• Περιοχή απόλυτης ευστάθειας.

Για Δ.Ε της μορφής $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ οι μέθοδοι του τραπεζίου και του μέσου συμπίπτουν. Άρα έχουν τις ίδιες περιοχές ευστάθειας, άρα η περιοχή ευστάθειας της μεθόδου του μέσου είναι το $\mathbb{C}^-$.

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: "Μέθοδοι των Runge-Kutta"

3.1. Προκαταρκτικά: Συμβολισμοί και Παραδείγματα

$y^n \longrightarrow y^{n+1}$ "μονοβηματικές μέθοδοι"

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Έστω $\tau_i \in \mathbb{R}$ (συνήθως $0 \le \tau_i \le 1$), $i = 1, \dots, q$.
$b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, q$ και $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, q$.
Κάθε τέτοιο σύνολο αριθμών περιγράφει μία μέθοδο R.K. (Butcher)

▸ Γράφουμε αυτές τις σταθερές σε μορφή μητρώου (μητρώο του Butcher)

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^\tau & \end{array}$$

Για $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα:

(1) $$\int_0^{\tau_i} \varphi(\tau)\,d\tau \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\varphi(\tau_j), \quad i = 1, \dots, q$$

(2) $$\int_0^{1} \varphi(\tau)\,d\tau \approx \sum_{i=1}^{q} b_i\,\varphi(\tau_i)$$

Τα $\tau_1, \dots, \tau_q$ είναι οι κόμβοι και στους $q+1$ αυτούς τύπους ολοκλήρωσης. Τα βάρη στον τύπο που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα στο $[0, \tau_i]$ είναι $a_{i1}, \dots, a_{iq}$. Τα βάρη στον τύπο που προσεγγίζει το ολοκλήρωμα στο $[0,1]$ είναι $b_1, \dots, b_q$.

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + n \cdot h$, $n = 0, \dots, N$.

▸ Νέος συμβολισμός: $t^{n,i} = t^n + \tau_i \cdot h$, $i = 1, \dots, q$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt$$

Αλλαγή μεταβλητής: Θέτω $t = t^n + sh$

Τότε: $y(t^{n,i}) - y(t^n) = \displaystyle\int_0^{\tau_i} f(t^n + sh, y(t^n + sh))\, h\, ds$

$$\boxed{y(t^{n,i}) - y(t^n) = h \int_0^{\tau_i} f(t^n + sh, y(t^n + sh))\,ds}$$

• Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος, όπως στη σχέση (1), παίρνουμε:

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) \approx h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(\overbrace{t^n + \tau_j h}^{t^{n,j}}, y(\overbrace{t^n + \tau_j h}^{t^{n,j}}))$$

$$y(t^{n,i}) \approx y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))$$

• Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^{n,j})$ με $y^{n,j}$ και το $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε:

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad , i=1,\dots,q$$

Αυτό είναι το σύστημα με q εξισώσεις και q αγνώστους τα $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$. Τα $y^{n,i}$ λέγονται <u>ενδιάμεσα στάδια</u>. Το q λέγεται πλήθος σταδίων της μεθόδου.

<u>Στόχος:</u> Θα χρησιμοποιήσουμε το $y^{n,i}$ και τα b_i για να προσδιορίσουμε προσέγγιση y^{n+1} της $y(t^{n+1})$

<u>Τώρα:</u> $\displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$

$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$ με $t := t^n + sh$ παίρνουμε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = h\int_0^1 f(t^n + sh, y(t^n + sh))\,ds$$

$$\approx h\sum_{i=1}^{q} b_i f(\underbrace{t^n + c_i s}_{= t^{n,i}}, y(t^n + c_i s))$$

Άρα: $y^{n+1} = y^n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$

$$\begin{cases} y^0 = y_0 \\ \left.\begin{array}{l} y^{n,i} = y^n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \ , i=1,\dots,q \\ y^{n+1} = y^n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{array}\right\} n=0,\dots,N-1 \end{cases}$$

Τα $y^{n,i}$ είναι προσεγγίσεις των $y(t^{n,i})$, αλλά εμάς μας ενδιαφέρει πόσο καλές προσεγγίσεις των $y(t^n)$ είναι τα y^n.

Ειδική περίπτωση: Ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός.

Τότε: $y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$ ~ υπολογίζονται αναδρομικά, χωρίς να χρειάζεται να λύσω σύστημα

$\vdots$

$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

Οι μέθοδοι αυτές λέγονται άμεσες. Όλες οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες.

Ειδική κατηγορία πεπλεγμένων μεθόδων:

Ο A είναι κάτω τριγωνικός (όχι γνήσια). Τότε,

$y^{n,1} = y^n + h a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \rightsquigarrow y^{n,1}$

$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h a_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \rightsquigarrow y^{n,2}$

$\vdots$

$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}) + h a_{qq} f(t^{n,q}, y^{n,q}) \rightsquigarrow y^{n,q}$$

Αυτές οι μέθοδοι λέγονται "ημιπεπλεγμένες".

Παραδείγματα

1. $q = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$$

$t^{n,1} = t^n + \overset{=0}{\tau_1} h = t^n$

$$\Rightarrow \boxed{y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)}$$

"άμεση μέθοδος του Euler"

01/12/2015

+ Επιπλέον μάθημα
Πέμπτη, 10-12-15 13:14
Παρασκευή, 11-12-15 12-13

Παραδείγματα (συνέχεια)

2. Το μητρώο $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ περιγράφει την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Πράγματι:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^{n,1}) \end{cases}$$

Επειδή τα δεξιά μέλη είναι ίδια, συμπεραίνουμε ότι $\boxed{y^{n+1} = y^{n,1}}$

Άρα, αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n+1})$$

Όμως,

$$t^{n,1} = t^n + \tau_1 h = t^n + h = t^{n+1}$$

Συνεπώς, $\boxed{y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})}$

3. Το μητρώο $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ περιγράφει τη μέθοδο του μέσου

(Είναι η μονοδιάστατη μέθοδος RK με $q = 1$ και τάξη $p = 2$ $(= 2q)$)

Πράγματι: $\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h\frac{1}{2}f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$

Η πρώτη σχέση δίνει $hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = 2(y^{n,1} - y^n)$

η δεύτερη δίνει $hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^{n+1} - y^n$

Άρα $y^{n+1} - y^n = 2(y^{n,1} - y^n)$

$\Rightarrow y^{n+1} - y^n + 2y^n = 2y^{n,1}$

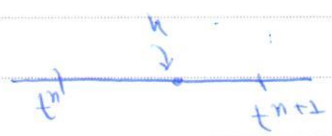
$\Rightarrow y^{n,1} = \dfrac{y^n + y^{n+1}}{2}$

Άρα $y^{n+1} = y^n + hf\left(t^{n,1}, \dfrac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$.

Όμως, $t^{n,1} = t^n + c_1 h = t^n + \dfrac{1}{2}h = \dfrac{t^n + t^{n+1}}{2}$

οπότε,

$$y^{n+1} = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$$



4. Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

περιγράφει τη μέθοδο του τραπεζίου.

* Αυτά τα 4 θέλει να τα ξέρουμε απέξω.

Πράγματι, $y^{n,1} = y^n$

$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$$

Αφού τα δεξιά μέλη στις 2 τελευταίες σχέσεις συμπίπτουν, θα έχουμε $y^{n,2} = y^{n+1}$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη σχέση παίρνουμε:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(\underset{t^n}{\underset{\parallel}{t^{n,1}}}, y^n) + f(\underset{t^{n+1}}{\underset{\parallel}{t^{n,2}}}, y^{n+1})\right]$$

5. Το μητρώο

0	0	0
1/2	0	1/2
0	1	

περιγράφει τη μέθοδο:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h f(\underset{\frac{t^n + t^{n+1}}{2}}{\underset{\parallel}{t^{n,2}}}, \underbrace{y^n + \frac{h}{2} f(\overset{= t^n}{t^{n,1}}, y^n)}_{y^{n,2}}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \underbrace{y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)}\right)$$

αυτό δίνει η μέθοδος του Euler με βήμα $h/2$

Η μέθοδος αυτή λέγεται βελτιωμένη μέθοδος του Euler (η άμεση μέθοδος του μέσου)

Τάξη ακρίβειας = 2

6. Η μέθοδος RK που περιγράφεται από το μητρώο:

1/4	1/4 − μ	1/2 − μ
1/4 + μ	1/4	1/2 + μ
1/2	1/2	

με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$

έχει τάξη ακρίβειας $p=4$. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος των Gauss Legendre δύο σημείων.

Επιλυσιμότητα και ευστάθεια μεθόδων RK

▸ Επιλυσιμότητα

Οι άμεσες μέθοδοι είναι πάντα καλά ορισμένες, δηλαδή έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα των $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$.

Ερώτημα: Τι γίνεται στην περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων.

Απαίτηση: Χρειάζονται συνθήκες.

• **Υπόθεση:** Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz:

(**) $\exists\, L \geq 0 \;\forall t \in [a,b] \;\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

Πρόταση (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων)

Έστω ότι ισχύει η (**) και ότι $h < \frac{1}{\gamma}$ με $\gamma := L \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$

Τότε το (*) έχει ακριβώς μία λύση.

$$\boxed{y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y^{n,j})}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

$$F_i(x) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, x_j), \quad i = 1, \dots, q$$

με $x = (x_1, \dots, x_q)^T$ και $F(x) = (F_1(x), \dots, F_q(x))^T$

Κάθε σταθερό σημείο $x^* \in \mathbb{R}^q$ της F αποτελεί λύση του (*) και αντίστροφα. Αρκεί να αποδείξετε ότι η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

• Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε $F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h\left[\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j)\right.$

$\left. - \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)\right]$

$\Rightarrow F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left[f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)\right]$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\leq L|x_j - \tilde{x}_j|}$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq L h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|x_j - \tilde{x}_j|}_{\leq \max_{1\leq \ell \leq q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|}$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h L \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\leq \gamma} \max_{1\leq \ell \leq q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq \gamma h \max_{1\leq \ell \leq q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|$

$\Rightarrow \max_{1\leq \ell \leq q} |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq \gamma h \max_{1\leq \ell \leq q} |x_\ell - \tilde{x}_\ell|$

$\Rightarrow \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty \leq \underbrace{\gamma h}_{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$

$\Rightarrow F$ συστολή στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$

Άρα, η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

Ευστάθεια

Ορισμός (ευστάθειας μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής, αν για το ΠΑΤ.

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

από τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, αν θεωρήσουμε προσεγγίσεις $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$ και ικανοποιούν την

$$(1)\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

και την

$$(2)\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \text{ δεδομένο} \\ z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

ισχύει $\max\limits_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C\,|y^0 - z^0|$ με σταθερά C, ανεξάρτητη του N και του h.

Πρόταση (ευστάθεια μεθόδων RK)

Έστω μια μέθοδος RK, έστω ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης μαζί με τη συνθήκη Lipschitz και έστω $y^0, \dots, y^N$ ώστε να ικανοποιείται η (1) και $z^0, \dots, z^N$ τ.ω.

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \\ z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \\ z^{n+1} = z^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$$

με ρ^n δεδομένους αριθμούς.

Τότε υπάρχουν οι σταθερές C_1, C_2 ανεξ. του h τ.ω.

$$(3)\quad \max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho^n|$$

Παρατήρηση: Για $\rho^0, \dots, \rho^{N-1} = 0$, η (3) δίνει $\max\limits_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le$

$C_1 |y^0 - z^0|$ άλλ ευστάθεια.

Απόδειξη (Πρότασης)

Αφαιρώντας τις μεσαίες σχέσεις της (1) και (2) παίρνουμε:

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})]$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| |f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + hL \underbrace{\sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|}_{\le \gamma} \max_{1 \le \ell \le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1 \le \ell \le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \frac{1}{1 - \gamma h} |y^n - z^n|$$

Για $h \le h_0 < \frac{1}{\gamma}$ έχουμε $\frac{1}{1-\gamma h} \le C_1$, οπότε παίρνουμε.

$$(4) \quad \boxed{\max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le C |y^n - z^n|}$$

- Αφαιρώντας τις τελευταίες σχέσεις των (1) και (2) παίρνουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i [f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})] - \rho^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \sum_{i=1}^{q} |b_i| \underbrace{|f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})|}_{\le L |y^{n,i} - z^{n,i}|} + |\rho^n|$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL \sum_{i=1}^{q} |b_i| C_1 |y^n - z^n| + |\rho^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le \underbrace{(1 + hL C \sum_{i=1}^{\varrho} |b_i|)}_{= c} |y^n - z^n| + \underbrace{\max_{0 \le m \le N-1} |p^m|}_{= K}$$

Λήμμα

$$\Rightarrow \max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{c(b-a)} |y^0 - z^0| + \frac{e^{c(b-a)} - 1}{c \cdot h} \max_{0 \le m \le N-1} |p^m|$$

03/12/2015

$$(*) \begin{cases} y' = f(t, y), \ a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1\varrho} & \tau_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2\varrho} & \tau_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\varrho 1} & \cdots & a_{\varrho\varrho} & \tau_\varrho \\ \hline b_1 & \cdots & b_\varrho & \end{array}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$, $t^{n,i} := t^n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, \varrho$

$$(**) \begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{\varrho} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{\varrho} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση των μεθόδων RK.

$$(++)\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad , i=1,\dots,q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Το δ^n λέγεται σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα ή τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης της μεθόδου RK.

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 3.1.

▸ Τάξη ακρίβειας της μεθόδου λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος p, τ.ω. για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών με αρκετά ομαλή λύση, υπάρχει σταθερά $\tilde{C}$ (που εξαρτάται από το πρόβλημα αλλά όχι από το h) τ.ω.

$$(+)\quad \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C} h^{p+1}$$

- Η μέθοδος λέγεται συνεπής αν $p \ge 1$.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέπεια:
  $p \ge 1 \iff b_1 + \dots + b_q = 1$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδου RK)
Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και ότι το (*) έχει μία αρκετά ομαλή λύση y. Με το γ που ορίσαμε στην Πρόταση 3.1 έστω $h_0 > 0$ τ.ω. $\gamma h_0 < 1$ και $0 < h \le h_0$.

Θεωρούμε τη μέθοδο RK (**) και υποθέτουμε ότι ισχύει η εκτίμηση (+) του τοπικού σφάλματος. Τότε, έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'} \left[e^{C'(b-a)} - 1 \right] \cdot h^p$$

όπου οι σταθερές $\tilde{C}$ και C' είναι ανεξάρτητες του h και ορίζονται στην (+) και στην απόδειξη της Πρότασης 3.2.

Απόδειξη

Γράφουμε την (++) στη μορφή

$$\begin{cases} \mathcal{Y}^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \mathcal{Y}^{n,j}) \\ y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \mathcal{Y}^{n,i}) - \delta^n \end{cases}$$

Από την Πρόταση 3.2 (με $Z^n = y(t^n)$ και $\rho^n = -\delta^n$) προκύπτει αμέσως ότι $\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C_1 \underbrace{|y^0 - y(a)|}_{=0} +$

$$+ C_2 \frac{1}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n|$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C_2 \frac{1}{h} \underbrace{\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n|}_{\le \tilde{C} h^{p+1}}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C_2 \tilde{C} h^p$$

- Οι μέθοδοι RK είναι ευσταθείς
- συνεπείς

$\Rightarrow$ σύγκλιση.

• Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μεθόδων RK

▷ $p \leq 2q$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια

▷ $p \leq q$ για άμεσες μεθόδους.

• Ακριβέστερα άνω φράγματα για το p προκύπτουν από τη συνάρτηση ευστάθειας r της μεθόδου.

• $p \geq 1 \iff b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$

• Η p μπορεί να προσδιοριστεί αναπτύσσοντας κατά Taylor. Για μεγάλο q οι πράξεις γίνονται πολύπλοκες (Οι πράξεις απλοποιούνται χρησιμοποιώντας τα λεγόμενα δέντρα του Butcher)

• Οι λεγόμενες "απλοποιημένες συνθήκες" μπορούν να ελεγχθούν εύκολα και οδηγούν γενικά σε κάτω φράγματα για το p. (Για οικογένειες μεθόδων RK που χρησιμοποιούνται στην πράξη, οι συνθήκες αυτές μας δίνουν την ακριβή τιμή του p)

• Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω. $\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^{l} = \frac{1}{l+1}$,

$l = 0, \dots, \tilde{p}-1$, τότε το $p \leq \tilde{p}$.

Παράδειγμα

Μέθοδος του μέσου
$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(α) Ποια είναι η τάξη $p = ;$

(Μέχρι τώρα ξέρουμε ότι: $p \geq 1$ και $p \leq 2$, άρα πρέπει να βρω αν είναι 1 ή 2)

$$\begin{cases} Y^{n,1} = y(t^n) + h\frac{1}{2} f(t^{n,1}, Y^{n,1}) \\ \delta^n = [y(t^n) + h f(t^{n,1}, Y^{n,1})] - y(t^{n+1}) \end{cases} \quad \Bigg| \quad t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2} \ \left(c_1 = \frac{1}{2}\right)$$

Θα αποδείξουμε ότι $p=2$ * ισοσελίδα, τύπος του Taylor για 2 μεταβλητές.

Taylor:

$$f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1}) = f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})\right)$$

$$\overset{*}{=} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n))\right] + O(h^2)$$

Άρα, $\delta^n = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))\right] + O(h^3) - y(t^{n+1})$.

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))\right] + O(h^3) - \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)\right]$$

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)\right] + O(h^3)$$

- Όμως,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t)$$

Επομένως, $\delta^n = \frac{h^2}{2}\left[\underbrace{f_t(t^n, y(t^n)) + y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n))}_{y''(t^n)} - y''(t^n)\right] + O(h^3)$

$$\delta^n = O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

Θα αποδείξουμε και με πράξεις, ότι $p \leq 2$. (Μέσω παραδείγματος)

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t^3$

Θα αποδείξουμε ότι $|\delta^n| \geq c' h^3 \Rightarrow p \geq 2$
$\uparrow$
>0

Έχουμε, $\delta^n = y(t^n) + h\, \underbrace{3(t^{n,1})^2}_{f(t^{n,1},\, y^{n,1})} - y(t^{n+1})$

$$= (t^n)^3 + 3h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - (t^n + h)^3$$

$$= \cancel{(t^n)^3} + \cancel{3h(t^n)^2} + \cancel{3t^n h^2} + \frac{3}{4}h^3 - \cancel{(t^n)^3} - \cancel{3(t^n)^2 h} - \cancel{3t^n h^2} - h^3$$

$$= \left(\frac{3}{4} - 1\right) h^3 = -\frac{1}{4} h^3$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{4} h^3 \rightsquigarrow \boxed{p \leq 2}$$

08/12/2015

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

Ικανές συνθήκες για ορισμένη τάξη ακρίβειας μεθόδων RK:

(Butcher)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Απλοποιημένες Συνθήκες)

Έστω $p, r, s \geq 1$ τ.ω.

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, \ldots, p-1$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \tau_j^k = \frac{\tau_i^{k+1}}{k+1}, \quad k = 0, \ldots, s-1$
$i = 1, \ldots, q$

(3) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k \alpha_{ij} = \frac{b_j(1-\tau_j^{k+1})}{k+1}$, $k=0,\dots,r-1$
$j=1,\dots,q$

(Αυτές οι τρείς σχέσεις μας δίνουν τα p, s και r)

(4) $p \le r+s+1$, $p \le 2s+2$

Τότε, η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον p

- Η (4) σημαίνει ότι η τάξη ακρίβειας είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$

Πόρισμα (Butcher, Crouzeux)

(α) Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1). Αν η (2) ισχύει για $s=p-1$, τότε η τάξη (ακρίβειας) της μεθόδου είναι p

(β) Έστω q' το πλήθος των τ_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1), και ισχύει η (2) με $s=q'$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι p

(γ) Υπάρχει ακριβώς μία μέθοδος με τάξη $p=2q$ (για όλες τις άλλες $p<2q$)

Τα τ_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη αντίστοιχα του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss στο $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.
Τα α_{ij} υπολογίζονται από τη (2) με $s=q$.

▷ Αυτές οι μέθοδοι λέγονται μέθοδοι των Runge-Kutta-Gauss-Legendre.

• Περιοχή ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις της εκθετικής συνάρτησης

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \boxed{\lambda \in \mathbb{C}}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο RK στο (*) παίρνουμε:

$$(1) \quad y^{n,i} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij} y^{n,j}, \quad i = 1, \dots, q$$

$$(2) \quad y^{n+1} = y^n + h\lambda \sum_{i=1}^{q} b_i y^{n,i}$$

• Γράφουμε την (1) στη μορφή

$$I_q \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

Τότε παίρνουμε

$$(I_q - \lambda h A) \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

Αν ο πίνακας $I_q - \lambda h A$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A, τότε παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:e}$$

Η (2) γράφεται στη μορφή

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h\, b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας εδώ το $\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$ με αυτό που βρήκαμε προηγουμένως, παίρνουμε:

$$y^{n+1} = y^n + y^n \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{n+1} = y^n \left[1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e\right]}$$

▷ Θέτουμε (3) $r(z) = 1 + z\, b^T (I_q - zA)^{-1} e$

και η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή:

$$(4) \quad \boxed{y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n}$$

Σημείωση! Η συνάρτηση r δεν ορίζεται για το πολύ q μιγαδικούς αριθμούς, όταν το $\frac{1}{z}$ είναι ιδιοτιμή του A.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιας μορφής είναι η συνάρτηση r;

Θέτουμε $w := (I_q - zA)^{-1} e$ και έχουμε

$$(5) \quad (I_q - zA)\, w = e$$

Τότε: $r(z) = 1 + z\, b^T \omega$

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα (5) με τη μέθοδο του Cramer. Ο παρονομαστής για όλα τα ω_i είναι $\det(I_q - zA)$ που είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ q.

▷ Αντίστοιχα, οι αριθμητές των ω_i είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $q-1$.

<u>Συμπέρασμα:</u> Η r είναι μια ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα βαθμού <u>το πολύ q</u>.

• <u>Περιοχή ευστάθειας:</u>

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1 \}$$

• <u>Σφάλμα συνέπειας:</u>

$$\delta^n = r(\lambda h)\, y(t^n) - y(t^{n+1})$$

(Λύση του (*) είναι: $y(t) = e^{\lambda t},\ t \ge 0$)

$$\delta^n = r(\lambda h)\, e^{\lambda t^n} - e^{\lambda (t^n + h)} = e^{\lambda t^n} [r(\lambda h) - e^{\lambda h}]$$

$$\Rightarrow |\delta^n| = |r(\lambda h) - e^{\lambda h}| \cdot \underbrace{|y(t^n)|}_{\neq 0}$$

$$\delta^n = O(h^{p+1}) \iff e^{\lambda h} - r(\lambda h) = O((\lambda h)^{p+1})$$

δηλ.

$$|e^z - r(z)| = O(|z|^{p+1}) \quad \text{για } z \to 0$$

(ή $\le C |z|^{p+1}$)

(**) $|e^z - r(z)| \le C |z|^{p+1}, \quad z \to 0$

• Η (**) είναι αναγκαία συνθήκη για να έχει η μέθοδος RK τάξη p. Δεν είναι ικανή!

• Άμεσες μέθοδοι RK:

Όπως είδαμε η r είναι μια ρητή συνάρτηση και ο βαθμός τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή είναι το πολύ ϱ.

⇒ Ποιος είναι ο παρονομαστής στην περίπτωση άμεσων μεθόδων:

$$\det(\underbrace{I_\varrho - zA}) = 1$$

γνήσια κάτω τριγωνικός

κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο

• Άρα, σε αυτή την περίπτωση η r είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ ϱ.

Υπόθεση: η τάξη της μεθόδου είναι $p \geq 1$.

⇒ Ποια είναι η μορφή της r;

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots +$$

Για να ισχύει $|e^z - r(z)| \leq C_1 |z|^{p+1}$ πρέπει η r να είναι της μορφής $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + c_{p+1} z^{p+1} + \dots + c_\varrho z^\varrho$.

▷ Ιδιαίτερα, για τις άμεσες μεθόδους: $p \leq \varrho$

$$p = \varrho \Leftrightarrow r(z) = 1 + z + \dots + \frac{z^\varrho}{\varrho!}$$

Έστω μια άμεση μέθοδος RK με $p \geq 1$. Τότε $|r(z)| \to \infty$, $|z| \to \infty$.

Συμπέρασμα: Η περιοχή ευστάθειας άμεσων μεθόδων (με $p \geq 1$) είναι φραγμένη, οπότε τέτοιες μέθοδοι δεν είναι A-ευσταθείς.

• Συναρτήσεις ευστάθειας

▹ Άμεση Euler: $r(z) = 1 + z$

▹ Πεπλεγμένη Euler: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

▹ Πεπλεγμένη μέθοδος μέσου ή -"- τραπεζίου: $r(z) = \dfrac{1 + z/2}{1 - z/2}$

• Ικανή και αναγκαία συνθήκη για A-ευστάθεια:

Μια μέθοδος RK είναι A-ευσταθής, αν και μόνο αν:
$|r(iy)| \leq 1, \ \forall y \in \mathbb{R}$
και ο παρονομαστής της r (αν έχουμε κάνει όλες τις δυνατές απλοποιήσεις) δεν μηδενίζεται για z με $\operatorname{Re} z < 0$.

"Προσεγγίσεις Padé"

Μια συνάρτηση $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$ με $m, \ell \in \mathbb{N}_0$, λέγεται προσέγγιση Padé της e^z, αν $e^z - \dfrac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1})$ για $z \to 0$

• Για κάθε $m, \ell \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακριβώς μια τέτοια συνάρτηση.

Αν η συνάρτηση ευστάθειας r μιας μεθόδου RK είναι προσέγγιση Padé της e^z (αυτό συμβαίνει κατά κανόνα, αλλά όχι πάντα), τότε η μέθοδος είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν: Ο βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος ή κατά ένα ή κατά δύο μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή.

B-ευστάθεια

Ορισμός

Μια μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής, αν:

(α). $b_i \geq 0$, $i=1,\dots,q$

(β). Ο $q \times q$ πίνακας M με στοιχεία $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$, $i,j = 1,\dots,q$ είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλ.

$\forall x \in \mathbb{R}^q : (Mx, x) \geq 0$.

• Τώρα ισχύουν:

(α) αλγεβρική ευστάθεια $\Rightarrow$ B-ευστάθεια

(β) αν τα $\tau_1, \dots, \tau_q$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους:

B-ευστάθεια $\Rightarrow$ αλγεβρική ευστάθεια

Παραδείγματα:

1. πεπλεγμένη Euler:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

• $b_1 = 1 \geq 0$

$M = (1)$

$(Mx, x) = x^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ μέθοδος B-ευσταθής.

2. Μέθοδος μέσου

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(α) $b_1 = 1 \geq 0$

(β) $m_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow$ μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής, ιδιαίτερα και B-ευσταθής.

$(Mx, x) = 0 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

3. Μέθοδος του Τραπεζίου :

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$m_{11} = 0 + 0 - 1/2 \cdot 1/2 = -1/4.$

οπότε $\left(M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -1/4 < 0$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής.

Επειδή $c_1 \neq c_2$, η μέθοδος δεν είναι ούτε B-ευσταθής.