2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ: "Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER" 10/11/2015

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση

Έστω $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$
(t^m ~ άνω δείκτης)

Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i των τιμών $y(t^i)$ της ακριβούς λύσης στο σημείο t^i, $i = 0, \dots, N$

- **Ομοιόμορφος διαμερισμός:** $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

"ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ Euler"

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

(Στην περίπτωση μη ομοιόμορφου διαμερισμού το βήμα της μεθόδου είναι: $y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) f(t^n, y^n)$)

Κόστος της μεθόδου ανά βήμα:
Ένας υπολογισμός της f

- **Τρόποι κατασκευής της μεθόδου**

1ος τρόπος: "Με αριθμητική διαφόριση"

Έχουμε

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

Τώρα, $$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

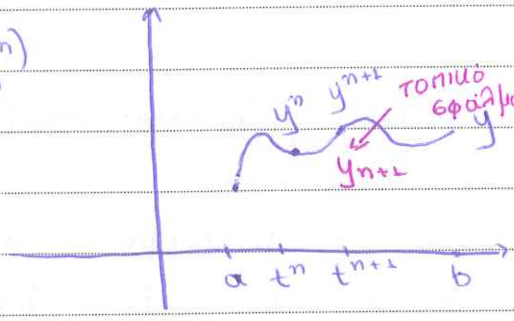
οπότε,

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$$

▹ Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τις ακριβείς τιμές $y(t^m)$ με τις προσεγγίσεις y^m, $m = n, n+1$,

και παίρνουμε $\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$



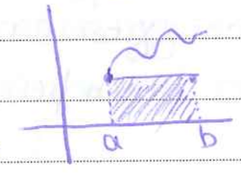
2ος τρόπος: Με αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος με τον αριστερό τύπο του ορθογωνίου και παίρνουμε $y(t^{n+1}) - y(t^n) = h f(t^n, y(t^n))$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\,\varphi(a)$$



$\uparrow t^{n+1} - t^n$

3ος τρόπος: Με ανάπτυγμα Taylor

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + (t^{n+1} - t^n)\,y'(t_n) + \frac{(t^{n+1} - t^n)^2}{2!} y''(\xi_n)$$

$$= y(t^n) + h\,y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \qquad \text{με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\approx y(t^n) + h\,y'(t^n)$$

$$y(t^{n+1}) \simeq y(t^n) + \underbrace{hy'(t^n)}_{f(t^n,\, y(t^n))} \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq hf(t^n, y(t^n))$$

Συνέπεια:

- Το μέγεθος $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^n, y(t^n))$

  λέγεται "σφάλμα συνέπειας" ή "τοπικό σφάλμα" της μεθόδου

- Το δ^n δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε γιατί χρησιμοποιεί τιμές της ακριβούς λύσης, είναι όμως χρήσιμο για τη μελέτη της μεθόδου.

$$\left(y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)\right)$$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - \underbrace{[\,y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))\,]}_{\tilde{y}^{n+1}}$$

Η προσέγγιση που βρίσκουμε κάνοντας ένα βήμα με τη μέθοδο

▸ Πώς συμπεριφέρεται το δ^n καθώς $h \to 0$;

Έχουμε $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot y'(t^n)$

Ανάπτυγμα Taylor:

- 1ος τρόπος: $\delta^n = [\,\cancel{y(t^n)} + \cancel{h\,y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\,] - \cancel{y(t^n)} - \cancel{hy'(t^n)}$

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

Δεν ισχύει γενικά για διανυσματικές συναρτήσεις!

• $2^{ος}$ τρόπος:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, y''(t)\, dt$$

Άρα, $|\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |y''(t)|$

οπότε

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

• Όταν το δ^n τείνει στο μηδέν ταχύτερα από το h, τότε λέμε ότι η μέθοδος είναι συνεπής!

Ευστάθεια:

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y,

$$\exists\, L \ge 0,\ \forall t \in [a,b],\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2|$$

• Για δεδομένες αρχικές τιμές y^0, z^0 θεωρούμε τις προσεγγίσεις y^n, z^n που δίνει η μέθοδος του Euler:

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1$$
$$z^{n+1} = z^n + hf(t^n, z^n), \quad -\,''\,-$$

• Αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h\underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\le L|y^n - z^n|}$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + Lh)\,|y^n - z^n|$$

$\Rightarrow$ (Επαγωγικά)

$$\boxed{|y^n - z^n| \leq (1+Lh)^n |y^0 - z^0|}, \quad n=0,\dots,N$$

Ισχυρισμός: $e^x \geq 1+x \quad , \ \forall x \geq 0$

1ος τρόπος $\Rightarrow$ (σειρά Taylor ...)

2ος -ll- $\Rightarrow$ $\varphi(x) = e^x - (1+x)$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$, αύξουσα

Άρα, $1 + Lh \leq e^{Lh}$, οπότε

$$|y^n - z^n| \leq \underbrace{(e^{Lh})^n}_{" e^{L(nh)} \leq (b-a)} |y^0 - z^0|$$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq \boxed{e^{L(b-a)}} |y^0 - z^0|$$

C σταθερά, ανεξάρτητη του h.

* Λήμμα * (Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Έστω $\delta > 0$ και $\kappa, d_0, d_1, \dots \geq 0$ τ.ω.

(*) $d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + \kappa \quad , i = 0, 1, 2, \dots$

Τότε, ισχύει (**) $d_n \leq d_0 e^{n\delta} + \kappa \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \quad , n = 0, 1, 2, \dots$

Απόδειξη:

- Για $n=0$, η (**) γίνεται $d_0 \le d_0$ που ισχύει.

- Έστω λοιπόν $n \ge 1$

Ισχυρισμός:

(+) $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$

Απόδειξη ισχυρισμού:

Επαγωγικά:

$n=1$: $d_1 \le (1+\delta)d_0 + K$ (ισχύει σύμφωνα με την (*))

$n \to n+1$: $d_{n+1} \le (1+\delta)\, d_n + K$ (*)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπόθεση} \\ \text{επαγωγής}}}{\le} (1+\delta)\left\{(1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]\right\}$$

$$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^n]$$

Τώρα, $(1+\delta)^n \le e^{n\delta}$

και $1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1} = \dfrac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta)-1} = \dfrac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}$

$$\le \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

Οπότε, η (+) δίνει

$d_n \le e^{n\delta} d_0 + K\dfrac{e^{n\delta}-1}{\delta}$, δηλαδή ισχύει η (**)

12/11/2015

Η μέθοδος του Euler

$$(*)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

• $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$ σφάλμα συνέπειας (τοπικό σφάλμα)

Τότε, $\max\limits_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \dfrac{M}{2} h^2$, $M := \max\limits_{a \le t \le b} |y''(t)|$

Εκτίμηση του σφάλματος (σύγκλιση)

Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Έστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση του $(*)$. Αν $y^0, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για το ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h =: \dfrac{b-a}{N}$, τότε ισχύει η εκτίμηση του σφάλματος

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]}_{C} \cdot h$$

Απόδειξη:

Έχουμε

$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + \delta^n \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \end{cases}$$

Θέτουμε $\varepsilon^i = y(t^i) - y^i \quad , i = 0, \dots, N$

(ολικό σφάλμα, σφάλμα διακριτοποίησης, σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου)

• Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right] + \delta^n$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h \underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\le L\,|\underbrace{y(t^n) - y^n}_{\varepsilon^n}|} + |\delta^n|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le (1 + L h)|\varepsilon^n| + |\delta^n|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|\varepsilon^{n+1}|}_{d_{n+1}} \le (1 + \underbrace{Lh}_{\delta'})\underbrace{|\varepsilon^n|}_{d_n} + \max_{0 \le i \le N-1} |\delta^i|$$

Σύμφωνα με το βοηθητικό Λήμμα, από εδώ παίρνουμε:

$$|\varepsilon^n| \le e^{L h n} \overset{=0}{\cancel{|\varepsilon^0|}} + \frac{e^{L \overset{\le b-a}{h n}} - 1}{L h} \max_{0 \le i \le N-1} |\delta^i|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le \frac{e^{L(b-a)}-1}{L\cancel{h}} \frac{M}{2} h^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right] h$$

(+) $\max\limits_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{C_1}_{\text{ανεξάρτητο του } h} h^1$, $h = \frac{b-a}{N}$

- Τάξη ακρίβειας της μεθόδου : $p \ge 1$

<u>ΕΡΩΤΗΜΑ:</u> Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του h έστω εκτίμηση (+);

(Αν $M=0$ ($y \in \mathbb{P}_1$), τότε το σφάλμα είναι μηδέν!)

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ:</u> Γενικά όχι ($p \le 1$).

<u>Παράδειγμα:</u> (Απόδειξη μέσω αυτού του παραδείγματος)

$$\begin{cases} y'(t) = 2^{*}t \ , \ 0\le t\le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

* το 2 δεν παίζει ρόλο, μας ενδιαφέρει μόνο το t.

<u>Λύση:</u> $y(t) = t^2$
(Επιλέχθηκε έτσι ώστε $y''(t) = 2$, σταθερή!!)

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = n\cdot h$, $n = 0, \dots, N$.

"ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER":

$y^0 = 0$
$y^{n+1} = y^n + h\,2\,t^n$

$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + h\,2nh = y^n + 2n \cdot h^2$

Ισχυρισμός: $y^n = y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2$ (**)

Επαγωγή: ▷ $n=0$: $y^0 = y^0$ ✓

▷ $n \to n+1$: $y^{n+1} = y^n + 2n \cdot h^2$

$\overset{\text{υπόθεση επαγωγής}}{=} y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2 + 2nh^2$ ✓

▷ $y^n = y^0 + 2\underbrace{[1+2+\dots+(n-1)]}_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot h^2$

$\Rightarrow y^n = y^0 + n(n-1) \cdot h^2$

• $y^N = N(N-1)h^2 = (N-1)\overset{=1}{N \cdot h}\,h$

$= \overset{=1}{N \cdot h} - h = 1 - h$

Επομένως,

$y(t^N) - y^N = 1 - (1-h) = h$

$\Rightarrow |y(t^N) - y^N| = \underset{\underset{\geq 0}{\uparrow}}{\underset{\geq C \cdot h}{h}}$ ~ εδώ $C=1$

• $c \cdot h \leq |y(t^N) - y^N|$

Έστω ότι: $|y(t^N) - y^N| \leq C_1 \cdot h^{1+\varepsilon}$ με $\varepsilon > 0$

Τότε θα είχαμε:

$$c \cdot h \leq C_1 h^{1+\varepsilon} \Rightarrow c \leq \underbrace{C_1 \cdot h^{\varepsilon}}_{0} \quad h \to 0 \Rightarrow c = 0 \ \text{↯}$$

▷ $\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C_1 \cdot h$ ⇝ τάξη ακρίβειας: $p \geq 1$

▷ $|y(t^N) - y^N| \geq \underset{>0}{c} \cdot h$ ⇝ τάξη ακρίβειας $p \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{p = 1}$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Τι αλλάζει στην περίπτωση ΠΑΤ για συστήματα ΣΔΕ;

(Βέβαια, οι απόλυτες τιμές αντικαθίστανται από κάποια νόρμα)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μόνο η παράσταση για το σφάλμα συνέπειας

Σφάλμα συνέπειας:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^n, y(t^n))$$

$$= y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^n)$$

• Στην περίπτωση βαθμωτής συνάρτησης y (με τιμές στο $\mathbb{R}$) έχουμε $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$

με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$, οπότε $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$

• Αυτή η παράσταση του υπολοίπου στον τύπο του Taylor <u>δεν ισχύει</u> για διανυσματικές συναρτήσεις: ο λόγος είναι ότι για την i-οστή συνιστώσα y_i του y παίρνουμε

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hy_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''_i(\xi_{n,i})$$

Επομένως, παίρνουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y''_1(\xi_{n,1}) \\ y''_2(\xi_{n,2}) \\ \vdots \\ y''_m(\xi_{n,m}) \end{pmatrix}$$

οπότε $\delta^n = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y''_1(\xi_{n,1}) \\ y''_2(\xi_{n,2}) \\ \vdots \\ y''_m(\xi_{n,m}) \end{pmatrix}$

▷ Για τη νόρμα μεγίστου, προκύπτει $\|\delta^n\|_\infty \leq \frac{h^2}{2} M$ με

$M := \max_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|_\infty$

▷ Αν έχουμε μια τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|$ στο $\mathbb{R}^m$, τότε ισχύει (λόγω της ισοδυναμίας των νορμών $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_\infty$) ότι

$$\exists C_1 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^m, \ \|x\| \leq C_1 \|x\|_\infty$$

Συμπέρασμα: $\|\delta^n\| \leq C_1 \|\delta^n\|_\infty \leq C_1 \frac{M}{2} h^2$

με $M := \max\limits_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|_\infty$

Εναλλακτικά: Τύπος του Taylor με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) y''(t) \, dt$

Ισχύει και για τις διανυσματικές συναρτήσεις.

▷ Τώρα για οποιαδήποτε νόρμα στο $\mathbb{R}^m$ παίρνουμε:

$$\|\delta^n\| = \left\| \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \, y''(t) \, dt \right\|$$

$$\leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \|y''(t)\| \, dt$$

$$\Rightarrow \|\delta^n\| \leq \left(\max_{t^n \leq t \leq t^{n+1}} \|y''(t)\| \right) \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \, dt}_{h^2/2}$$

Έτσι, $\max\limits_{0 \leq n \leq N-1} \|\delta^n\| \leq M \frac{h^2}{2}$ με $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|$

• Περιοχή (απόλυτης) ευστάθειας, A-ευστάθεια, B-ευστάθεια

Μια μέθοδος που για τον υπολογισμό της προσέγγισης y^{n+1} χρησιμοποιεί μόνο την προσέγγιση y^n λέγεται "μονοβηματική".

• Ορισμός (B-ευστάθεια)

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται B-ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δομικής με f που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$$\forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ (f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}) \leq 0$$

και με αρχικές τιμές y^0 και z^0, δίνει προσεγγίσεις y^n και z^n, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η ακολουθία $\|y^n - z^n\|$, $n=0,\dots,N$ (με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδεια νόρμα) είναι φθίνουσα

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\| \quad , n=0,\dots,N-1.$$

(δηλαδή η μέθοδος μιμείται την διαφορική εξίσωση που έχει την ιδιότητα η $\|y(t) - z(t)\|$ να είναι φθίνουσα!)

⇒ Η μέθοδος του Euler δεν είναι B-ευσταθής.

• Εξασθενούμε λίγο την απαίτηση ευστάθειας και ορίζουμε την A-ευστάθεια. Αυτή αφορά τη συμπεριφορά αριθμητικών μεθόδων για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

• Επομένως, δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε τη διαφορά λύσεων. Αρκεί να μελετήσουμε μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

▷ Ορισμός (Α-ευστάθεια)

Μια μαθηματική μέθοδος λέγεται Α-ευσταθής, αν όταν εφαρμόζεται στο πρόβλημα δοκιμής,

$$(**)\quad \begin{cases} y' = \lambda y, & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\,\lambda \leq 0$ και αυθαίρετο βήμα $h > 0$, δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η $|y^n|$, $n = 0, \dots$ να είναι φθίνουσα,

$$|y^{n+1}| \leq |y^n| \quad , n = 0, 1, 2, \dots$$

(δηλαδή, η μέθοδος μιμείται τη συμπεριφορά της λύσης του (**)).

19/11/2015

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \quad , a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

• Μέθοδος του Euler:

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

• Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler:

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

• Μέθοδος του τραπεζίου:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

• Μέθοδος του μέσου:

$$y^{n+1} = y^n + h f\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$$

• Πρώτο πρόβλημα δομής:

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y, \ t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$

Αν $Re\lambda \leq 0$, τότε η $|y(t)| = e^{(Re\lambda)t}$ είναι φθίνουσα.

"Μέθοδος Α-ευσταθής":

$|y^{n+1}| \leq |y^n|$

(για $Re\lambda \leq 0$)

• Δεύτερο πρόβλημα δομής:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \ a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m, \ (f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

▷ Αν y και t λύσεις (με διαφορετικές αρχικές τιμές) τότε $\|y(t) - z(t)\|$ φθίνουσα

"Μέθοδος Β-ευσταθής":

$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$

• Όλες οι αριθμητικές μέθοδοι, με τις οποίες θα ασχοληθούμε, δίνουν τις ίδιες προσεγγίσεις όταν εφαρμοστούν στο (*) ή στο:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0 \\ y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

με $\lambda = a + ib$ και $y(t) = y_1(t) + i y_2(t)$

Επομένως,

B-ευστάθεια $\Rightarrow$ A-ευστάθεια

$\Rightarrow$ (Όλες οι B-ευσταθείς μέθοδοι είναι και A-ευσταθείς)

▷ Το αντίστροφο δεν είναι σωστό. π.χ. η μέθοδος του τραπεζίου είναι A-ευσταθής αλλά δεν είναι B-ευσταθής.

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι A-ευσταθής (άρα ούτε B-ευσταθής)

• Πραγματικά, εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Euler, στο (*), παίρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n \Rightarrow y^{n+1} = (1 + \lambda h) y^n$$

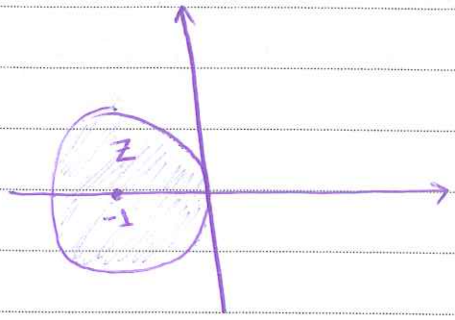
Με $r(z) = 1 + z$, η σχέση αυτή γράφεται ως:

$$\boxed{y^{n+1} = r(\lambda \cdot h)\, y_n}$$

Έχουμε, $|y^{n+1}| = |1 + \lambda h|\,|y^n|$ $\quad \{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1\}$

$1 + z = z - (-1)$

$|1 + z| = |z - (-1)| \leq 1$;



▷ Το σύνολο

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq 1 \}$$

είναι ο μοναδιαίος δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο το σημείο -1.

▷ Αυτό το S γράφεται και στη μορφή

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$

λέγεται περιοχή ευστάθειας της μεθόδου του Euler.

⇒ Το r λέγεται συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου!

• Για $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ και h τ.ω. το λh να μην ανήκει στο S, έχουμε $|1+\lambda h| > 1$, οπότε για $y^n \neq 0$ έχουμε

$$|y^{n+1}| > |y^n|,$$

ιδιαίτερα η μέθοδος δεν είναι Α-ευσταθής!

Ορισμός (περιοχή ευστάθειας)

Εφαρμόζουμε μια μονοβηματική μέθοδο στο (*). Η περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου αποτελείται από όλα τα σημεία $\boxed{z = \lambda \cdot h}$ στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ με την ιδιότητα ότι για $\lambda \cdot h = z$ η μέθοδος δίνει προσεγγίσεις τ.ω. η $|y^n|$, $n = 0, 1, 2,$ να είναι φθίνουσα, δηλ. $|y^{n+1}| \leq |y^n|$

▷ Η τομή της περιοχής ευστάθειας με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ.

• Προφανώς, μια μονοβηματική μέθοδος είναι A-ευσταθής, αν και μόνο αν η περιοχή ευστάθειας της S περιέχει το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^-$,
μη θετικό

$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : Re\, z \leq 0\}$$

▷ Παρατήρηση: Θεωρούμε το σφάλμα συνέπειας δ^n της μεθόδου του Euler, όταν αυτή εφαρμόζεται στο πρόβλημα δοκιμής (*). Τότε, έχουμε:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + \lambda h y(t^n)]$$

$$= y(t^{n+1}) - \underbrace{(1+\lambda h)}_{r(\lambda h)} y(t^n)$$

$$= y(t^{n+1}) - r(\lambda h) y(t^n)$$

$$= e^{\lambda(n+1)h} - r(\lambda h) y(t^n)$$

$$= \underbrace{e^{\lambda n h}}_{y(t^n)} e^{\lambda h} - r(\lambda h) y(t^n)$$

$$= [\underbrace{e^{\lambda h} - r(\lambda h)}] y(t^n)$$

$$e^z - r(z) = \cancel{1} + \cancel{z} + O(z^2) - (\cancel{1} + \cancel{z})$$
$$= O(z^2)$$

Γενικό Συμπέρασμα:

Για να είναι η τάξη ακρίβειας μιας μονοβηματικής μεθόδου P, πρέπει να ισχύει:

(**) $e^z - r(z) = O(z^{P+1})$ για $z \to 0$,

με r τη συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου.

⇒ Γενικά, το αντίστροφο δεν είναι σωστό.

Δηλ. η (**) είναι αναγκαία συνθήκη για να έχει η μέθοδος τάξη p.

▷ Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της μεθόδου του Euler:

Πλεονεκτήματα: Η μέθοδος είναι άμεση (δηλ. δεν απαιτεί την επίλυση κάποιας εξίσωσης για τον υπολογισμό της προσέγγισης y^{n+1}) προγραμματίζεται πολύ εύκολα, και απαιτεί ένα μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα.

Μειονεκτήματα: Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι μόνο ένα, δηλαδή πολύ χαμηλή, οπότε για να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια, απαιτείται να χρησιμοποιήσουμε πολύ μικρό βήμα h. Αυτό έχει ως συνέπεια αφ' ενός να αυξάνεται το συνολικό κόστος και αφ' ετέρου οι προσεγγίσεις να επηρεάζονται πολύ από σφάλματα στρογγύλευσης.
Επί πλέον, η μέθοδος δεν είναι Β-ευσταθής, ούτε και Α-ευσταθής. Μάλιστα, η περιοχή ευστάθειας της είναι πολύ μικρή.

• "Η ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER"

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη, αφού για τον υπολογισμό του y^{n+1} απαιτείται σε κάθε βήμα η επίλυση της εξίσωσης.

Τρόποι κατασκευής:

- αριθμητική διαφόριση

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

> Προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+1})$ με $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$ και παίρνουμε $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

> Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n, οπότε παίρνουμε $\dfrac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1})$

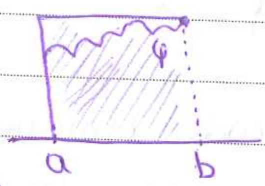
- αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y(t)\,dt}_{y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

... (όπως προηγουμένως)



$$\int_a^b \varphi(x) \approx (b-a)\,\varphi(b)$$

δεξιός τύπος του ορθογωνίου

• Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων.

• Χωρίς υποθέσεις στην f και/ή στο βήμα h οι προσεγγίσεις δεν είναι γενικά καλά ορισμένες

π.χ. εφαρμόζοντας τη μέθοδο στη Δ.Ε. $y' = \lambda y$ έχουμε

$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Leftrightarrow \boxed{(1-\lambda h)\, y^{n+1} = y^n}$ (+)

Έστω $\lambda > 0$ και $h = \frac{1}{\lambda}$

Τότε, αν $y^n \neq 0$, η (+) δεν έχει λύση! Αν $y^n = 0$, τότε οποιοδήποτε y^{n+1} είναι λύση της (+)

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$\exists\, L > 0,\ \forall\, t \in [a,b],\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Ισχυρισμός: Για h αρκετά μικρό, ώστε $Lh < 1$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

$g(x) := y^n + hf(t^{n+1}, x),\ x \in \mathbb{R}$

Προφανώς, κάθε λύση y^{n+1} έχει την ιδιότητα $g(y^{n+1}) = y^{n+1}$, δηλαδή είναι σταθερό σημείο της g. Αντίστροφα, κάθε σταθερό σημείο της g είναι προσέγγιση y^{n+1}.

⇒ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Για : $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$g(x_1) - g(x_2) = \cancel{y^n} + hf(t^{n+1}, x_1) - [\cancel{y^n} + hf(t^{n+1}, x_2)]$

$= h[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)]$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| = h\underbrace{|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|}_{\leq L|x_1 - x_2|}$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq Lh\,|x_1 - x_2|$$

Αλλά $L\cdot h < 1$, συνεπώς η g είναι "συστολή", οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα της συστολής, έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. $\forall t \in [a,b], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t,x_1) - f(t,x_2)](x_1 - x_2) \leq 0$.

Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, χωρίς περιορισμό στο βήμα h.

Απόδειξη:

Θεωρούμε ~~..~~ τη συνάρτηση $g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, x)$, $x \in \mathbb{R}$

Προφανώς κάθε προσέγγιση y^{n+1} είναι ρίζα της g, και αντίστροφα κάθε ρίζα της g είναι προσέγγιση.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα

• ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΡΙΖΑΣ: Η συνάρτηση g είναι γνήσια αύξουσα ($η$ x είναι γνήσια αύξουσα και η $-y^n - hf(t^{n+1}, x)$ είναι αύξουσα), οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

24/11/2015

(Συνέχεια απόδειξης...)

• Ύπαρξη ρίζας: Η συνάρτηση g είναι συνεχής. Αν αποδείξουμε ότι παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές, συμπεραίνουμε, σύμφωνα με το "θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής", θα έχει και μία ρίζα.

• Για $x \leq 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \geq f(t^{n+1}, 0)$, οπότε
$-hf(t^{n+1}, x) \leq -hf(t^{n+1}, 0)$

Επομένως,

$$g(x) = x - y^n \underbrace{-hf(t^{n+1}, x)}_{\leq -hf(t^{n+1}, 0)} \Rightarrow$$

$$g(x) \leq \underbrace{x - y^n - hf(t^{n+1}, 0)}_{\downarrow \atop -\infty,\ x \to -\infty}$$

⇒ Ιδιαίτερα, η g παίρνει και αρνητικές τιμές

• Για $x > 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \leq f(t^{n+1}, 0)$, οπότε
$-hf(t^{n+1}, x) \geq -hf(t^{n+1}, 0)$

Συνεπώς,

$$g(x) \geq \underbrace{x - y^n - hf(t^{n+1}, 0)}_{\downarrow \atop +\infty,\ x \to \infty}$$

⇒ Ιδιαίτερα, η g παίρνει και θετικές τιμές

• Συνέπεια:

$$\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\underbrace{f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}_{= y'(t^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h y'(t^{n+1})}$$

▸ Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το σημείο t^{n+1}, παίρνουμε

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) + \underbrace{(t^n - t^{n+1})}_{= -h} y'(t^{n+1}) + \frac{(t^n - t^{n+1})^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow y(t^n) = y(t^{n+1}) - h y'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

▸ Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε:

$$\delta^n = \cancel{y(t^{n+1})} - \left[\cancel{y(t^{n+1})} - \cancel{h y'(t^{n+1})} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right] - \cancel{h y'(t^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)}$$

Άρα, $\max\limits_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{M}{2} h^2$, με $M = \max\limits_{a \le t \le b} |y''(t)|$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}), \ n = 0, \dots, N-1 \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

2η περίπτωση: Η $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$\forall t\in[a,b],\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ (f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x})\leq 0.$

Έχουμε,

$$y^{n+1}-z^{n+1}=(y^n-z^n)+h\left[f(t^{n+1},y^{n+1})-f(t^{n+1},z^{n+1})\right]$$

▷ Παίρνουμε το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1}-z^{n+1}$ και στις δύο πλευρές, και έχουμε

$$\|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2=\underbrace{(y^n-z^n,\ y^{n+1}-z^{n+1})}_{\leq 0}+\underbrace{h\left(f(t^{n+1},y^{n+1})-f(t^{n+1},z^{n+1}),\ y^{n+1}-z^{n+1}\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\|^{2}\leq (y^n-z^n,\ y^{n+1}-z^{n+1}) \overset{C\text{-}S}{\leq} \|y^n-z^n\|\,\cancel{\|y^{n+1}-z^{n+1}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|y^{n+1}-z^{n+1}\|\leq\|y^n-z^n\|} \Rightarrow \text{Η μέθοδος είναι B-ευσταθής.}$$

Συμπέρασμα: Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι B-ευσταθής. Ιδιαίτερα είναι και A-ευσταθής, δηλαδή η περιοχή ευστάθειάς της περιέχει το σύνολο $\mathbb{C}^-=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\leq 0\}$.

• Περιοχή ευστάθειας της μεθόδου

$$\begin{cases} y'=\lambda y, & t\geq 0\\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y^{n+1}=y^n+h\lambda y^{n+1}\Rightarrow$$

$$(1-\lambda h)\,y^{n+1}=y^n\Rightarrow$$

$$\boxed{y^{n+1}=\frac{1}{1-\lambda h}\,y^n}$$

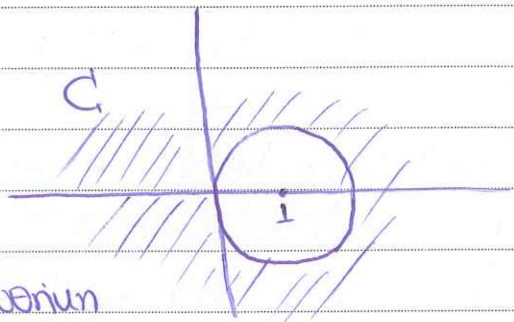
• Με $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$ η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$$

Άρα, $|y^{n+1}| = |r(\lambda h)| \cdot |y^n|$

• Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} : |1-z| \geq 1 \}$$



"Εκτίμηση του σφάλματος"

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Έχουμε,

(*) $y(t^{n+1}) - y^{n+1} = [y(t^n) - y^n] + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$

Προχωρώντας όπως στην άμεση μέθοδο του Euler, παίρνουμε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)} - 1\right] h$$

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (στον $\mathbb{R}$)

Έχουμε, σύμφωνα με την (*), με $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$,

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$$

Παίρνοντας το γινόμενο με ε^{n+1}, έχουμε

$$(\varepsilon^{n+1})^2 = \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + h\underbrace{\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \cdot \overbrace{\left[y(t^{n+1}) - y^{n+1}\right]}^{\varepsilon^{n+1}}}_{\leq 0} + \delta^n \varepsilon^{n+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\varepsilon^{n+1})^2 \leq \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^{\cancel{2}} \leq (|\varepsilon^n| + |\delta^n|)\,\cancel{|\varepsilon^{n+1}|}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + |\delta^n|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + \frac{M}{2} h^2$$

Άρα, με τετριμμένη επαγωγή (ή αθροίζοντας τις αντίστοιχες ανισότητες) προκύπτει:

$$|\varepsilon^n| \leq \underbrace{|\varepsilon^0|}_{=0} + n\frac{M}{2}h^2 \Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \frac{M}{2}\underbrace{(n \cdot h)}_{\leq b-a} \cdot h$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \frac{b-a}{2} M \cdot h$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{b-a}{2} M \cdot h$$

• "Η μέθοδος του τραπεζίου"

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \dfrac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

▷ πεπλεγμένη

▷ τάξη ακρίβειας: $p = 2$

Κατασκευή της μεθόδου:

$$y'(t) = f(t,y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

▷ Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος με τη μέθοδο του τραπεζίου, οπότε παίρνουμε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + f((t^{n+1}), y(t^{n+1}))\right]$$

▷ Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m και προκύπτει η μέθοδος.

Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow$$

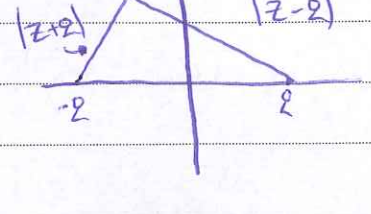
$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\, y^n$$

$$r(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n}$$

Περιοχή ευστάθειας (γεωμετρικά)

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1\}$$
$$= \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{2+z}{2-z}\right| \leq 1\right\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} : |2+z| \leq |2-z|\}$$
$$= \mathbb{C}^-$$



Περιοχή ευστάθειας (αλγεβρικά)

$|z+2| \le |z-2|$, $z = x+iy$

$|iy|^2 = -y^2$

$\Leftrightarrow |x+iy+2| \le |x+iy-2|$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + \cancel{y^2} \le (x-2)^2 + \cancel{y^2}$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + \cancel{4} \le \cancel{x^2} - 2x + \cancel{4}$

$\Leftrightarrow 4x \le 0 \Leftrightarrow \boxed{x \le 0}$

26/11/2015

• Ισχυρισμός: Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι B-ευσταθής.

$y' = \lambda(t) y$, $t \ge 0$

$\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\lambda(t) \le 0$

Τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[\lambda(t^n) y^n + \lambda(t^{n+1}) y^{n+1}]$$

(Αν έχω και αντίστοιχα z^n, τότε οι διαφορές $y^m - z^m$ ικανοποιούν την ίδια σχέση)

Έστω h δεδομένο.

Επιλέγουμε το λ έτσι ώστε: $h\lambda(t^n) = -8$ και $h\lambda(t^{n+1}) = -1$

Τότε έχουμε:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}(-8y^n - y^{n+1}) \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{n+1} = -2y^n$$

$\Rightarrow |y^{n+1}| = 2|y^n|$

Για $y^n \ne 0$ έχουμε: $|y^{n+1}| > |y^n|$

"Η μέθοδος του μέσου":

$$y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

- πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας $p=2$

• Τρόπος κατασκευής:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h \cdot f\Bigg(\underbrace{\frac{t^n + t^{n+1}}{2}}_{= t^n + h/2}, y\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}\right)\Bigg) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right]\right)$$

. . . . . .

• Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι B-ευσταθής

Υπόθεση: Η $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ (*) $(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f\left(\dfrac{t^n + t^{n+1}}{2}, \dfrac{z^n + z^{n+1}}{2}\right) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2} \right) - f\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{z^n + z^{n+1}}{2} \right) \right]$$

• Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με

$$\frac{y^n + y^{n+1}}{2} - \frac{z^n + z^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})$$

Χρησιμοποιούμε την (*) και παίρνουμε:

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) \right) \leq \left(y^n - z^n, \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) \right)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n)} + \frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2 + \cancel{\frac{1}{2}(y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \cancel{\frac{1}{2}}\|y^n - z^n\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \|y^n - z^n\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$$

• Ιδιαίτερα, η μέθοδος του μέσου είναι και Β-ευσταθής.

• Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Για Δ.Ε της μορφής $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ οι μέθοδοι του τραπεζίου και του μέσου συμπίπτουν. Άρα έχουν τις ίδιες περιοχές ευστάθειας, άρα η περιοχή ευστάθειας της μεθόδου του μέσου είναι το $\mathbb{C}^-$.