"Υπολογιστικά Μαθηματικά" 29/09/2015

1η πρόοδος: 14/11/2015
2η -"- : 5/12/2015
3η -"- : 12/01/2016

Περιεχόμενα Μαθήματος

• Διαφορικές Εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (Δ.Ε) είναι μία εξίσωση που περιέχει και παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

Εφαρμογές Δ.Ε.

- φυσικές επιστήμες
- Τεχνολογία
- βιοιατρικές επιστήμες
- οικονομικές -"-

Οι λύσεις της Δ.Ε. δεν ορίζονται γενικά μονοσήμαντα απ' τη Δ.Ε

Παράδειγμα $y'(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$

Λύσεις $y(t) = c$, με $c \in \mathbb{R}$

Για να οριστεί η λύση κατά μοναδικό τρόπο απαιτούνται επιπρόσθετες συνθήκες π.χ. αρχικές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες

1. Προβλήματα αρχικών τιμών

Δεδομένα: $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $a<b$
$\alpha\in\mathbb{R}$

Ζητούμενα: $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ συν/μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

τ.ω. $\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) & , a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Θέματα:

1. Ύπαρξη λύσης. (ύπαρξη = τουλάχιστον 1 λύση)
2. Μοναδικότητα λύσης. (μοναδικότητα = το πολύ 1 λύση)
3. Ευστάθεια. (Συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα)
4. Γενίκευση για συστήματα Δ.Ε.
5. Επίλυση Δ.Ε απλής μορφής:

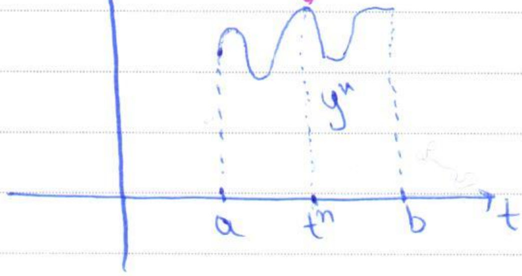
γραμμικές, Bernoulli, Riccati με χωριζόμενες μεταβλητές, ομογενείς, πλήρεις, γραμμικά συστήματα Δ.Ε με σταθ. συντελεστές.

2. Η μέθοδος του Euler

Έστω $N\in\mathbb{N}$, θεωρούμε ένα ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h=\frac{b-a}{N}$. Οι κόμβοι είναι t^n (δείκτης, όχι εκθέτης!)
όπου $t^n := a+nh \quad , n=0,\dots,N$

Η μέθοδος του Euler δίνει προσεγγίσεις y^n των τιμών $y(t^n)$ της ακριβούς λύσης, οι οποίες ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n+1}=y^n+hf(t^n,y^n) & , n=0,\dots,N \\ y^0=y \end{cases}$$



Θέματα:

1. Πώς προκύπτει η μέθοδος;
2. Κόστος της μεθόδου ανά βήμα;
3. Ποιότητα των προσεγγίσεων;
4. Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της μεθόδου;
5. Πότε χρησιμοποιείται η μέθοδος του Euler και πότε καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους;

3. Μέθοδος των Runge-Kutta

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε έναν πίνακα

$A = (a_{ij})$, $i,j = 1, \dots, q$ $\in \mathbb{R}^{q,q}$ και δύο διανύσματα $\tau, b \in \mathbb{R}^q$ (κατά κανόνα $\tau_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, q$)

Γράφουμε τα δεδομένα σε μορφή μητρώου:

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Θέτουμε $y^0 = y_0$ και ορίζουμε προσεγγίσεις y^n του $y(t^n)$ αναδρομικά ως εξής:

Ξεκινάμε απ' την προσέγγιση y^n και χρησιμοποιώντας τον πίνακα A και το διάνυσμα τ, ορίζουμε πρώτα προσεγγίσεις:

$y^{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ του $y(t^n + \tau_i h)$ τ.ω.

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} a_{ij} f(t^n + \tau_j h, y^{n,j}) \quad i = 1, \dots, q$$

• Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$ και το b και ορίζουμε το y^{n+1} ως:

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^n + \tau_i h, y^{n,i})$$

Θέματα: 1. Ποιές παράμετροι a_{ij}, τ_{ij}, b_i δίνουν «καλές» μεθόδους

2. Κόστος της μεθόδου ανά βήμα;

3. Ποιότητα των προσεγγίσεων;

4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα;

5. Πότε χρησιμοποιούμε μεθόδους αυτής της κλάσης;

4. Πολυβηματικές μέθοδοι

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

(μέχρι τώρα $y^n \to y^{n+1}$)

Στις πολυβηματικές μεθόδους οδηγούμαστε σε προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας «πολλές» προγενέστερες προσεγγίσεις.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε σταθερές $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ($2k+2$ παράμετροι)

• Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας προσεγγίσεις $y^0, \dots, y^{k-1}$ των $y(t^1) \dots y(t^{k-1})$ και ορίζουμε προσεγγίσεις y^m των $y(t^m)$ αναδρομικά ως εξής:

$$a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)]$$

$n = 0, \dots, N-k$, άγνωστος y^{n+k}

01/10/2015

• Προβλήματα αρχικών τιμών.

$$(*)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

▷ Ύπαρξη και μοναδικότητα

- Το (*) μπορεί να έχει ακριβώς μία λύση.
- Το – " – μην έχει καμμία λύση.
- Το – " – να έχει πολλές λύσεις.

• Ειδική περίπτωση: $f(t,y) = p(t) \cdot y + q(t)$

γραμμική Δ.Ε., $p, q \in C[a,b]$

$$(+)\begin{cases} y'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ισχυρισμός: Το (+) έχει ακριβώς μία λύση, την:

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{\int_a^t p(s)ds} + \int_a^t q(s) e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} ds} \quad , a \le t \le b$$

Απόδειξη:

$$y'(s) - p(s) \cdot y(s) = q(s) \iff \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s) \right)' =$$

$$= e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)$$

Ολοκληρώνουμε από το α μέχρι το t, $\int_a^t \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s) \right)' ds =$

$$= \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds$$

$$\Leftrightarrow e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} y(t) - \underbrace{e^{-\int_a^a p(\tau)d\tau}}_{=1} \underbrace{y(a)}_{=y_0} = \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s) ds$$

$$\Leftrightarrow e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} y(t) = y_0 + \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s) ds$$

$$\Leftrightarrow y(t) = y_0 e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} + e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s) ds$$

$$= y_0 e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} + \int_a^t \underbrace{e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}}_{= e^{\int_a^t p(\tau)d\tau - \int_a^s p(\tau)d\tau} = e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}} q(s) ds$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s) \right)' = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y'(s) + \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \right)' y(s)$$

$$= e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y'(s) + e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \left(-\int_a^s p(\tau)d\tau \right)' y(s)$$

$$= e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \underbrace{[y'(s) - p(s)y(s)]}_{= q(s)} = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)$$

Παράδειγμα: ΠΑΤ που δεν έχει λύση

$$(**) \begin{cases} y' = y^2, \quad 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ισχυρισμός: Το (**) δεν έχει λύση

$f(t,y)=y^2$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

• Κάθε λύση y του προβλήματος αυτού (**) είναι αύξουσα, αφού $y'(t)=(y(t))^2 \geq 0$

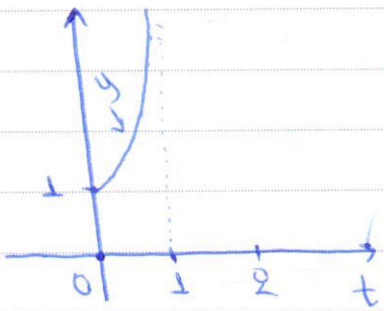
$\Rightarrow y(t) \geq 1 \;, \forall\, t \in [0,2]$

$$y'(t)=(y(t))^2 \Leftrightarrow \frac{y'(t)}{(y(t))^2}=1 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\frac{1}{y(t)}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{y(t)}=\left(y(t)^{-1}\right)'=-1\,(y(t))^{-2}\,y'(t)=-\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{y(t)}\right)'=1 \Leftrightarrow -\int_0^t\left(\frac{1}{y(s)}\right)'ds=\int_0^t 1\,ds$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)}+\frac{1}{y(0)=1}=t \Leftrightarrow \frac{1}{y(t)}=1-t \Leftrightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{1-t}}$$



Αυτή η y δεν επεκτείνεται ως συνεχής παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,2]$

Συμπέρασμα: Το (**) δεν έχει λύση.

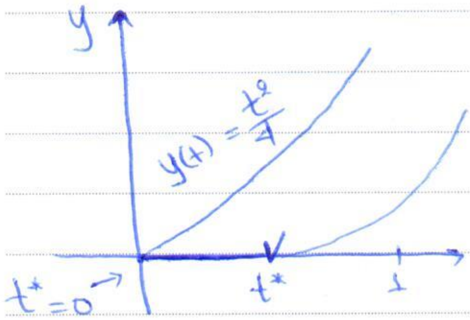
Tip! $\int_a^x p(t)\,dt$

Παράδειγμα: ΠΑΤ με πολλές λύσεις.

Ισχυρισμός: Το (**) $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & , 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, έχει πολλές λύσεις.

• Κάθε λύση y είναι αύξουσα

$y(t) = 0$, $t \in [0,1]$ λύση.



$$y(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t \le t^* \\ \dfrac{(t-t^*)^2}{4} & , t^* < t \le 1. \end{cases}$$

Η y είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

$$\left(\sqrt{y(s)}\right)' = \left((y(s))^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}(y(s))^{1/2-1} \cdot y'(s) = \frac{1}{2}\frac{y'(s)}{(y(s))^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}}$$

$y(s) = 0$, για $s > t^*$

$y'(s) = \sqrt{|y(s)|}$, για $s > t^*$

$\Leftrightarrow y'(s) = \sqrt{y(s)} \Leftrightarrow \dfrac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1$

$t^* < s \le 1$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{y(s)}\right)' = 1 \Leftrightarrow 2\int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \underbrace{\int_{t^*}^{t} 1 \, ds}_{= t - t^*}, \quad t^* < t \le 1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{\overset{0}{y(t^*)}}\right) = t - t^*$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{t - t^*}{2} \Leftrightarrow y(t) = \frac{(t-t^*)^2}{4}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για ΠΑΤ)

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y (ομοιόμορφα ως προς t)

$\boxed{\exists\ L \geq 0, \text{ ομοιόμορφα ως προς } t, \forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|}$ (L)

Τότε, το ΠΑΤ (*) έχει ακριβώς μία λύση, που ορίζεται σε όλο το διάστημα $[a,b]$.

▸ Τι σημαίνει η (L);

Υπόθεση: Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y, $y_1 \neq y_2$.

$$\frac{f(t,y_1) - f(t,y_2)}{y_1 - y_2} = f_y(t,\xi) \quad , \text{ το } \xi \text{ μεταξύ των } y_1 \text{ και } y_2$$

Tip! $$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = \varphi'(\xi) \quad \text{Θεώρημα Μέσης Τιμής}$$

Συμπέρασμα: Η (L) ικανοποιείται αν και μόνο αν

$$|f_y(t,\xi)| \leq L, \ \forall t \in [a,b], \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$$f(t,y) = y^2 \Leftrightarrow f_y(t,y) = 2y \Rightarrow |f_y(t,y)| = 2|y| \to \infty$$

για $y \to +\infty$

$y \to -\infty$

• Γραμμική Δ.Ε

$$f(t,y) = p(t)\cdot y + q(t)$$

$$\Rightarrow f_y(t,y) = p(t)$$

$$\Rightarrow |f_y(t,y)| \le \boxed{\max_{a\le t\le b} |p(t)|} = L$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Τοπική Ύπαρξη και μοναδικότητα)

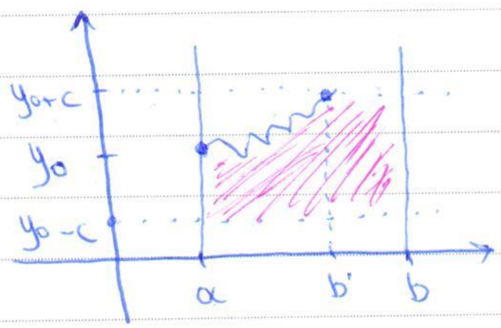
Έστω $c>0$ και $f : [a,b]\times[y_0-c,\, y_0+c] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν η f ικανοποιεί στο $[a,b]\times[y_0-c,\, y_0+c]$ τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή:

$\exists\, L\ge 0,\ \forall\, t\in[a,b],\ \forall\, y_1,y_2\in[y_0-c,\, y_0+c]$ ~ "τοπική συνθήκη του Lipschitz"

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\,|y_1-y_2|$$

Τότε, το (*) έχει ακριβώς μία λύση, τουλάχιστον σε ένα διάστημα $[a,b']$ (όχι παντού) με $b' = \min\left(b,\ a+\frac{c}{A}\right)$

με $A = \max_{a\le t\le b} |f(t,y)|$, $\quad y_0-c \le y \le y_0+c$



06/10/2015

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Αν η f ικανοποιεί την <u>ολική</u> συνθήκη του Lipschitz, τότε έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε όλο το $[a,b]$

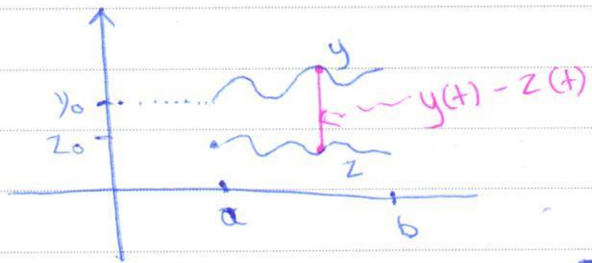
- Αν η f ικανοποιεί την <u>τοπική</u> συνθήκη του Lipschitz, τότε έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε ένα υποδιάστημα $[a,b']$, με $b'>a$ και γενικά $b' \le b$.

- Η συνέχεια της f εξασφαλίζεται <u>τοπική</u> ύπαρξη λύσης σε ένα υποδιάστημα $[a,b]$, αλλά όχι <u>μοναδικότητα</u>

<u>Ευστάθεια.</u>

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$



<u>Ερώτημα:</u> Ισχύει μια εκτίμηση της μορφής

(*) $|y(t) - z(t)| \le C\,|y_0 - z_0|$

$\forall t \in [a,b]$

με C μια σταθερά

• Από την ⊛ έπεται μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών. Πράγματι, για $z_0 = y_0$, η ⊛ δίνει $y(t) = z(t)$, $t \in [a,b]$

Θέτουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$, $t \in [a,b]$. Στόχος είναι η εκτίμηση της $|\varepsilon(t)|$ ή $(\varepsilon(t))^2$. Γι' αυτό θα χρειαστούμε πληροφορία για την παράγωγο της $(\varepsilon(t))^2$. Τώρα,

$$\left((\varepsilon(t))^2\right)' = 2\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις Δ.Ε. στα δύο προβλήματα αρχικών τιμών παίρνουμε

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\varepsilon(t)$ παίρνουμε

$$\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) = [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \cdot \varepsilon(t)$$

ή

$$(+) \quad \boxed{\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \cdot \varepsilon(t)}$$

▷ **1η Περίπτωση:** Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Τότε,

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] (\varepsilon(t))$$
$$\leq \underbrace{|f(t, y(t)) - f(t, z(t))|}\, |\varepsilon(t)|$$
$$\leq L\, |\underbrace{y(t) - z(t)}_{\varepsilon(t)}|$$
$$\leq L\, (\varepsilon(t))^2$$

Συμπέρασμα: $\left((\varepsilon(t))^2\right)' \leq 2L\, (\varepsilon(t))^2$

Έστω $\phi(t) := (\varepsilon(t))^2$. Τότε $\phi'(t) \leq 2L\phi(t)$,
οπότε

$$\phi'(t) - 2L\phi(t) \leq 0.$$

ή

$$\underbrace{e^{-2Lt}}_{>0}(\phi'(t) - 2L\phi(t)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{-2Lt}\phi(t))' \leq 0$$

Επομένως, η συνάρτηση $e^{-2Lt}\phi(t)$ είναι φθίνουσα, οπότε
$e^{-2Lt}\phi(t) \leq e^{-2La}\phi(a)$.

ή $\phi(t) \leq e^{2L(t-a)}\phi(a)$, $\forall\, t \in [a,b]$

Επομένως,

$$(\varepsilon(t))^2 \leq e^{2L(t-a)}(\varepsilon(a))^2$$

ή

$$|\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

ή $|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)}|y_0 - z_0|$, $\forall\, t \in [a,b]$.

Από εδώ προκύπτει ότι η (*) με $C = e^{L(b-a)}$

{ ▷ Η εκτίμηση αυτή είναι πρακτικά χρήσιμη μόνο εάν το $L(b-a)$ είναι μικρό. }

2η Περίπτωση. "Μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz" (ή συνθήκη μονοτονίας)

(**) $\forall\, t \in [a,b]$, $\forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

Δηλ. η $f(t,\cdot)$ είναι ~~φθίνουσα~~ συνάρτηση της δεύτερης μεταβλητής της (για κάθε t). Τότε:

$$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,(y(t) - z(t))]}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow ((\varepsilon(t))^2)' \leq 0 \Rightarrow (\varepsilon(t))^2$ φθίνουσα

$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq (\varepsilon(a))^2$

$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(a)|$

ή

$$|y(t) - z(t)| \underbrace{\leq}_{C=1} |y_0 - z_0|$$

Γραμμική ΔΕ:

$f(t,y) = \lambda(t)\, y + \mu(t)$

$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \lambda(t)\,(y_1 - y_2)$

▷ Η (**) γράφεται στην προκειμένη περίπτωση ως

$\lambda(t)\,(y_1 - y_2)^2 \leq 0$

▷ Η (**) ικανοποιείται αν και μόνο αν $\lambda(t) \leq 0$.

Έστω $y(t)$ και $z(t)$ λύσεις της $y'(t) = \lambda(t)\, y(t) + \mu(t)$
$a \leq t \leq b$, $y(a) = y_0$

$$\begin{cases} z'(t) = \lambda(t)\, z(t) + \mu(t), & a \leq t \leq b, \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ και έχουμε $\begin{cases} \varepsilon'(t) = \lambda(t)\, \varepsilon(t) \\ a \leq t \leq b \\ \varepsilon(a) = y_0 - z_0 \end{cases}$

• Σε αυτή την περίπτωση για την ευστάθεια δεν χρειάζεται να ασχοληθώ με τη διαφορά δύο λύσεων, αρκεί να ασχοληθώ με το πρόβλημα αρχικών τιμών για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, δηλαδή αρκεί για το:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\cdot y(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

να αποδείξω μια εκτίμηση της μορφής

$\forall t \in [a,b] \quad |y(t)| \le C|y_0|$

Όταν $\lambda(t) \le 0$, η εκτίμηση που αποδείξαμε στη γενική περίπτωση δίνει $|y(t)| \le |y_0|$

• Αν θεωρήσω τα προβλήματα $\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t), & a \le t \le b \\ y(a) = 1 \end{cases}$

και

$$\begin{cases} z'(t) = \lambda(t)\, z(t), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

τότε ισχυρίζομαι ότι $z(t) = z_0\, y(t)$

• $z(a) = z_0\, y(a) = z_0 \cdot 1 = z_0$

$z'(t) = z_0 \cdot y'(t) = z_0 \cdot \lambda(t)\cdot y(t) = \lambda(t)\cdot z(t)$

<u>Συμπέρασμα:</u> Στην περίπτωση γραμμικών Δ.Ε. για την ευστάθεια αρκεί να ασχοληθώ με το πρόβλημα

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\cdot y(t), & a \le t \le b \\ y(a) = 1 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση: λ ανεξ. του t.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & , t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^{\lambda t} \rightsquigarrow$ φθίνουσα αν $\lambda \leq 0$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ μιγαδικός

Πρόβλημα δοκιμής:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & , t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda = a + i\beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$

$$|y(t)| = |e^{(a+i\beta)t}| = |e^{at}||e^{i\beta t}| = e^{at}\,\underbrace{|e^{i\beta t}|}_{1} = e^{at}$$

$\rightsquigarrow$ φθίνουσα αν $a \leq 0$.

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$
$x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow |e^{ix}| = 1$

Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων (Σ.Δ.Ε)

Δεδομένα: $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής
$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ζητούμενο: $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ συνεχώς παραγωγίσιμη τω.

$$(1)\ \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στο $\mathbb{R}^m$:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση, που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, ομοιόμορφα ως προς t, ως προς μια νόρμα $\|\ \|$ στο $\mathbb{R}^m$, δηλ.

$$\exists L \geq 0, \forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m, \ \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$$

Τότε, το (1) έχει ακριβώς μια λύση σε όλο το $[a,b]$

<u>Γραμμικά συστήματα ΣΔΕ</u>

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\,y(t) + g(t), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$, $m \times m$ πίνακας

- Πρόβλημα αρχικών τιμών για βαθμωτή Δ.Ε τάξης m:

$$(2) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \leq t \leq b \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Το (2) γράφεται στη μορφή (1)

08/10/2015

Ασκήσεις

$y'(t) = p(t)\,y(t) + q(t) \quad, a \le t \le b, \quad p, q \in C[a,b]$

Θεωρία

1. Ειδική περίπτωση : $y'(t) = q(t)$
2. Γενική -"-

Άλλος τρόπος:

1. Ειδική περίπτωση: $y'(t) = p(t)\,y(t)$
2. Γενική -"- : (ομογενής Δ.Ε)

Άσκηση 1.1

Οι λύσεις της $y'(t) = p(t)\,y(t)$ είναι της μορφής

(*) $y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$

Απόδειξη:

1. Συνάρτηση της δεδομένης μορφής είναι λύσεις της Δ.Ε:

$$y'(t) = \left(C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}\right)' = C\left(e^{\int_a^t p(s)ds}\right)' = C\, e^{\int_a^t p(s)ds} \underbrace{\left(\int_a^t p(s)ds\right)'}_{=p(t)} = p(t)\, \underbrace{C e^{\int_a^t p(s)ds}}_{= y(t)} = p(t)\cdot y(t) \checkmark$$

2. Κάθε λύση της Δ.Ε είναι της μορφής (*). Έστω y λύση. Αρκεί ν.δ.ο η

$$\boxed{u(t) = e^{-\int_a^t p(s)ds}\, y(t)}$$

είναι σταθερή.

$$\text{Έχουμε } u(t) = \left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\, y(t)\right)' = \underbrace{\left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)'}_{e^{-\int_a^t p(s)ds}\left(-\int_a^t p(s)ds\right)' \,=\, -p(t)} y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}\, y'(t)$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)ds}\left(-p(t)y(t)\right) + e^{-\int_a^t p(s)ds} y'(t)$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)ds} \underbrace{\left[-p(t)y(t) + y'(t)\right]}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$= 0 \rightarrow u(t) = C_1 \quad , t \in [a,b]$$

Επομένως, $\underset{\overset{\shortparallel}{u(t)}}{C_1} = e^{-\int_a^t p(s)ds} y(t) \Rightarrow y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$

Άσκηση 1.2: Οι λύσεις της $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$ είναι της μορφής: $y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds}\left[C_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right]$ (+)

Απόδειξη:

1. Συναρτήσεις της μορφής (+) είναι λύσεις της Δ.Ε. Πράγματι:

$$y'(t) = \underbrace{\left(e^{\int_a^t p(s)ds}\right)'}_{\overset{\shortparallel}{p(t)e^{\int_a^t p(s)ds}}}\left[C_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right] +$$

$$+ e^{\int_a^t p(s)ds} \underbrace{\left[C_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right]'}_{q(t)e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau}}$$

$$= p(t)\underbrace{\left(e^{\int_a^t p(s)ds}\left[C_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right]\right)}_{=y(t)}$$

$$+ q(t) e^{\overbrace{\int_a^t p(s)ds - \int_a^t p(\tau)d\tau}^{=0}}$$

$$= p(t)y(t) + q(t) \checkmark$$

2. Όλες οι λύσεις της Δ.Ε. είναι της μορφής (+).

Έστω $\tilde{y}$ τυχαία λύση και y μία λύση της μορφής (+).

Τότε, η διαφορά $\tilde{y}-y$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, οπότε, σύμφωνα με την Άσκηση 1.1,

$$(++)\quad \tilde{y}(t) - y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Από τις (+) και (++) προκύπτει ότι και η $\tilde{y}$ είναι της δεδομένης μορφής.

3. Πώς προκύπτει ο τύπος (+);

Δοκιμάζουμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$y(t) = C(t)\, e^{\int_a^t p(s)ds}$$

με άγνωστη τη συνάρτηση $C(t)$.

Αυτή η τεχνική λέγεται: "μέθοδος της μεταβολής των σταθερών".

Έχουμε:

$$C(t) = y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}$$

Επομένως: $C'(t) = \left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\, y(t)\right)'$

$$= \underbrace{\left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)'}_{=-p(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}} y(t) + e^{-\int_a^t p(s)ds}\, y'(t)$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)ds} \underbrace{\left[-p(t)y(t) + y'(t)\right]}_{= q(t)}$$

$$\Rightarrow C'(t) = q(t)\, e^{-\int_a^t p(s)ds}$$

Άρα, $C'(s) = q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$

Άρα, $C(t) = \underbrace{C_0}_{\text{σταθερά}} + \int_a^t q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\, ds$

Συστήματα ΣΔΕ

Δεδομένα: $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής
$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ζητούμενο: $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ συνεχώς παραγωγίσιμη
τω.

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Γραμμικά συστήματα ΣΔΕ.

$$f(t,y) = A(t)\,y + g(t)$$
$$A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}, \quad g(t) \in \mathbb{R}^m$$

Πρόβλημα αρχικών τιμών για (βαθμωτή) Δ.Ε. τάξης m:

$$(2) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \le t \le b \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

Ισχυρισμός: Το (2) μπορεί να γραφεί στη μορφή (1). Θέτουμε

$$Z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_m(t) \end{pmatrix}$$

Αρχικές τιμές:

$$Z(a) = \begin{pmatrix} Z_1(a) \\ Z_2(a) \\ \vdots \\ Z_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix} = \overset{\text{δεδομένα}}{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}} = Z_0$$

Επίσης,

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix} = F(t, z(t))$$

• <u>Ευστάθεια</u>

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \ a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), \ a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$$|y(t) - z(t)| \le C_1 |y_0 - z_0|$$

<u>Ευκλείδεια νόρμα:</u>

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

<u>1η περίπτωση:</u> (ολική) συνθήκη του Lipschitz

$$\exists L \ge 0, \ \forall t \in [a,b], \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$\| f(t,x) - f(t,\tilde{x}) \| \le L \| x - \tilde{x} \|$$

Τότε:

$$\forall t \in [a,b], \quad \| y(t) - z(t) \| \le e^{L(b-a)} \| y_0 - z_0 \|$$

Για άλλη νόρμα: Ο δεξιός όρος πολλαπλασιάζεται επί μια κατάλληλη σταθερά C.

2η περίπτωση: Μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz:
$\forall t\in[a,b], \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m \; (f(t,x)-f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x})\le 0.$
Τότε:
(3) $\forall t\in[a,b], \; \|y(t)-z(t)\| \le \|y_0-z_0\|$

Ερώτημα: Τι σημαίνει η (3) στην περίπτωση
$f(t,y) = A(t)y + g(t)$;

$$f(t,x)-f(t,\tilde{x}) = \left(A(t)\cdot x + \cancel{g(t)}\right) - \left(A(t)\tilde{x} + \cancel{g(t)}\right)$$
$$= A(t)\cdot x - A(t)\tilde{x} = A(t)(x-\tilde{x})$$

Άρα, η (3) γράφεται στη μορφή

$$\forall t\in[a,b], \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m \; (A(t)\underbrace{(x-\tilde{x})}_{\tilde{\tilde{x}}}, x-\tilde{x}) \le 0.$$

$\Leftrightarrow \forall t\in[a,b]\, \forall \tilde{\tilde{x}} \; (A(t)\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{x}})\le 0$
(ο πίνακας $A(t)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος).

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t\ge 0, \; \lambda\in\mathbb{C} \\ y(0)=1. \end{cases}$$

$|y(t)| = e^{Re\lambda\cdot t}$
$Re\lambda\le 0$, $|y(t)|$ φθίνουσα

$y = y_1 + iy_2, \quad y_1, y_2 \in\mathbb{R}$

$$y'(t) = y_1'(t) + iy_2'(t) = \lambda(y_1(t)+iy_2(t))$$
$$\Leftrightarrow y_1'(t)+iy_2'(t) = (a+ib)(y_1(t)+iy_2(t))$$
$$= (ay_1(t) - by_2(t)) + i(by_1(t)+ay_2(t))$$

$$\Leftrightarrow \begin{rcases} y_1'(t) = ay_1(t) - by_2(t) \\ y_2'(t) = by_1(t) + ay_2(t) \end{rcases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a y_1(t) - b y_2(t) \\ b y_1(t) + a y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (Ax, x) = (Ax)_1 x_1 + (Ax)_2 x_2 =$

$= (a x_1 - b x_2) x_1 + (b x_1 + a x_2) x_2$

$= a(x_1^2 + x_2^2)$

$|(Ax, x)| \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$

13/10/2015

Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής.

1. Γραμμικές Δ.Ε

$y(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t)$

2. Δ.Ε του Bernoulli

Οι Δ.Ε. του Bernoulli είναι της μορφής:

(*) $y'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t) [y(t)]^{\sigma}$, $a \leq t \leq b$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$

Ειδικές περιπτώσεις

▷ $\sigma = 0$: $y'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t)$, γραμμική Δ.Ε.

▷ $\sigma = 1$: $y'(t) = p(t) y(t) + q(t) \cdot y(t) = [p(t) + q(t)] y(t)$, γραμμική Δ.Ε.

Παρατήρηση: Για $\sigma > 0$, η $y(t) = 0$, $t \in [a, b]$, αποτελεί λύση (τετριμμένη λύση)

Υπόθεση: $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$, και αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις.

Αντικατάσταση: $u(t) := [y(t)]^{1-\sigma}$ (2)

Έχουμε $u'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma} \cdot y'(t)$

οπότε, αντικαθιστώντας στην ⊛, παίρνουμε

$$\frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{1}{[y(t)]^{\sigma}} u'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} u'(t) = p(t)\underbrace{y(t)[y(t)]^{-\sigma}}_{= [y(t)]^{1-\sigma} = u(t)} + q(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} u'(t) = p(t)u(t) + q(t) \quad (3)$$

Γραμμική Δ.Ε. ως προς u.

Λύνουμε την (3) ως προς u, αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στη (2) και υπολογίζουμε την $y(t)$.

Προσοχή!

Στις πράξεις αυτές πρέπει να φροντίζουμε να μην μηδενίζονται παρονομαστές.

Παράδειγμα: $y'(t) = y(t) + [y(t)]^2$, $a \leq t \leq b$, $y(t) = 0$, $t \in [a, b]$, λύση.

Δ.Ε. του Bernoulli με $\sigma = 2$

Αντικατάσταση:

$$u(t) = [y(t)]^{1-2} = (y(t))^{-1} = \frac{1}{y(t)}$$

Άρα, $u'(t) = -\frac{1}{[y(t)]^2} y'(t)$

οπότε η αρχική Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$-[y(t)]^2 u'(t) = -y(t) + [y(t)]^2.$$

$$\Rightarrow -u'(t) = -\frac{1}{y(t)} + 1 \quad \Rightarrow u'(t) - u(t) = -1$$

$\frac{1}{y(t)} = u(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-t}u'(t) - e^{-t}u(t)}_{(e^{-t}u(t))'} = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow (e^{-t}u(t))' = e^{-t}$$

$$\Rightarrow e^{-t} \cdot u(t) = e^{-t} + c$$

$$\Rightarrow u(t) = 1 + ce^{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = ce^{t} + 1}, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Άρα, $y(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{ce^t+1}$, $t \in [a,b]$

Πρέπει η $u(t) = ce^t + 1$ να μην μηδενίζεται στο $[a,b]$

$$\left\{ (e^{-t}+c)' = (e^{-t})' = e^{-t}(-1) = -e^{-t} \right\}$$

- Η $u(t)$ είναι μονότονη (αύξουσα για $c \geq 0$, και γνήσια φθίνουσα για $c > 0$).

• Λόγω της μονοτονίας αρκεί η κ να παίρνει ομόσημες τιμές στα άκρα a και b του διαστήματος, οπότε δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του [a,b].

3. Δ.Ε. του Riccati

(+) $y'(t) = r(t) + p(t)\cdot y(t) + q(t)\,[y(t)]^2, \quad a \le t \le b$

Ειδικές περιπτώσεις:

$q(t) = 0$, $\forall\, t \in [a,b]$, η Δ.Ε είναι γραμμική

$r(t) = 0$ -"-   : $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)\,[y(t)]^2$

Δ.Ε του Bernoulli με $\sigma = 2$

Έστω y_ε μια ειδική λύση

Αντικατάσταση: $y(t) = y_\varepsilon(t) + \dfrac{1}{z(t)}$, με $z(t)$ άγνωστη συνάρτηση.

Επομένως

$$\boxed{y'(t) = y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2}\,z'(t)}$$

Αντικαθιστώντας στην (+), παίρνουμε

$$y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2}\,z'(t) = r(t) + p(t)\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t)\underbrace{\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right]^2}_{[y_\varepsilon(t)]^2 + 2y_\varepsilon(t)\frac{1}{z(t)} + \frac{1}{[z(t)]^2}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\left\{y_\varepsilon'(t) - r(t) - p(t)\,y_\varepsilon(t) - q(t)\,[y_\varepsilon(t)]^2\right\}}^{=0 \text{ αφού η } y_\varepsilon \text{ είναι λύση της } (+)}$$

$$-\frac{1}{[z(t)]^2}\,z'(t) = p(t)\,\frac{1}{z(t)} + 2q(t)\,y_\varepsilon(t)\,\frac{1}{z(t)} + q(t)\,\frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Leftrightarrow\ -z(t) = [p(t) + 2q(t)\,y_\varepsilon(t)]\,z(t) + q(t)$$ Γραμμική Δ.Ε.

$y_\varepsilon(t) \rightarrow$ γνωστό

Υπολογίζουμε τη $z(t)$ και αντικαθιστούμε στην

$$y(t) = y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}$$

οπότε προκύπτει η $y(t)$.

Παράδειγμα

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{t}$$

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2$$

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}$$

Άρα, $y'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t)$

Αντικαθιστώντας στην αρχική Δ.Ε. παίρνουμε

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t}\left[\cancel{\frac{1}{t}} + \frac{1}{z(t)}\right] - \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \frac{1}{t}\frac{1}{z(t)} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{2}{t}\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = -\frac{3}{t}\frac{1}{z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Leftrightarrow -z'(t) = -\frac{3}{t} z(t) - 1$$

$$\Leftrightarrow z'(t) - \frac{3}{t} z(t) = 1$$

$$\underbrace{e^{\varphi(t)} z'(t) - \frac{3}{t} e^{\varphi(t)} z(t)}_{\left(e^{\varphi(t)} z(t)\right)'} = e^{\varphi(t)}$$

$$\varphi'(t) = -\frac{3}{t}$$

$$\varphi(t) = -3\log t = \log\frac{1}{t}$$

$$\varphi(t) = e^{\log\frac{1}{t^3}} = \frac{1}{t^3}$$

Άρα: $\left(\frac{1}{t^3} z(t)\right)' = \frac{1}{t^3} \Rightarrow$

$$\frac{1}{t^3} z(t) = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = ct^3 - \frac{t}{2}, \quad 1 \le t \le 2}$$

Άρα, $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(ct^2 - 1/2)}$

▸ Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = ct^2 - 1/2$ και θα επιλέξουμε τις σταθερές c κατά τρόπο ώστε, η φ να μην μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $[1,2]$

$\varphi'(t) = 2ct$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi \text{ αύξουσα στο διάστημα } [1,2] & \text{για } c \ge 0. \\ \varphi \text{ γνήσια φθίνουσα } \text{—"—} & \text{για } c < 0. \end{cases}$$

• $c<0$: $\varphi(1) = c - 1/2$, $\varphi(2) = 4c - 1/2 \rightsquigarrow \varphi(1) = c - 1/2 < 0$

1η περίπτωση: $\varphi(2) > 0 \Leftrightarrow 4c - 1/2 > 0 \Rightarrow \boxed{c > 1/8}$ δεν ικανοποιείται

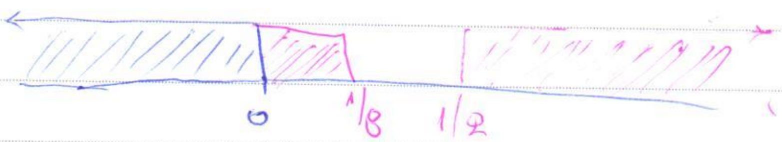
2η —"— : $\varphi(1) < 0 \Leftrightarrow c - 1/2 < 0 \Leftrightarrow \boxed{c < 1/2}$

Συμπέρασμα: Ικανοποιείται για κάθε $c<0$.

• $c \ge 0$

1η περίπτωση: $\varphi(1) = c - 1/2 > 0 \Leftrightarrow c > 1/2$

2η —"— : $\varphi(2) < 0 \Leftrightarrow 4c - 1/2 < 0 \Leftrightarrow c < 1/8$



$c < 1/8$ ή $c > 1/2$

15/10/2015

Άσκηση 1.4

$$\circledast \begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2

$f(t,y) = y^2$

$f_y(t,y) = 2y$

Η f_y είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα, οπότε η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα $[1-c, 1+c]$ με $c>0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2 υπάρχει μοναδική λύση του $\circledast$, τουλάχιστον στο διάστημα $[0, b']$ με $b' = \min\left(2, \frac{c}{A}\right)$, με $A = \max\limits_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 1-c \le y \le 1+c}} |f(t,y)| =$

$= \max\limits_{1-c \le y \le 1+c} |y^2| = (1+c)^2$

Άρα, $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right) = \frac{c}{(1+c)^2}$, όπου $\frac{c}{(1+c)^2} \le 1/2$

$$\max_{c>0} \frac{c}{(1+c)^2} = \max_{c>0} \frac{c}{1+2c+c^2} = \max_{c>0} \frac{1}{2+\underbrace{\left(c+\frac{1}{c}\right)}_{\ge 2}} = \frac{1}{4}$$

$\frac{c}{(1+c)^2} \le 1/4$

για $c=1$

Άσκηση 18

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, συνεχής

$\|\cdot\|$ Ευκλείδια νόρμα

$$\exists\, L \geq 0,\ \forall\, t \in [a,b]\ \forall\, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \quad \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z) & , t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

ΝΔΟ. $\forall\, t \in [a,b]$, $\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\|$

Απόδειξη:

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

Αφαιρούμε τις δύο ΔΕ κατά μέλη και έχουμε:

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Παίρνουμε το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο με $\varepsilon(t)$ και έχουμε

$$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t))$$

$$\Rightarrow (\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) \underset{CS}{\leq} \underbrace{\|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\|}_{\leq L\|\varepsilon(t)\|} \cdot \|\varepsilon(t)\|$$

$$\Rightarrow (\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) \leq L\|\varepsilon(t)\|^2$$

$$(\|\varepsilon(t)\|^2)' = ((\varepsilon_1(t))^2 + (\varepsilon_2(t))^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2)'$$

$$= 2\varepsilon_1(t)\varepsilon_1'(t) + 2\varepsilon_2(t)\cdot\varepsilon_2'(t) + \dots + 2\varepsilon_m(t)\cdot\varepsilon_m'(t)$$

$$= 2[\varepsilon_1(t)\varepsilon_1'(t) + \dots + \varepsilon_m(t)\varepsilon_m'(t)]$$

$$= 2(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = \frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)'}$$

Άρα, $\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' \leq L\|\varepsilon(t)\|^2$

Θέσαμε $\varphi(t) = \|\varepsilon(t)\|^2$ και έχουμε

$$\varphi'(t) \leq 2L\varphi(t) \Leftrightarrow$$
$$\varphi'(t) - 2L\varphi(t) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{-2Lt}\varphi(t)\right)' \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\varphi(a)}$$

$$\|\varepsilon(t)\|^{\cancel{2}} \leq e^{\cancel{2}L(t-a)}\|y_0 - z_0\|^{\cancel{2}}$$

<u>Άσκηση 1.10</u>

$\forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ (f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

<u>Ν.Δ.Ο.</u> $\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$.

Έχουμε, όπως προηγουμένως,

$$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = \underbrace{(f(t, y(t)) - f(t, z(t)), y(t) - z(t))}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' \leq 0$$

$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2$ φθίνουσα

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \leq \|\varepsilon(a)\|^2$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon(a)\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$

4. "ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ"

$$y'(t) = \frac{g(t)}{f(y(t))}$$

$$f(y(s)) \cdot y'(s) = g(s) \quad , s \in I.$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο α στο I και για $t \in I$, ολοκληρώνοντας από α μέχρι t, έχουμε $\int_a^t f(y(s))\, y'(s)\, ds = \int_a^t g(s)\, ds$

Αλλαγή μεταβλητής: $\tau := y(s)$ και παίρνουμε

$$\int_{y(a)}^{y(t)} f(\tau)\, d\tau = \int_a^t g(s)\, ds \quad (1)$$

Έστω F και G παράγουσες (ή αόριστα ολοκληρώματα) των f και g, αντίστοιχα ($F' = f$, $G' = g$)

Τότε, η (1) δίνει

$$(2) \quad F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(a)$$

Η (2) δίνει τις λύσεις $y(t)$ σε πεπλεγμένη (ή έμμεση) μορφή.

Παράδειγμα $\quad e^{y(t)} y'(t) = t + t^2$

$$e^{y(s)} y'(s) = s + s^2 \Rightarrow \int_a^t e^{y(s)} y'(s)\, ds = \int_a^t (s + s^2)\, ds$$

$$\overset{\tau = y(s)}{\Rightarrow} \int_{y(a)}^{y(t)} e^{\tau}\, d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{a^3}{3} \Rightarrow$$

$$e^{y(t)} - e^{y(a)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + e^{y(a)} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} = c$$

$$\Rightarrow y(t) = \log\Big(\underbrace{\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + c}_{>0}\Big)$$

5. "ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε"

$$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

Αντικατάσταση: $u(t) = \dfrac{y(t)}{t}$

Άρα, $y(t) = t \cdot u(t)$

$$\Rightarrow y'(t) = u(t) + t \cdot u'(t)$$

Έτσι, η αρχική Δ.Ε ~~π~~ λαμβάνει τη μορφή: $u(t) + t \cdot u'(t) = g(u(t))$

$$\Rightarrow \boxed{t\,u'(t) = g(u(t)) - u(t)} \quad (3)$$

Αυτή είναι μια Δ.Ε χωριζόμενων μεταβλητών.

1η περίπτωση: $g(u(t)) - u(t) \neq 0$ για κάθε t.

Τότε η (3) γράφεται στη μορφή

$$\frac{u(t)}{g(u(t)) - u(t)} = \frac{1}{t}, \quad t \neq 0$$

$$\underbrace{\int_\alpha^t \frac{u'(s)}{g(u(s))-u(s)}\,ds}_{\tau := u(s)} = \underbrace{\int_\alpha^t \frac{1}{s}\,ds}_{= \log(t)-\log(\alpha)} \quad \text{(ανά t ολοκλήρωμα)}$$

$$\Rightarrow \int_{u(\alpha)}^{u(t)} \frac{1}{g(\tau)-\tau}\,d\tau = \log(t)-\log(\alpha)$$

Έστω G παράγουσα της $\frac{1}{g(\tau)-\tau}$

Τότε, παίρνουμε

$G(u(t)) - G(u(\alpha)) = \log(t) - \log(\alpha)$ ⇝ Μας δίνει της u σε πεπλεγμένη (έμμεση) μορφή.

2η περίπτωση: Έστω u^* τ.ω. $g(u^*) = u^*$ (σταθερό σημείο της g)

Τότε θα πάρουμε $t \cdot u'(t) = 0$, οπότε u = σταθερή, συνεπώς $u(t) = u^*$ για κάθε t.

Από εδώ προκύπτουν οι λύσεις: $y(t) = t \cdot u^*$ με u^* σταθερό σημείο της g.

Αυτές οι λύσεις λέγονται <u>ιδιάζουσες</u> λύσεις της αρχικής Δ.Ε.

Γιατί λέγονται ομογενείς?

$y'(t) = \frac{M(t,y)}{N(t,y)}$, Η λέγεται ομογενής βαθμού m, αν: $M(\lambda t, \lambda y) = \lambda^m M(t,y)$. Αν ο αριθμητής και παρονομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις του ιδίου βαθμού, τότε:

$$\frac{M(t,y)}{N(t,y)} = g(y/t)$$

20/10/2015

Ομογενείς Δ.Ε

$$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

$\rightsquigarrow$ Δ.Ε. για τη u χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα: (1) $y'(t) = \dfrac{[y(t)]^2 + 2t\,y(t)}{t^2}$

$$= \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

- $M(t,y) = y^2 + 2ty$
- $N(t,y) = t^2$

$M(\lambda t, \lambda y) = \lambda^2 y^2 + 2\lambda^2 t y$
$= \lambda^2 (y^2 + 2ty) = \lambda^2 M(t,y)$

ομογενής συνάρτηση βαθμού 2

▷ Με $u(t) = \dfrac{y(t)}{t}$ η (1) γράφεται στη μορφή

$u(t) + t\,u'(t) = [u(t)]^2 + 2u(t)$

$\Rightarrow \boxed{t \cdot u'(t) = [u(t)]^2 + u(t)}$ (2)

$y(t) = t\,u(t) \rightsquigarrow$
$y'(t) = u(t) + t \cdot u'(t)$

Ισιάζουσες λύσεις: $u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \boxed{u = 0 \text{ ή } u = -1}$

Οι συναρτήσεις $u(t) = 0$ και $u(t) = -1$ είναι λύσεις της (2).
Άρα, οι $y(t) = 0$ και $y(t) = -t$ είναι οι ισιάζουσες λύσεις της (1).

Μη ιδιάζουσες λύσεις: $u(t) \neq 0$ και $u(t) \neq -1$ για κάθε t.

• Η (2) παίρνει τη μορφή $\dfrac{u'(s)}{[u(s)]^2 + u(s)} = \dfrac{1}{s}$

Ολοκληρώνουμε από ένα σημείο a μέχρι το t και παίρνουμε

$$\int_a^t \frac{u'(s)}{[u(s)]^2 + u(s)}\, ds = \int_a^t \frac{1}{s}\, ds.$$

Αλλαγή μεταβλητής $\tau = u(s) \rightsquigarrow d\tau = u'(s)\, ds$

$$\int_{u(a)}^{u(t)} \frac{1}{\tau^2 + \tau}\, d\tau = \int_a^t \frac{1}{s}\, ds$$

$$\frac{1}{\tau^2 + \tau} = \frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1}$$

Άρα, $\underbrace{\int_{u(a)}^{u(t)} \frac{1}{\tau}\, d\tau}_{\log|u(t)| - \log|u(a)|} - \int_{u(a)}^{u(t)} \frac{1}{\tau+1}\, d\tau = \int_a^t \frac{1}{s}\, ds$

$\Rightarrow [\log|u(t)| - \log|u(a)|] - [\log|u(t)+1| - \log|u(a)+1|]$

$= \log|t| - \log|a|$

$\Rightarrow \log|u(t)| - \log|u(t)+1| = \log|t| + \log|u(a)| - \log|u(a)+1|$
$- \log|a| = \log|c|$ με $c \neq 0$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{u(t)}{u(t)+1}\right| = \underbrace{\log|t| + \log|c|}_{\log|ct|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u(t)}{u(t)+1} = ct}, \text{ με } c \neq 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{ct}{1-ct}} \qquad \boxed{y(t) = \frac{ct^2}{1-ct}} \quad , 1-ct \neq 0$$

6. Πλήρεις (ή ακριβείς) Δ.Ε.

$$(3) \quad y'(t) = -\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$$

Η (3) λέγεται πλήρης, αν υπάρχει συνάρτηση $f = f(t,y)$ τ.ω.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \text{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y)} \quad (4)$$

Έστω f μια συνάρτηση που ικανοποιεί την (4). Τότε,

$$\frac{d}{dt} f(t,y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\cdot y'(t)$$

$$= M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) \overset{(3)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t,y(t)) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R}} \quad (5)$$

- Η (5) δίνει τις λύσεις $y(t)$ σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να τη λύσουμε, ως προς $y(t)$, βρίσκουμε τις λύσεις σε άμεση μορφή.

Ερώτημα: Πότε ικανοποιείται η (4) και πως προσδιορίζουμε μια τέτοια f;

Ισχυρισμός: Αν οι M και N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε η (4) ικανοποιείται, αν και μόνο αν

(6) $$\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)$$

"$\Rightarrow$": Έστω ότι η (3) είναι πλήρης. Τότε,

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t,y)} = \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)$$

και $$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y)} = \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)$$

Αφού, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}$, οι δύο προηγούμενες σχέσεις δίνουν

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

"$\Leftarrow$": Έστω ότι ισχύει η (6). Στόχος: Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η (4) και συγχρόνως θα προσδιορίσουμε και μια τέτοια f.

• $\frac{\partial f}{\partial t} = M \Rightarrow \boxed{f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y)}$ (7)

με άγνωστη τη συνάρτηση y.

• Παραγωγίζοντας στην (7) και τα δύο μέλη ως προς y, παίρνουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \int M_y(t,y)\,dt + g'(y)$$

$\parallel$ ← από την 2η σχέση στην (4)

$N(t,y)$

$$\Rightarrow N(t,y) = \int M_y(t,y)\,dt + g'(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(y) = N(t,y) - \int M_y(t,y)\,dt}$$

Σύμφωνα με την (6) έχουμε $M_y = N_t$, άρα παίρνουμε

$$\boxed{g'(y) = N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt}$$

Ισχυρισμός: το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του t. Πράγματι, παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε:

$$N_t(t,y) - N_t(t,y) = 0$$

Επομένως, $\boxed{g(y) = \int [N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt]\,dy + c}$

Συμπέρασμα: Υπάρχει f που ικανοποιεί την (4) (οπότε η Δ.Ε. είναι πλήρης) και η f δίνεται από την

$$f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \int [N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt]\,dy + c$$

Παράδειγμα: $y'(t) = -\dfrac{e^{y(t)}}{t\cdot e^{y(t)} + 2y(t)}$

$$\left.\begin{array}{l} M(t,y) = e^y \\ N(t,y) = t\cdot e^y + 2y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y}(t,y) = e^y \\ \\ \dfrac{\partial N}{\partial t}(t,y) = e^y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \rightsquigarrow$$

Δ.Ε. πλήρης

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y \Rightarrow f(t,y) = t e^y + g(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t e^y + g'(y)$

Θέλουμε όμως $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t\cdot e^y + 2y$

Συμπέρασμα: $t\cdot e^y + g'(y) = t\cdot e^y + 2y \Rightarrow \boxed{g(y) = y^2 + c}$

Άρα: $f(t,y) = t\cdot e^y + y^2 + c$

Άρα, οι λύσεις $y(t)$ της Δ.Ε. δίνονται από την $f(t, y(t)) = c'$ δηλ.

$t\cdot e^{y(t)} + [y(t)]^2 + c = c' = c''$, με c'' μια σταθερά.

22/10/2015

Άσκηση 1.2.

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$(f(t,y_1) - f(t,y_2))(y_1 - y_2) \leq v(y_1 - y_2)^2$

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \leq t \leq b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

ΝΔΟ $|y(t) - z(t)| \leq e^{v(t-a)} |y_0 - z_0|$, $\forall t \in [a,b]$

Απόδειξη:

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

Έχουμε

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t) = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\overbrace{[y(t) - z(t)]}^{\substack{\varepsilon(t)\\ \shortparallel}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big((\varepsilon(t))^2\Big)' \leq \nu\,[y(t) - z(t)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big((\varepsilon(t))^2\Big)' \leq \nu\,[\varepsilon(t)]^2$$

Θέτουμε $\varphi(t) := (\varepsilon(t))^2$ και παίρνουμε $\frac{1}{2}\varphi'(t) \leq \nu\cdot\varphi(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(t) - 2\nu\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow e^{-2\nu t}[\varphi'(t) - 2\nu\varphi(t)] \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [e^{-2\nu t}\varphi(t)]' \leq 0$$

Η $e^{-2\nu t}\varphi(t)$ είναι φθίνουσα,

ιδιαίτερα

$$e^{-2\nu t}\varphi(t) \leq e^{-2\nu a}\varphi(a) \quad , t\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2\nu(t-a)}\varphi(a)$$

$$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq e^{2\nu(t-a)}(\varepsilon(a))^2$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{\nu(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

$$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq e^{\nu(t-a)}|y_0 - z_0|$$

Άσκηση 1.12 (Ανισότητα του   σε ολοκληρωτική μορφή)

$\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

$$\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\,ds \quad , \forall t \in [0, T]$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t} \quad , \forall t \in [0, T]$$

Υπόδειξη: $\psi(t) = (\alpha + \varepsilon)\, e^{\beta t}$ με $\varepsilon > 0$

- $\psi(t) = (\alpha + \varepsilon) + \beta \int_0^t \psi(s)\,ds$

- $\varphi(t) < \psi(t) \quad , \forall t \in [0, T]$

Απόδειξη:

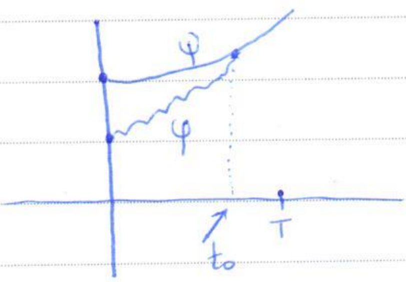
$$\alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\,ds = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t (\alpha + \varepsilon)\, e^{\beta s}\,ds$$

$$= \alpha + \varepsilon + \beta(\alpha + \varepsilon) \underbrace{\int_0^t e^{\beta s}\,ds}_{= \frac{1}{\beta}\left[e^{\beta t} - \underbrace{e^{\beta 0}}_{=1}\right]}$$

$$= (\alpha + \varepsilon) + (\alpha + \varepsilon)(e^{\beta t} - 1)$$

$$= \underbrace{(\alpha + \varepsilon)\, e^{\beta t}}_{= \psi(t)}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(0) &= \alpha + \varepsilon \\ \varphi(0) &\leq \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(0) < \psi(0)$$



Έστω $t_0 \in (0,T]$ ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Τότε, $\varphi(t) < \psi(t)$, $\forall t \in [0, t_0)$

Θα αποδείξουμε ότι $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$.

• Όντως,

$$\varphi(t_0) \leq \alpha + \beta \int_0^{t_0} \varphi(s)\,ds$$

$$\underset{\beta \geq 0}{\leq} \alpha + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds < \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds$$

$$= \psi(t_0)$$

• Οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Επομένως, τέτοιο t_0 δεν υπάρχει, συνεπώς $\varphi(t) < \psi(t)$, $\forall t \in [0,T]$

Άρα,

$$\varphi(t) < (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t}, \ \forall t \in [0,T], \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t}, \ \forall t \in [0,T]$$

Σημείωση!

α, β

$\alpha < \beta + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \leq \beta}$

Άσκηση 1.14

$$\varphi'(t) \leq \beta \varphi(t), \ \forall t \in [0,T]$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0) e^{\beta t}, \ \forall t \in [0,T]$$

• $\varphi'(s) \leq \beta \varphi(s) \Rightarrow$

$$\int_0^t \varphi'(s)\,ds \leq \beta \int_0^t \varphi(s)\,ds \Rightarrow \boxed{\varphi(t) \leq \varphi(0) + \beta \int_0^t \varphi(s)\,ds}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0) e^{\beta t}, \ \forall t \in [0,T]$$

Άσκηση 1.12

$$\varphi'(t) \le 6\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - 6\varphi(t) \le 0$$

$$\Rightarrow (e^{-6t}\varphi(t))' \le 0$$

$$\Rightarrow e^{-6t}\varphi(t) \le \underbrace{e^{-6\cdot 0}}_{=1}\varphi(0)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \le \varphi(0)e^{6t}$$

Πλήρεις (ακριβείς) Δ.Ε.

(1) $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ με M και N τ.ω. $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}}$

Τότε, υπάρχει συνάρτηση f τ.ω. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = M$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$.

Οι λύσεις της (1) δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από $f(t,y(t)) = c$, με $c \in \mathbb{R}$

Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις

Αν υπάρχει συνάρτηση $\mu = \mu(t,y)$ τ.ω. η

(2) $y'(t) = -\dfrac{\mu(t,y(t))\,M(t,y(t))}{\mu(t,y(t))\,N(t,y(t))}$

να είναι πλήρης, τότε το μ λέγεται "ολοκληρωτικός παράγοντας"

Πρόβλημα: Να προσδιορίσουμε τέτοιες μ.

- Πρέπει και αρκεί να ισχύει $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial t}$.

Δηλαδή,

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

ή

$$(3) \quad \frac{1}{\mu}\left(N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

- Η (3) είναι "μερική" διαφορική εξίσωση και η επίλυσή της είναι πρόβλημα πολύ δυσκολότερο από την επίλυση της (1)

- Αν η μ είναι συνάρτηση μίας μόνο μεταβλητής, είτε του t είτε του y, τότε η (3) είναι <u>γραμμική</u> συνήθης Δ.Ε., οπότε επιλύεται εύκολα

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

<u>1η Περίπτωση:</u> $\mu = \mu(t)$

Τότε η (3) γράφεται στη μορφή $\frac{1}{\mu} N \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \boxed{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}}$$ ~ πρέπει να είναι ανεξ. του y.

Τότε, $\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}$

<u>2η Περίπτωση:</u> $\mu = \mu(y)$

Τότε, η (3) γίνεται $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = - \boxed{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}}$ ~ πρέπει αυτή η συνάρτηση να είναι ανεξ. του t.

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \partial y}$$

Συμπέρασμα:

- Αν $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ ανεξ. του y, τότε υπάρχει

ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \partial t}$$

- Αν $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$ ανεξ. του t, τότε $\mu = \mu(y)$,

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \partial y}$$

Παράδειγμα:

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2 y(t) - t}$$

$M(t,y) = y$, $N(t,y) = t^2 y - t$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1$

Άρα $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$, οπότε η Δ.Ε. δεν είναι πλήρης

Τώρα, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}(t,y) = \dfrac{1-(2ty-1)}{y} = \dfrac{2-2ty}{y}$

δεν είναι ανεξάρτητο του t, οπότε δεν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$

Όμως, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}(t,y) = \dfrac{2-2ty}{t^2 y - t} = -\dfrac{2}{t}$

ανεξ. του y, οπότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$

Έχουμε, $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2}{t} \Rightarrow \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = -\frac{2}{t}$

$$\Rightarrow \log|\mu(t)| = -2\log|t| \Rightarrow \log|\mu(t)| = \log\frac{1}{t^2}$$

κρατάω το +

$$\Rightarrow \mu(t) = \pm\frac{1}{t^2}$$

• Γράφουμε την αρχική εξίσωση ως $y'(t) = -\dfrac{\dfrac{y(t)}{t^2}}{y(t) - \dfrac{1}{t}}$ $\quad \frac{y(t)}{t^2} = M$, $\quad y(t) - \frac{1}{t} = N$

$M(t,y) = \frac{y}{t^2}$, $N(t,y) = y - \frac{1}{t}$

Τότε $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{t^2}$ και $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{t^2}$, δηλ. η Δ.Ε είναι πλήρης.

▷ Ζητείται τώρα $f = f(t,y)$ τ.ω.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \dfrac{y}{t^2} & \rightsquigarrow f(t,y) = \displaystyle\int \frac{y}{t^2}\,dt + g(y) = -\frac{y}{t} + g(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = y - \dfrac{1}{t} & \Rightarrow f_y(t,y) = -\dfrac{1}{t} + g'(y) \end{cases}$$

Θέλουμε $-\frac{1}{t} + g'(y) = y - \frac{1}{t}$

$g(y) = \frac{1}{2}y^2 \ (+c)$

• Άρα, $f(t,y) = -\frac{y}{t} + \frac{1}{2}y^2$

Οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από τη σχέση $f(t, y(t)) = c$, δηλ. $-\frac{y(t)}{t} + [y(t)]^2 = c$ με $c \in \mathbb{R}$

27/10/2015

Γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές.

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) = A(t)\,y(t) + f(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχώς παραγωγίσιμη
$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχής
$A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ συνεχής

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

- Το (1) έχει ακριβώς μία λύση (ικανοποιείται η ολική συνθήκη του Lipschitz)

- Το (1) αποτελεί γενίκευση του Π.Α.Τ.

$$2.\quad \begin{cases} y'(t) = p(t)\,y(t) + q(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

για μια <u>βαθμωτή</u> γραμμική Δ.Ε

Η λύση του (2) είναι:

$$(3)\quad y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds}\, y_0 + \int_a^t q(s)\, e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau}\, ds$$

1º ερώτημα: Δίνεται η λύση του (1) από έναν τύπο "ανάλογο" του (3);

Απάντηση: Ναι, αν οι πίνακες $A(t)$ και $A(s)$ αντιμετατίθενται για κάθε $t, s \in [a,b]$.

π.χ. αν $A(t) = p(t)A$ με $p(t)$ βαθμωτή συνάρτηση και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ανεξάρτητος του t

• Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση $A(t) = A$

σταθεροί συντελεστές

$$(4)\quad \begin{cases} y'(t) = A\,y(t) + f(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

2º ερώτημα: Είναι η παράσταση της λύσης του (4) σε μορφή ανάλογη της (3) εύχρηστη.

Ομογενές σύστημα ΣΔΕ:

$$(5)\quad \begin{cases} y'(t) = A\,y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

(Στην περίπτωση που η αρχική τιμή δίνεται σε ένα σημείο a, η λύση προκύπτει εύκολα με αλλαγή μεταβλητής)

Η λύση του (2) είναι:

$$(3)\quad y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds}\, y_0 + \int_a^t q(s)\, e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau}\, ds$$

1ο ερώτημα: Δίνεται η λύση του (1) από έναν τύπο "ανάλογο" του (3);

Απάντηση: Ναι, αν οι πίνακες $A(t)$ και $A(s)$ αντιμετατίθενται για κάθε $t, s \in [a,b]$.

π.χ. αν $A(t) = p(t)A$ με $p(t)$ βαθμωτή συνάρτηση και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, ανεξάρτητος του t

- Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση $A(t) = A$

σταθεροί συντελεστές

$$(4)\quad \begin{cases} y'(t) = A\,y(t) + f(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

2ο ερώτημα: Είναι η παράσταση της λύσης του (4) σε μορφή ανάλογη της (3) εύχρηστη.

Ομογενές σύστημα Σ.Δ.Ε.:

$$(5)\quad \begin{cases} y'(t) = A\,y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

(Στην περίπτωση που η αρχική τιμή δίνεται σε ένα σημείο a, η λύση προκύπτει εύκολα με αλλαγή μεταβλητής)

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha(y(t)) & , t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$ (βαθμωτή περίπτωση)

Λύση: $y(t) = e^{\alpha t} y_0$

Υπόθεση $y(0) \neq 0$

1ο ερώτημα: Υπάρχουν περιπτώσεις που η λύση του (5) δίνεται στη μορφή: (6) $\boxed{y(t) = e^{\lambda t} y^{(0)}}$ με $\lambda \in \mathbb{C}$;

Αρχική συνθήκη: $y(0) = \overset{=1}{e^0} y^{(0)} = y^{(0)}$ ✓
(ικανοποιείται για κάθε λ)

Σύστημα Δ.Ε.:

$y'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} y^{(0)}$

$A\,y(t) = A e^{\lambda t} y^{(0)} = e^{\lambda t} A y^{(0)}$

Επομένως: $y'(t) = Ay(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} y^{(0)} = e^{\lambda t} A y^{(0)}$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0}(Ay^{(0)} - \lambda y^{(0)}) = 0 \Leftrightarrow Ay^{(0)} - \lambda y^{(0)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}}$

Συμπέρασμα: Η (6) είναι λύση του (5), αν και μόνο αν το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το $y^{(0)}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Γενικότερη περίπτωση:

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A και $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ισχυρισμός: Αν η αρχική τιμή $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$,

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)}$$

Τότε η λύση του (5) δίνεται από τη σχέση:

$$(7) \quad y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$$

• Αρχική συνθήκη:

$$y(0) = c_1 \underbrace{e^0}_{=1} x^{(1)} + c_2 \underbrace{e^0}_{=1} x^{(2)} + \dots + c_m \underbrace{e^0}_{=1} x^{(m)}$$

$$= c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)} = y^{(0)}$$

• Σύστημα Δ.Ε:

$$y'(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_m \lambda_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$$

$$A \cdot y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{A x^{(1)}}_{=\lambda_1 x^{(1)}} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underbrace{A x^{(2)}}_{=\lambda_2 x^{(2)}} + \dots + c_m e^{\lambda_m (t)} \underbrace{A x^{(m)}}_{=\lambda_m x^{(m)}}$$

ιδιοδιάνυσμα κ' αντίστοιχη ιδιοτιμή

$$= c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \dots$$

Άρα, όντως $\boxed{y'(t) = A y(t)}$

Υπόθεση: Ο πίνακας A έχει m γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{C}^n$

(Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν, η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A συμπίπτουν)

*

~

$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I_n)x = 0$
$\vec{x} \neq 0$.

$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, $p \in \mathbb{P}_n$
$\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή $\iff p(\lambda) = 0$

Αλγεβρική πολλαπλότητα: μιας ιδιοτιμής λ του A, λέγεται η πολλαπλότητα της λ ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου P.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \varphi(\lambda)$
πολυώνυμο

αλγ. πολλαπλότητα του $\lambda_1 = m \iff \varphi(\lambda_1) \neq 0$

λ_1 ιδιοτιμή του A.
Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων ως προς την ιδιοτιμή λ_1, λέγεται γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_1.
Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι το πολύ όσο η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής.

* Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται ιδιαίτερα, όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι διαφορετικές μεταξύ τους, οπότε τόσο η αλγεβρική όσο και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι 1.

• Τότε, τα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$. Επομένως, κάθε διάνυσμα $y^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, γράφεται στη μορφή
(8) $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$, με $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$

(Το (8) είναι ένα γραμμικό σύστημα, n εξισώσεων με n αγνώστους, τα $c_1, \dots, c_n$. Ο πίνακας με στήλες $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι αντιστρέψιμος, αφού τα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα)

Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η λύση y του (5) δίνεται στη μορφή

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x^{(n)}$$

<u>Γενική περίπτωση:</u> Όταν δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A, τότε τουλάχιστον μια αρχική τιμή $y^{(0)}$ <u>δεν</u> μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του A.

<u>"Βαθμωτή περίπτωση"</u>

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t), \ t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Λύση:</u> $y(t) = e^{\alpha t} y_0$

▹ Μήπως η λύση $y(t)$ του (5) γράφεται στη μορφή

(9) $y(t) = e^{tA} y^{(0)}$ (Τι σημαίνει e^A;)

$\alpha \in \mathbb{C}$:

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^l}{l!} + \dots$$

Ορίζουμε αντίστοιχα για $A \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^l}{l!} + \dots$$

<u>Ιδιότητες:</u> $e^0 = I_n$

$$e^{\lambda I_n} = I_n + \lambda I_n + \frac{\lambda^2}{2!} I_n + \dots + \frac{\lambda^l I_n}{l!} + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^l}{l!} + \dots\right)}_{\overset{\shortparallel}{e^\lambda}} I_n = e^\lambda I_n$$

$(e^{tA})' = Ae^{tA}$

$e^A e^B = e^{A+B}$ αν και μόνο αν $AB = BA$

Ισχυρισμός: Η λύση $y(t)$ του (5) γράφεται στη μορφή

(10) $\boxed{y(t) = e^{tA} y^{(0)}, \ t \in \mathbb{R}}$

Απόδειξη:

αρχική τιμή: $y(0) = e^{0 \cdot A} y^{(0)} = \underset{\overset{\shortparallel}{I_n}}{e^{0}} y^{(0)} = y^{(0)}$ ✓

$y'(t) = (e^{tA})' y^{(0)} = A \underbrace{e^{tA} y^{(0)}}_{\overset{\shortparallel}{y(t)}} = Ay(t)$

Στην περίπτωση που η αρχική τιμή είναι $y(a) = y^{(0)}$, τότε η λύση $y(t)$ δίνεται στη μορφή

$y(t) = e^{(t-a)A} y^{(0)}$

Μη ομογενές σύστημα ΔΕ:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t) \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής: $\boxed{y(t) = e^{tA} u(t)}$

με άγνωστη τη διανυσματική συνάρτηση u.

(Τεχνική της μεταβολής των σταθερών)

• Αρχική συνθήκη: $y(0) = \underset{\overset{\shortparallel}{I_n}}{e^{0A}} u(0) \Rightarrow \boxed{u(0) = y^{(0)}}$

• Σύστημα Δ.Ε.

$$y'(t) = \underbrace{(e^{tA})'}_{A \cdot e^{tA}} u(t) + e^{tA} u'(t)$$

$$= A e^{tA} u(t) + e^{tA} u'(t)$$

$$A y(t) + f(t) = A e^{tA} u(t) + f(t)$$

Επομένως,

$$y'(t) = Ay(t) + f(t) \Leftrightarrow e^{tA} u'(t) = f(t)$$

Τώρα,

$$e^{tA} u'(t) = f(t) \Rightarrow u'(t) = e^{-tA} f(t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t u'(s)\,ds}_{u(t) - u(0)} = \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

Επομένως,

$$\boxed{u(t) = y^{(0)} + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds}$$

Άρα, $y(t) = e^{tA} y^{(0)} + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$

$$= e^{tA} y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds.$$

Γενικά: $y'(t) = Ay(t) + f(t)$

$y(a) = y^{(0)}$

Λύση: $y(t) = e^{(t-a)A} y^{(0)} + \int_a^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds$

29/10/2015

Άσκηση 1.26

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ μη θετικά ορισμένος, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) \leq 0$

N.Δ.Ο: Η ευκλείδια νόρμα $\|y(t)\|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Απόδειξη:

$$y'(t) = My(t) \Rightarrow (y'(t), y(t)) = \underbrace{(My(t), y(t))}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y'(t), y(t))}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2} \leq 0$$

$\Rightarrow (\|y(t)\|^2)' \leq 0 \Rightarrow \|y(t)\|^2$ φθίνουσα $\Rightarrow \|y(t)\|$ φθίνουσα.

Άσκηση 1.27

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \geq 0 \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

N.Δ.Ο: Η $|x(t)|^2 + |y(t)|^2$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη Άσκηση, αρκεί ν.δ.ο ο πίνακας M είναι μη θετικά ορισμένος. Για $x \in \mathbb{R}^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (Mx, x) &= (-2x_1 + x_2)x_1 + (2x_1 - 2x_2)x_2 = \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 = \\ &= -2\underbrace{(|x_1| - |x_2|)^2}_{\geq 0} \underbrace{- 4|x_1x_2| + 3x_1x_2}_{\leq 0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (Mx, x) \leq 0$$

Άσκηση 1.28

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικός, δηλ. $M_{ij} = -M_{ji}$, $i,j = 1, \dots, m$.

ΝΔΟ: $\|y(t)\|$ σταθερή (δηλ. $\|y(t)\| = \|y_0\|$, $t \geq 0$)

Απόδειξη:

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) = 0$

$$(Mx)_i = \sum_{j=1}^{m} M_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow (Mx, x) = \sum_{i=1}^{m} (Mx)_i x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} M_{ij} x_j \right) x_i$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{M_{ij}}_{= -M_{ji}} x_j x_i = -\sum_{i,j=1}^{m} M_{ji} x_j x_i = -(Mx, x) \Rightarrow M(x,x) = 0$$

Τώρα, έχουμε $(y'(t), y(t)) = \underbrace{(My(t), y(t))}_{= 0}$

$$\Rightarrow (y'(t), y(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \left(\|y(t)\|^2 \right)' = 0 \Rightarrow \|y(t)\|^2 = \text{σταθερή}$$

$$= \|y(0)\|^2 = \|y_0\|^2$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| = \|y_0\|, \quad t \geq 0$$

Άσκηση 1.3 (από το συμπλήρωμα, όχι από το βιβλίο)

$$y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = y_0$$

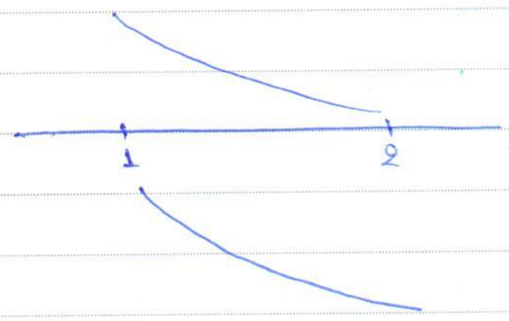
← Παράδειγμα 1.3

$\left(y(t) = 0, \ y(t) = \frac{1}{ce^t + 1}, \text{ με } c \in \mathbb{R} \right)$ ~ Υπενθύμιση

(α) Η $y(t) = \frac{1}{ce^t + 1}$ αποτελεί λύση στο $[1,2]$, αν και μόνο αν

είτε $c < -\frac{1}{e}$, είτε $c > -\frac{1}{e^2}$

- $\varphi(t) = ce^t + 1$ και θέλουμε να δούμε για ποιες τιμές της c η φ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$
  - $c \ge 0$, τότε $\varphi(t) \ge 1$
  - $c < 0$, τότε η φ είναι φθίνουσα



- Θέλουμε να ισχύει είτε $\varphi(2) > 0$, είτε $\varphi(1) < 0$. Δηλ.

$$ce^2 + 1 > 0 \iff ce^2 > -1 \iff c > -\frac{1}{e^2}$$

$$c \cdot e + 1 < 0 \iff c \cdot e < -1 \iff c < -\frac{1}{e}$$

(β) $y_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$ Ν.Δ.Ο το πρόβλημα δεν έχει λύση

Ακριβέστερα: $y(t) \to \infty, \ t \nearrow \frac{3}{2}$

$$y(1) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow c = -\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{e^t}{e\sqrt{e}}} = \frac{1}{1-e^{t-\frac{3}{2}}} \to \infty \text{, καθώς } t \uparrow \frac{3}{2}$$

(γ.) $y_0 = -1$

$$y(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1} = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{e}$$

Άρα,

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{2}{e}e^t} = \frac{1}{1-2e^{t-1}}$$

Η y είναι καλά ορισμένη σε όλο το διάστημα $[1,2]$, αφού $e^{t-1} \geq 1$, οπότε $-2e^{t-1} \leq -2 \Rightarrow 1-2e^{t-1} \leq -1 < 0$

• Πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(*)\ \begin{cases} y'(t) = A\,y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases} \qquad \text{με } A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Μέχρι τώρα είδαμε:

$\boxed{1}$ Αν η αρχική τιμή $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ του A, $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)}$, και $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ είναι αντίστοιχες ιδιοτιμές, τότε η λύση του $(*)$ είναι:

$$(**)\quad y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}.$$

$\boxed{2}$ Γενικά έχουμε την εξής παράσταση της λύσης

$$y(t) = e^{tA} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ερώτημα: Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε εκφράσεις της μορφής $e^{tA} y^{(0)}$, ή ισοδύναμα $e^{tA} x$ με $x \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$;

1η περίπτωση: Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

αυτοί οι πίνακες αντιμετατίθενται

Τότε,

$$e^{tA}x = e^{t(\lambda I_n + (A - \lambda I_n))} x$$

$$= \underbrace{e^{t\lambda I_n}}_{= e^{t\lambda} I_n} e^{t(A-\lambda I_n)} x$$

$$\boxed{e^A e^B = e^{A+B} \quad (AB = BA)}$$

$$\boxed{e^B = I_n + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^\ell}{\ell!} + \dots}$$

$$= e^{t\lambda} e^{t(A-\lambda I_n)} x$$

$$= e^{\lambda t}\Big[I_n x + \underbrace{t(A-\lambda I_n)x}_{=0} + \underbrace{\frac{t^2 (A-\lambda I_n)^2 x}{2}}_{=0} + \dots \Big]$$

$$= e^{\lambda t} x$$

2η περίπτωση: $(A-\lambda I_n)^m x = 0$, με λ ιδιοτιμή και $m \in \mathbb{N}$.

Τότε,

$$e^{tA}x = e^{\lambda t}\Big[x + t(A-\lambda I_n)x + \dots + \frac{t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1}x}{(m-1)!} + \frac{t^m(A-\lambda I_n)^m x}{m!} + \frac{t^{m+1}(A-\lambda I_n)^{m+1}x}{(m+1)!} + \dots\Big]$$

Συμπέρασμα:

$$e^{tA}x = e^{\lambda t}\Big[x + t(A-I_n)x + \frac{t^2(A-\lambda I_n)x}{2!} + \dots + \frac{t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1}x}{(m-1)!}\Big]$$

$$(A-\lambda I_n)^{l+\kappa}x = (A-\lambda I_n)^{l}\underbrace{(A-\lambda I_n)^m x}_{=0} = 0$$

αν $(A-\lambda I_n)^m x = 0$

• Αν υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ από ιδιοδιανύσματα του A, τότε χρειάζονται μόνο οι πράξεις της 1ης περίπτωσης, και αυτό οδηγεί πάλι σε έναν τύπο αντίστοιχο του (**) (με η αντί για m)

▷ Έστω τώρα ότι αυτό δεν συμβαίνει, δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής του A είναι (γνήσια) μικρότερη της αλγεβρικής της πολλαπλότητας.

▷ Έστω λ ιδιοτιμή ενός πίνακα πολλαπλότητας m. Τα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα $x \in \mathbb{C}^n$ τ.ω. $(A-\lambda I_n)^m x = 0$ λέγονται "γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A"

▽ • Από την Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι:

• για μία ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας m υπάρχουν m γραμμικά ανεξάρτητα αντίστοιχα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

• Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Συμπέρασμα: Για οποιονδήποτε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.

• Πώς βρίσκουμε m γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ, πολλαπλότητας m.

1ος τρόπος:

Βρίσκουμε m γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$(A-\lambda I_n)^m \cdot x = 0$$

2ος τρόπος: (πολλές φορές αρκετά ευκολότερος)

1ο Βήμα: Βρίσκουμε όσο το δυνατόν περισσότερα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα x τ.ω.

$$(A-\lambda I_n)x = 0$$

(δηλαδή ιδιοδιανύσματα)

(Το μέγιστο πλήθος είναι εξ ορισμού η γεωμετρική πολλαπλότητα του λ)

• Αν βρούμε m (όση και η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ) σταματάμε. Διαφορετικά πάμε στο 2ο Βήμα.

2ο Βήμα: Βρίσκουμε όσο το δυνατόν περισσότερες λύσεις του $(A-\lambda I_n)^2 x = 0$ γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και προς τις λύσεις του 1ου βήματος.

Με αυτό τον τρόπο προκύπτει τουλάχιστον ένα διάνυσμα. Συνεχίζουμε με προφανή τρόπο.

03/11/2015

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Υπόθεση:

Έχουμε ήδη υπολογίσει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ του A. Τέτοια υπάρχουν πάντα.

Γράφουμε την αρχική τιμή $y^{(0)}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$, $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$.

(Λύνοντας αυτό το γραμμικό σύστημα ως προς $c_1, \dots, c_n$)

Τότε η λύση $y(t)$ του (*) δίνεται στη μορφή:

$$(**) \quad y(t) = c_1 e^{tA} x^{(1)} + c_2 e^{tA} x^{(2)} + \dots + c_n e^{tA} x^{(n)}$$

Γνωρίζουμε με ποιον τρόπο υπολογίζουμε την $e^{tA} x^{(1)}$, οπότε οδηγούμαστε στη λύση.

Παρατήρηση:

Οι διανυσματικές συναρτήσεις:

$\varphi^{(i)}(t) = e^{tA} x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Σύμφωνα με τη (**) κάθε λύση του $y'(t) = Ay(t)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$.

▷ Αυτό ισχύει γενικά για οποιαδήποτε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

▷ Το πλεονέκτημα της (**) (με $x^{(i)}$ ιδιοδιανύσματα ή γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A) είναι ότι οι $e^{tA} x^{(i)}$ υπολογίζονται εύκολα.

Παραδείγματα

(+) $y'(t) = A\,y(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ γενική λύση;

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$

$p(1) = 0 \rightsquigarrow \lambda = 1$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)\underbrace{(\ldots)}_{2ου\ βαθμού}$

Αν υπάρχουν ακέραιες ρίζες είναι διαιρέτες του 6, δηλ. $\Delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Δοκιμάζοντας παίρνουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = -2$

• Αφού οι ιδιοτιμές είναι απλές (ιδιαίτερα η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα καθεμιάς είναι 1) υπάρχουν 3 ιδιοδιανύσματα του A.

(α) $\lambda_1 = 1$ Ζητείται αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, δηλ. $u \in \mathbb{R}^*$ τ.ω $(A - I_3)u = 0$, δηλ. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$$\iff \left.\begin{aligned} -u_2 + 4u_3 &= 0 \\ 3u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_1 + u_2 - 2u_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Αφαιρώντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε:

$u_1 + u_3 = 0$

Άρα, έχουμε: $u_2 = 4u_3$

$u_1 = -u_3$ με αυθαίρετο u_3

Για $u_3 = 1$ (π.χ.) παίρνουμε $u_1 = -1$, $u_2 = 4$

Συμπέρασμα: Το $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Σύμφωνα με όσα ξέρουμε η $\varphi^{(1)}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι λύση του (+).

(β) $\lambda_2 = 3$, $(A - \lambda_2 I)u = 0 \rightsquigarrow \dots\dots \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Επομένως, $\varphi^{(2)}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(γ) $\lambda_3 = -2$, αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα: $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Επομένως, $\varphi^{(3)}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι λύση του (+).

Γενική λύση του (+):

$$y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t)$$

$$= c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(Επαλήθευση!)

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (A \text{ όπως πριν}) \\ y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

• Αρκεί να προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3 στη γενική λύση έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

Άρα,

$$\left.\begin{aligned} -c_1 e^2 + c_2 e^6 - c_3 e^{-4} &= 1 \\ 4c_1 e^2 + 2c_2 e^6 + c_3 e^{-4} &= 2 \\ c_1 e^2 + c_2 e^6 + c_3 e^{-4} &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας την πρώτη και την τρίτη εξίσωση, παίρνουμε

$$2c_2 e^6 = 4 \rightsquigarrow \boxed{c_2 = 2e^{-6}}$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση και έχουμε:

$$-c_1 e^2 - c_3 e^{-4} = 1 - c_2 e^6 = 1 - 2 = -1$$
$$4c_1 e^2 + c_3 e^{-4} = 2 - 2c_2 e^6 = 2 - 4 = -2$$

ή

$$\left.\begin{aligned} -c_1 e^2 - c_3 e^{-4} &= -1 \\ 4c_1 e^2 + c_3 e^{-4} &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας παίρνουμε $3c_1 e^2 = -3 \Rightarrow \boxed{c_1 = -e^{-2}}$

Επομένως,

$$-c_3 e^{-1} = -1 + \underbrace{c_1 e^{2}}_{=-1} = -2 \Rightarrow \boxed{c_3 = 2e^{1}}$$

▷ Αντικαθιστούμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3 στη γενική λύση και παίρνουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

Παράδειγμα: $y'(t) = Ay(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 (2-\lambda)$$

Ιδιοτιμή: $\lambda_1 = 2$ απλή
$\boxed{\lambda_2 = 1 \text{ διπλή}}$

(α) $\lambda_1 = 2$ $\quad (A-2I_3)u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_1 = 0$
$u_2 = 0$
u_3 αυθαίρετο

π.χ. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{2t} u = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(β) $\lambda_2 = 1$ $\quad (A - I_3)u = 0 \iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{matrix} u_1 \text{ αυθαίρετο} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{matrix}$$

▷ Υπάρχει μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, π.χ. το $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Γεωμετρική πολλαπλότητα = 1)

$$\varphi^{(2)}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▷ Αναζητούμε ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα ως προς την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$, γραμμικά ανεξάρτητο του u που βρήκαμε

$$(A - \lambda_2 I_3)^2 u = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις: $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad u_1, u_2$ αυθαίρετα, όχι και οι 2 μηδέν

• Το u_2 δεν επιτρέπεται να μηδενίζεται, γιατί το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που θα πραιόψω είναι πολλαπλάσιο ιδιοδιανύσματος (δηλαδή ιδιοδιάνυσμα). Επιλέγουμε $u_2 = 1$ και $u_1 = 0$

Άρα, ένα από τα ζητούμενα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(3)}(t) = e^t[u + t(A - I_3)u] = e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}te^t\\e^t\\0\end{pmatrix}$$ (επαλήθευση!)

• Η ζητούμενη γενική λύση είναι:

$$y(t) = c_1e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_3e^t\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}c_2e^t + c_3te^t\\c_3e^t\\c_1e^{2t}\end{pmatrix}$$

05/11/2015

Άσκηση 1Δ

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Λύση, μέγιστο διάστημα I, στο οποίο ορίζεται η λύση.

Λύση:

Η Δ.Ε είναι εξίσωση του Bernoulli με $\sigma = 2$

• $y(t) = 0$ είναι λύση της Δ.Ε. αλλά δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

• Θέτουμε $u(t) := [y(t)]^{1-\sigma} = \frac{1}{y(t)}$

Έχουμε $u'(t) = -\frac{1}{[y(t)]^2}\boxed{y'(t)}$

και η Δ.Ε γράφεται στη μορφή:

$$[y(t)]^2 u'(t) = y(t) - [y(t)]^2$$

$$\Rightarrow -u'(t) = \underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{=u(t)} - 2$$

$$\Rightarrow u'(t) + u(t) = 1$$ (γραμμική Δ.Ε. ως προς u)

$$\Rightarrow e^{-t}[u'(t)+u(t)] = e^{-t}$$

$$(e^{-t}u(t))' = e^{-t}$$

(ολοκληρώνοντας) $\Rightarrow e^{t}u(t) = e^{t} + c$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = 1 + c e^{-t}}$$

Άρα, $y(t) = \dfrac{1}{u(t)} = \dfrac{1}{1+te^{-t}}$

Λύσεις της Δ.Ε: $y(t) = \dfrac{1}{1+ce^{-t}}$ με $c \in \mathbb{R}$

<u>Αρχική συνθήκη:</u>

$$2 = \frac{1}{1+c} \Leftrightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$$

Λύση του προβλήματος:

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-t}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-t}} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = 2 \Leftrightarrow -t = \log 2 \Leftrightarrow t = -\log 2$$

▷ Η $y(t)$ ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty, -\log 2)$ και $(-\log 2, \infty)$

▷ Επειδή το 0 πρέπει να ανήκει στο I, συμπεραίνουμε ότι $I = (-\log 2, \infty)$

Άσκηση 1.5.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y(t)}{t} - [y(t)]^2 , & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. είναι εξίσωση του Riccati και η γενική λύση της είναι:

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}} \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$ (Παράδειγμα 1.4)

(α) Ν.Δ.Ο. για $y_0 = -3$ το ΠΑΤ δεν έχει λύση. Ακριβέστερα $y(t) \to -\infty$ για $t \nearrow \sqrt{2}$.

$$y(1) = -3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = -3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{4}}$$

Άρα,

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{4}{t(t^2 - 2)}$$

Προφανώς έχουμε $y(t) \to -\infty$ για $t \nearrow \sqrt{2}$

(β) Λύση για $y_0 = 3$

$$y(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Λύση: $y(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^3 - \frac{t}{2}} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{2}{t\underbrace{(2t^2 - 1)}_{\geq 1}}$

Άσκηση 1.6.

Να λύσουμε την Δ.Ε.: $y'(t) = \dfrac{1 + [y(t)]^2}{2t\,y(t)}$

• Η ΔΕ γράφεται στη μορφή $2\dfrac{y(t)}{1+[y(t)]^2}\,y'(t) = \dfrac{1}{t}$

(Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών)

• Ολοκληρώνοντας και τα 2 μέλη από α έως t παίρνουμε:

$$2\int_a^t \frac{y(s)\,y'(s)}{1+[y(s)]^2}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds \quad (a \text{ και } t \text{ ομόσημα})$$

Θέτουμε $\tau := [y(s)]^2$ και έχουμε ($d\tau = 2\,y(s)\,y'(s)\,ds$)

$$\underbrace{\cancel{2}\int_{[y(a)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\,d\tau}_{=\,\log[1+[y(t)]^2] - \log[1+[y(a)]^2]} = \log|t| - \log|a|$$

$$\log[1+[y(t)]^2] - \log|t| = \underbrace{\log[1+[y(a)]^2] - \log|a|}_{=\,\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log\frac{1+[y(t)]^2}{|t|} = \log|c|$$

$$\Rightarrow \frac{1+[y(t)]^2}{|t|} = |c| \Rightarrow [y(t)]^2 = \underbrace{|ct| - 1}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{\underbrace{|ct| - 1}_{\geq 0}}$$

Άσκηση 1.7

$$y'(t) = \frac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$$

$[y(t)]^3 - y(t) \neq 0 \Leftrightarrow y(t)\left[[y(t)]^2 - 1\right] \neq 0 \Leftrightarrow y(t) \neq 0,$
$y(t) \neq \pm 1$

• Η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$\left\{[y(t)]^3 - y(t)\right\} y'(t) = 2t-1$$

που είναι Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών.

Άρα, $\displaystyle\int_a^t \left\{[y(s)]^3 - y(s)\right\} y'(s)\,ds = \int_a^t (2s-1)\,ds$

Θέτουμε $\tau := y(s)$ και έχουμε

$$\int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3 - \tau)\,d\tau = \int_a^t (2s-1)\,ds \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}\left\{[y(t)]^4 - [y(a)]^4\right\} - \frac{1}{2}\left\{[y(t)]^2 - [y(a)]^2\right\} = (t^2 - a^2) - (t-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = \underbrace{\boxed{\frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(a)]^2 + a - a^2}}_{=c} + t^2 - t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = t^2 - t + c \quad, \text{με } c \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 1.8.

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\,y(t)}$$

Επεξήγηση!

$M(t,y) = 3y^2 + t^2$ $\big(M(\lambda t, \lambda y) = 3\lambda^2 y^2 + \lambda^2 t^2 = \lambda^2 M(t,y)$
ομογενής συνάρτηση 2ου βαθμού$\big)$

$N(t,y) = 2ty$ $\quad \big(N(\lambda t, \lambda y) = \lambda^2\, 2ty = \lambda^2 N(t,y)\big)$

(α) Γενική λύση (σε πεπλεγμένη μορφή)

Θέτουμε $u(t) := \dfrac{y(t)}{t}$ και έχουμε $y(t) = t \cdot u(t)$

Άρα, $y'(t) = u(t) + t\,u'(t)$. Αντικαθιστούμε στην αρχική Δ.Ε. και παίρνουμε

$$u(t) + t\,u'(t) = \frac{3t^2[u(t)]^2 + t^2}{2t^2 u(t)} = \frac{3[u(t)]^2 + 1}{2u(t)} =$$

$$= \frac{3}{2} u(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{u(t)}$$

$$\Rightarrow t\,u'(t) = \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{u(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{2u'(t)}{u(t) + \frac{1}{u(t)}} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \frac{2\,u(t)\,u'(t)}{[u(t)]^2 + 1} = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \int_a^t \frac{2u(s)\,u'(s)}{[u(s)]^2 + 1}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

Με $\tau := [u(s)]^2$ έχουμε:

$$\int_{[u(a)]^2}^{[u(t)]^2} \frac{1}{\tau+1}\, d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{[u(t)]^2+1\} - \log\{[u(a)]^2+1\} = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{[u(t)]^2+1\} = \log|t| + \underbrace{\log\{[u(a)]^2+1\} - \log|a|}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow [u(t)]^2 + 1 = |ct|$$
$$= ct \quad \text{με } ct > 0$$

$$[u(t)]^2 = \underbrace{ct-1}_{\geq 0} \qquad [y(t)]^2 = t^2(\underbrace{ct-1}_{\geq 0})$$

$$u(t) = \pm\sqrt{\underbrace{ct-1}_{\geq 0}}$$

(ε) Προσδιορισμός της λύσης για αρχική συνθήκη $y(1)=1$ και του μέγιστου διαστήματος στο οποίο ορίζεται

Έχουμε. $1^2 = 1^2(c\,1-1) \rightsquigarrow \boxed{c=2}$

Άρα, $[y(t)]^2 = t^2(\underbrace{2t-1}_{\geq 0})$ $\boxed{t \geq 1/2}$

$\Rightarrow y(t) = \pm t\sqrt{2t-1}$ ▷ Το − απορρίπτεται, γιατί δίνει $y(1)=-1$, οπότε η ζητούμενη λύση είναι $y(t) = +t\sqrt{2t-1}$

για $t=\frac{1}{2}$ η y μηδενίζεται στο $I=(\frac{1}{2},\infty)$

Άσκηση 1.9.

$$y'(t) = -\frac{2t+y(t)}{t+2y(t)}$$

(Η Δ.Ε είναι και ομογενής και πλήρης)

Λύση:

$M(t,y)=2t+y$

$N(t,y)=t+2y$

Προφανώς, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$ $(=1)$

οπότε η Δ.Ε. είναι πλήρης.

Ζητείται μια συνάρτηση $f=f(t,y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial f}{\partial t}=M \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=N} \ (1)$$

σταθερά

Έχουμε, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=2t+y \Rightarrow \boxed{f(t,y)=t^2+yt+g(y)}$

με αυθαίρετη ομαλή συνάρτηση g

Επομένως, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=t+g'(y)$ (2)

Από τις ① και ② προκύπτει: $t + g'(y) = \underbrace{N(t,y)}_{t+2y}$

οπότε παίρνουμε $g'(y) = 2y$, δηλαδή $g(y) = y^2 + c$

Επομένως, μια f που ικανοποιεί τις $\frac{\partial f}{\partial t} = M$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = N$,

είναι η $f(t,y) = t^2 + yt + y^2$

▸ Σύμφωνα με αυτά που είδαμε στη θεωρία, οι λύσεις $y(t)$ της Δ.Ε. δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση $f(t, y(t)) = c$, δηλαδή

$$t^2 + t\,y(t) + [y(t)]^2 = c \quad , \text{με } c \in \mathbb{R}$$

Επαλήθευση!

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 + t y(t) + [y(t)]^2 \right) = 0 \Rightarrow 2t + y(t) + t y'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$