ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

15/12/2015

Άσκηση 4.1

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

$b_2 = 1$

$b_1 = b_0 = 0$

Προσδιορισμός των a_2, a_1, a_0, έτσι ώστε $p=2$

Λύση: $p \geq 2 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} & a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ & a_1 + 2a_2 - 1 = 0 \\ & \frac{1}{2!}(a_1 + 2^2 a_2) - \frac{1}{1!} 2^{2-1} \underset{\overset{\uparrow}{b_2}}{1} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 &= 1 \\ a_1 + 4a_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \dots \left\{\begin{aligned} a_2 &= 3/2 \\ a_1 &= -2 \\ a_0 &= 1/2 \end{aligned}\right.$$

Διβηματική μέθοδος αναδρομικών διαφορών.

Ισχύει $p \leq 2$;

$p \leq 2 \Leftrightarrow C_3 = 0$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(a_1 + 2^3 a_2) - \frac{1}{2!} 2^2 \cdot 1 = \dots = -\frac{1}{3} \neq 0$$

Συμπέρασμα: $p = 2$

Άσκηση 12

ΝΔΟ: $c_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$

$j \geq 2$

Απόδειξη:

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)], \quad t \in [a, b-kh]$$

$$= c_0 y(t) + c_1 y'(t) h + c_2 h^2 y''(t) + \dots$$

Υποθέτουμε ότι η y είναι $\tilde{p}+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και αναπτύσσουμε κατά Taylor ως προς το σημείο t, οπότε παίρνουμε:

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t)] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t) + a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t)] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)}_{c_0} y(t) + \sum_{j=0}^{k} [a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h b_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!} y^{(v)}(t)] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= c_0 y(t) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v [\sum_{j=0}^{k} \frac{j^v}{v!} a_j - \sum_{j=0}^{k} \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} b_j] y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= c_0 y(t) + \underbrace{h [\sum_{j=1}^{k} j a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j]}_{c_1} y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v [\sum_{j=1}^{k} \frac{j^v}{v!} a_j - \sum_{j=1}^{k} \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} b_j] y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= c_0 y(t) + c_1 h y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} \underbrace{[\frac{1}{v!} \sum_{j=1}^{k} j^v a_j - \frac{1}{(v-1)!} \sum_{j=1}^{k} j^{v-1} b_j]}_{c_v} h^v y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

Άσκηση 4.15

$a_3 = 1,\ a_2 = -\frac{11}{6},\ a_1 = 1,\ a_0 = -\frac{1}{6}$

$b_3 = \frac{1}{12},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_0 = \frac{7}{12}$

Είναι ευσταθής και γιατί;

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\rho(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$$

$$= (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + 1 - \frac{11}{6} + z - \frac{1}{6}$$

$$= (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + z - 1$$

$$= (z-1)(z^2 + z + 1) - \frac{11}{6}(z-1)(z+1) + (z-1)$$

$$\Rightarrow \rho(z) = (z-1)\left[z^2 + z + 1 - \frac{11}{6}(z+1) + 1\right]$$

$$= (z-1)\left(z^2 - \frac{5}{6} z + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$$

Ρίζες: $z_1 = 1,\ z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

Προφανώς, ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

Άσκηση 4.16
Είναι η μέθοδος της προηγούμενης Άσκησης συνεπής και γιατί;

Λύση:
μέθοδος συνεπής $\Leftrightarrow p \geq 1 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = 0$

- $C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \rho(1) = 0$
- $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$

$\sigma(z) = b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$

$\rho'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3} z + 1 \Rightarrow$
$\rho'(1) = 3 - \frac{11}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

$\sigma(z) = \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{7}{12}$

$\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Άρα, $C_1 = 0 \rightsquigarrow$ μέθοδος συνεπής.

Άσκηση 4.21
$\alpha_k, \dots, \alpha_0$
$b_k, \dots, b_0$

$\left.\begin{array}{l}\text{μέθοδος ευσταθής} \\ \text{-''- συνεπής}\end{array}\right\} \Rightarrow b_k + \dots + b_0 \neq 0$

Απόδειξη
μέθοδος συνεπής: $\rho(1) = 0$
$\rho'(1) = \sigma(1)$

Αν $\sigma_k + \dots + \sigma_0 = 0$, τότε $\rho'(1) = 0$
Αν το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του ρ, δηλ. δεν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών

Συμπέρασμα: η μέθοδος είναι ασταθής. Άτοπο!

Επομένως, όπως $\sigma_k + \dots + \sigma_0 \neq 0$.

Άσκηση 4.22

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\forall t \in [a,b], \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \le 0$

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = hf(t^{n+2}, y^{n+2}), & n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

ΝΔΟ: προσεγγίσεις καλά ορισμένες, χωρίς περιορισμό στο h.

Απόδειξη: Θεωρούμε μία συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$g(x) = \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - hf(t^{n+2}, x)$

Κάθε ρίζα της g αποτελεί προσέγγιση y^{n+2} και αντίστροφα. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα

▷ Μοναδικότητα: Η g είναι γνήσια αύξουσα, συνεπώς έχει το πολύ μία ρίζα

▷ Ύπαρξη: Η g είναι συνεχής.

- Για $x \leq 0$ έχουμε $f(t^{n+2}, x) \geq f(t^{n+2}, 0)$
  οπότε $-hf(t^{n+2}, x) \leq -hf(t^{n+2}, 0)$

Άρα, $g(x) \leq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2}, 0) \to -\infty, \; x \to -\infty$

οπότε η g παίρνει και αρνητικές τιμές

- Για $x \geq 0$, έχουμε $f(t^{n+2}, x) \leq f(t^{n+2}, 0) \Rightarrow -hf(t^{n+2}, x) \geq -hf(t^{n+2}, 0)$

Άρα, $g(x) \geq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2}, 0) \to \infty$ για $x \to \infty$.

οπότε η g παίρνει και θετικές τιμές

Άρα, η g είναι συνεχής, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, έπεται ότι η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα

Επομένως, έχει ακριβώς μία ρίζα.