ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

19/11/2015

Άσκηση 2.9

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0 \end{cases}$$

(α) $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1, \ t \geq 0$

Έχουμε $\left((x(t))^2 + (y(t))^2\right)' = \left((x(t))^2\right)' + \left((y(t))^2\right)' =$

$$= 2x(t)\underbrace{x'(t)}_{=-y(t)} + 2y(t)\underbrace{y'(t)}_{=x(t)}$$

$$= -2x(t)y(t) + 2x(t)y(t)$$

$$= 0$$

Συμπέρασμα:

- $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \text{σταθ.}, \ t \geq 0.$

Επομένως, $(x(t))^2 + (y(t))^2 = (x(0))^2 + (y(0))^2 = 1, \ t \geq 0.$

▷ Αν θέλω μπορώ να αντικαταστήσω: $x(t) = \cos t$
$y(t) = \sin t$

(β) Μέθοδος του Euler

$h > 0$

(x^n, y^n)

Ν.Δ.Ο. $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty, \ n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - h y^n \\ y^{n+1} &= y^n + h x^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - h y^n)^2 + (y^n + h x^n)^2$$

$$= (x^n)^2 - \cancel{2h x^n y^n} + h^2 (y^n)^2 + (y^n)^2 + \cancel{2h x^n y^n} + h^2 (x^n)^2$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (1+h^2)\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$$

$\Rightarrow$ Επαγωγικά: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n \left[\underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{1}\right]$

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n \to \infty, \; n \to \infty.$$

(γ) Μέθοδος του τραπεζίου.

Ν.Δ.Ο. $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -y^n & -y^{n+1} \\ x^n & +x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n &= \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση επί $x^{n+1} + x^n$ και τη δεύτερη επί $y^{n+1} + y^n$ και προσθέτουμε, οπότε παίρνουμε

$$(x^{n+1} - x^n)(x^{n+1} + x^n) + (y^{n+1} - y^n)(y^{n+1} + y^n) = 0$$

ή $(x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = 0 \Rightarrow$

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \text{σταθ.}$$

Ιδιαίτερα: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (\overset{1}{x^0})^2 + (\overset{0}{y^0})^2 = 1$

(δ) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

Ν.Δ.Ο. $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to 0, \; n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{n+1} = x^n - h y^{n+1} \\ y^{n+1} = y^n + h x^{n+1} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^{n+1} + h y^{n+1} = x^n \\ y^{n+1} - h x^{n+1} = y^n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1} + h y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + 2h x^{n+1} y^{n+1} + h^2 (y^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 - 2h x^{n+1} y^{n+1} + h^2 (x^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

$$\Rightarrow (1+h^2)\left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right] = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \frac{1}{1+h^2}\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right] \quad \text{επαγωγικά}$$

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n} \to 0, \quad n \to \infty$$

Άσκηση 2.11

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Μέθοδος του Euler Ν.Δ.Ο. $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$ μη θετικά ορισμένος
(Άσκηση 127) ισοσελίδα

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h \underbrace{\begin{pmatrix} -2x^{n+1} + y^{n+1} \\ 2x^{n+1} - 2y^{n+1} \end{pmatrix}}_{M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}}$$

• Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με

$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ και έχουμε $\left(\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) + h \underbrace{\left(M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \underset{C-S}{\leq} \left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]^{1/2} \left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left((x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \right)^{1/2} \leq \left((x^n)^2 + (y^n)^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$$

26/11/2015

Άσκηση 2.19

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t\geq 0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

$M\in\mathbb{R}^{m,m}$ μη θετικά ορισμένος, δηλαδή $\forall\, x\in\mathbb{R}^m$ $(Mx,x)\leq 0$.

- ▹ Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.
- ▹ Μέθοδος του μέσου (= μέθοδος του τραπεζίου)

Ν.Δ.Ο. $\|y^{n+1}\|\leq\|y^n\|$ και για τις 2 μεθόδους

Απόδειξη:

$$y^{n+1} = y^n + hMy^{n+1} \Rightarrow (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n, y^{n+1}) + h\underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1}) \underset{C\text{-}S}{\leq} \|y^n\|\,\|y^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^{\cancel{2}} \leq \|y^n\|\,\cancel{\|y^{n+1}\|} \Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$$

$$y^{n+1} = y^n + hM\frac{y^n+y^{n+1}}{2} \Rightarrow \left(y^{n+1}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right) = \left(y^n, \frac{1}{2}(y^n, y^{n+1})\right) + $$

$$+\,h\underbrace{\left(M\frac{y^n+y^{n+1}}{2}, \frac{y^n+y^{n+1}}{2}\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}(y^{n+1}, y^n)} + \frac{1}{2}\|y^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|y^n\|^2 + \cancel{\frac{1}{2}(y^n, y^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^{\cancel{2}} \leq \|y^n\|^{\cancel{2}} \Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$$

Άσκηση 2.13 ~~(...)~~

$$\begin{cases} y'(t) = My(t) & , t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικός $\sim \forall x \in \mathbb{R}^m \ (Mx, x) \leq 0$

Μέθοδος του μέσου (= μέθοδος του τραπεζίου)

N.Δ.Ο. $\|y^n\| = \|y^0\|$, $n \geq 0$

$$y^{n+1} = y^n + hM\frac{y^n + y^{n+1}}{2} \Rightarrow (y^{n+1}, y^n + y^{n+1}) = (y^n, y^n + y^{n+1}) + \frac{h}{2}\underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), y^n + y^{n+1})}_{=0}$$

$$\Rightarrow \cancel{(y^{n+1}, y^n)} + \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 + \cancel{(y^n, y^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| = \|y^n\|$$

με τετριμμένη επαγωγή $\Rightarrow \|y^n\| = \|y^0\|$

Άσκηση 2.15

$$\begin{cases} y' = -e^y & , t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

N.Δ.Ο οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Απόδειξη:

$f(t,y) = -e^y$

Έχουμε $f_y(t,y) = -e^y \leq 0$, συνεπώς η f είναι φθίνουσα συνάρτηση του y, δηλ. ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

Όπως είδαμε στη θεωρία, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Άσκηση 2.17

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.
~ Μέθοδος του μέσου.
Ν.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

Απόδειξη:

$$(*) \quad y^{n+1} = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$$

Το y^n είναι δεδομένο και θέλω ν.δ.ο. το y^{n+1} είναι καλά ορισμένο.

Θέσαμε $x^* = \frac{y^n + y^{n+1}}{2}$ και αρκεί να αποδείξαμε ότι το x^* είναι καλά ορισμένο (οπότε και το $y^{n+1} = 2x^* - y^n$ θα είναι επίσης καλά ορισμένο)

Γράφαμε την (*) στη μορφή:

$$2x^* - y^n = y^n + hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, x^*\right)$$

• Ορίζαμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 2y^n - hf\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}, x\right)$
Θέλαμε να αποδείξαμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει ακριβώς μία ρίζα

▹ Μοναδικότητα ρίζας
Η g είναι γν. αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα

▹ Ύπαρξη ρίζας
Η g είναι συνεχής
Όπως ακριβώς στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, διαπιστώνουμε ότι $g(x) \to \infty$ για $x \to \infty$
και $g(x) \to -\infty$ για $x \to -\infty$.

Ιδιαίτερα, η y λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, λαμβάνει και την τιμή 0, δηλ. έχει ρίζα.

Άσκηση 218

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Μέθοδος του τραπεζίου.

N.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Απόδειξη:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(y^{n+1})\right]$$

$$g: x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η g είναι γν. αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα
- Αποδεικνύεται ότι $\left.\begin{array}{l} g(x) \to \infty, \ x \to \infty \\ g(x) \to -\infty, \ x \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$ η g έχει μία ρίζα

Άσκηση 219

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \varphi(t), & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Μέθοδος του τραπεζίου

N.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Απόδειξη:

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(t,y) = -y^3 + \varphi(t)$

▷ Η f είναι φθίνουσα συνάρτηση του y και η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως προηγουμένως.