \text{για } y(t^m) - y^m \ne 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παίρνουμε

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \quad + a_0 \varepsilon^n = h[\beta_k^n \varepsilon^{n+k} + \dots + \beta_0^n \varepsilon^n] + \rho^n$$

Όμως,

$$|\beta_i^n| \leq L \max_{0\leq i\leq k} |\beta_i| = B.$$

οπότε σύμφωνα με την τελευταία πρόταση του προηγούμενου μαθήματος έχουμε:

$$\max_{0\leq n\leq N} |\varepsilon^n| \leq C_1 [N \max_{0\leq n\leq N-1} |\rho^n| + \max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j|]$$

Άρα,

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C_1 [C' N h^{p+1} \max_{a\leq t\leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j|]$$

$Nh = b-a$

15/12/2015

Υπόθεση: Η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας p.
Τότε, αν $y \in C^{p+1}[a,b]$ ισχύει:

$$(*) \quad \max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq c [\max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a\leq t\leq b} |y^{(p+1)}(t)|]$$

με σταθερά C ανεξάρτητη του h.

Ερώτημα: Πώς μπορούν να υπολογιστούν οι αρχικές προσεγγίσεις $y^1, \dots, y^{k-1}$ έτσι ώστε το δεξιό μέλος της (*) να είναι της τάξης h^p;

π.χ. θέτουμε $y^0 = y_0$

Υπολογίζουμε τις προσεγγίσεις $y^1, \dots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK τάξης $p-1$, οπότε θα έχουμε:

$$|y(t^j) - y^j| \leq Ch^p \quad , \; j = 1, \dots, k-1$$

Αρκεί η τάξη της μεθόδου RK να είναι $p-1$, γιατί με αυτή τη μέθοδο κάναμε $k-1$ βήματα, δηλαδή πλήθος βημάτων ανεξάρτητο του h.

- Μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας p k-βηματικής ευσταθούς μεθόδου:

$$p = \begin{cases} k+1 \;, & k \text{ περιττός} \\ k+2 \;, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$