ΘΈΜΑ / SUBJECT

Υπολογιστικά Μαθηματικά.

Σημειώσεις ~ Ασκήσεις.

Χειμερινό Εξάμηνο.

2014 ~ 2015.

$\boxed{09.10.14}$

$\Downarrow$

$y' = p(t) \cdot y + q(t)$

$p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχείς.

Στη Θεωρία:

$y'(t) = q(t) \rightsquigarrow y'(t) - p(t) \cdot y(t) = q(t)$

- Άσκηση 1.1:

Ν.δ.ο οι λύσεις της εξίσωσης $y'(t) = p(t) \cdot y(t)$ $(*)$
είναι της μορφής: $y(t) = C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ $(+)$
με C σταθερά και $t \in [a,b]$.

(α) πρώτον θεωρώ $y(t) = C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$ $\Rightarrow$

$$y'(t) = \underbrace{C \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}}_{\substack{\parallel \\ y(t)}} \cdot \underbrace{\left(\int_a^t p(s)\,ds\right)'}_{= p(t)} \Rightarrow y'(t) = p(t) \cdot y(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

(β) αντίστροφα: καθε λύση y της $(*)$ είναι της μορφής $(+)$.

Έστω y λύση της $(*)$. Θεωρούμαι την συνάρτηση

$u(t) := y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}$, $\forall t \in [a,b]$.

Έχουμε:

$$u'(t) = y'(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} + y(t) \cdot \left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)'$$
$$= y'(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} + y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} \cdot (-p(t))$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)ds} \cdot \Big[\underbrace{y'(t) - y(t)\cdot p(t)}_{=0 \text{ (γιατί ικανοποιεί την Δ.Ε.)}} \Big] = 0.$$

$\Rightarrow u(t) = C_1 \quad \forall t \in [a,b]$.

Άρα:

$$C_1 = y(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}.$$

- Άσκηση 1.2: (η μέθοδος της μεταβολής των σταθερών).

Ν.δ.ο οι λύσεις της

$(**)$ $y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)$ είναι της μορφής:

$(++)$ $y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \cdot \Big[C_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \Big]$.

Λύση:

1. Με παραγώγιση διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση y της $(++)$ αποτελεί λύση της $(**)$.

2. Θα αποδείξουμε ότι κάθε λύση $\tilde{y}$ της $(**)$ είναι της μορφής $(++)$.
Έστω $\tilde{y}$ μια τυχούσα λύση της $(**)$ και y μια λύση της $(**)$ της μορφής $(++)$. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $\tilde{y} - y$. Τότε έχουμε:

$$\tilde{y}'(t) - y'(t) = p(t)\cdot \tilde{y}(t) + \cancel{q(t)} - \Big[p(t)\cdot y(t) + \cancel{q(t)}\Big]$$

$= p(t)\cdot(\tilde{y}(t) - y(t))$, δηλαδή η $\tilde{y} - y$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

Επομένως σύμφωνα με την άσκηση 1.1 έχουμε ότι:

$$\tilde{y}(t) - y(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}, \text{ οπότε:}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) + C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}, \text{ συμπέρασμα: και η}$$

$\tilde{y}$ είναι της μορφής (++).

3. Πώς οδηγούμαστε στη (++). ;

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λύσεις της μορφής:

$$y(t) = C_1(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} \qquad (+++)$$

με κατάλληλη συνάρτηση $C_1(t)$.

Έχουμε: Αν η συνάρτηση (+++) είναι λύση της (**), τότε: $p(t)\cdot y(t) + q(t) = y'(t) =$

$$= C_1'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + \underbrace{\left(C_1(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}\right)}_{=y(t)} \cdot p(t) =$$

$$= C_1'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + p(t)\cdot y(t)$$

Άρα:

$$C_1'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t)$$

$$\Rightarrow C_1'(s) = q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(t) - C_0 = \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(t) = C_0 + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την $C_1(t)$ στην (+++) οδηγούμαστε στην (++).

• **Άσκηση 1.4:** $\boxed{16.10.14}$

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \leq t \leq 2. \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2 (τοπική συνθήκη Lipschitz)

$c > 0$.

Εφαρμόζω το Θεώρημα στο $[1-c, 1+c]$.

$f(t,y) = y^2$

$$A = \max_{\substack{0 \leq t \leq 2 \\ 1-c \leq y \leq 1+c}} f(t,y) = (1+c)^2$$

(παιρνω την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή απο τα άκρα).

$$[a, b'] \text{ με } b' := \min\left(2, \frac{c}{A}\right) =$$

$$= \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right) = \frac{c}{(1+c)^2} = \frac{c}{1+2c+c^2} =$$

$$= \frac{1}{2+(c+1/c)} \quad (*)$$

Το κλάσμα παίρνει τη μέγιστη τιμή του αν το $c + 1/c$ πάρει την ελάχιστη τιμή του.

⇝ Ισχυρισμός: $c + \frac{1}{c} \geq 2$ — για $c=1$ ισχύει η ισότητα.

$$c + \frac{1}{c} \geq 2 \iff c^2 - 2c + 1 \geq 0 \Rightarrow (c-1)^2 \geq 0 \ \checkmark$$

Άρα η μέγιστη τιμή του b' είναι: $b' = 1/4$.
(για $c=1$)
στην $(*)$.

- **Άσκηση 1.8:**

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής.
$\|\cdot\|$ ευκλίδεια νόρμα.

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$
$\| f(t,x) - f(t,\tilde{x}) \| \leq L \cdot \| x - \tilde{x} \|$. (*)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \ , & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \ , & a \leq t \leq b. \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

C (αν δεν έχω ευκλ. νόρμα).

N.δ.ο: $\| y(t) - z(t) \| \leq C e^{L(t-a)} \cdot \| y_0 - z_0 \|$.

$y'(t) - z'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big(y'(t) - z'(t), \ y(t) - z(t) \Big) = \Big(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \ \overbrace{y(t) - z(t)}^{=\varepsilon(t)} \Big) =$$

$$\Rightarrow \big(\varepsilon'(t), \varepsilon(t) \big)$$

Άρα: $\underbrace{\big(\varepsilon'(t), \varepsilon(t) \big)}_{= \frac{1}{2} \cdot \left(\| \varepsilon(t) \|^2 \right)'} = \big(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t) \big)$

$$\leq \| f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \| \cdot \| \varepsilon(t) \|$$ (ανισότητα C.S.)

(*)

$$\leq L \cdot \| \overbrace{y(t) - z(t)}^{=\varepsilon(t)} \| \cdot \| \varepsilon(t) \|$$

Άρα: $\frac{1}{2} \cdot \left(\| \varepsilon(t) \|^2 \right)' \leq L \cdot \underbrace{\| \varepsilon(t) \|^2}_{= \varphi(t).} \quad \forall t \in [a,b]$.

$\Rightarrow \varphi'(t) - 2 \cdot L \cdot \varphi(t) \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(e^{-2Lt} \cdot \varphi(t) \right)' \leq 0 \Rightarrow e^{-2Lt} \cdot \varphi(t) \leq e^{-2La} \cdot \varphi(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2L(t-a)} \cdot \varphi(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^{\cancel{2}} \leq e^{\cancel{2}L(t-a)} \cdot \|\varepsilon(a)\|^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y(t)-z(t)\| \leq e^{L(t-a)} \cdot \|y_0 - Z_0\| \Rightarrow$$

$$\left(\Rightarrow \max_{a\leq t\leq b} \|y(t)-z(t)\| \leq e^{L(b-a)} \cdot \|y_0 - Z_0\|\right)$$

• Άσκηση 1.9 :

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , \quad a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z) & , \quad a \leq t \leq b. \\ z(a) = Z_0 \end{cases}$$

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$\forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\left[f(t,y_1) - f(t,y_2)\right] \cdot (y_1 - y_2) \leq v \cdot (y_1 - y_2)^2$$

N.δ.ο : $|y(t) - z(t)| \leq e^{v(t-a)} \cdot |y_0 - Z_0|$

$\rightsquigarrow$ Απόδειξη: $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ τότε :

$$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon'(t)\cdot\varepsilon(t)}_{\frac{1}{2}\cdot(\varepsilon(t)^2)'} = \underbrace{\left[f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right] \cdot \overbrace{(y(t) - z(t))}^{=\varepsilon(t).}}_{\leq v\cdot\underbrace{[y(t)-z(t)]^2}_{=(\varepsilon(t))^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(\varepsilon(t)^2)' \leq v \cdot (\varepsilon(t))^2 \Rightarrow \ldots.$$

$$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq e^{2v(t-\alpha)} \cdot (\varepsilon(\alpha))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{v(t-\alpha)} \cdot |\varepsilon(\alpha)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq e^{v(t-\alpha)} \cdot |y_0 - z_0|.$$

- Άσκηση 1.12: (Ανισότητα του Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή).

$\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $a, b \in \mathbb{R}$ με $b \geq 0$.

Αν $\varphi(t) \leq a + b \cdot \int_0^t \varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]$.

Ν.δ.ο: $\varphi(t) \leq a \cdot e^{bt} \quad \forall t \in [0,T]$.

Θεωρώ $\psi(t) = (a+\varepsilon) \cdot e^{bt} \quad \forall t \in [0,T]$ με $\varepsilon > 0$.

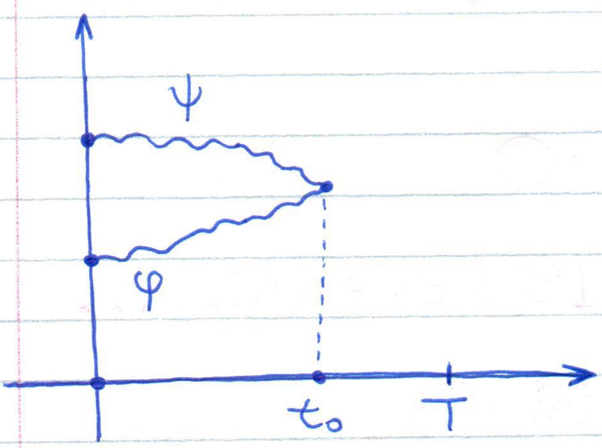
Τότε:

$$\psi(t) = a + \varepsilon + b \cdot \int_0^t \psi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]. \quad (*)$$

⇝ Απόδειξη: Υποθέτουμε προς το παρόν ότι ισχύει η $(*)$.

Ισχυρισμός: $\forall t \in [0,T] \quad \varphi(t) < \psi(t)$.

⇝ Απόδειξη: για $t=0$ έχουμε $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) \leq a \\ \psi(0) = a + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(0) < \psi(0)$.



Έστω t_0 ο μικρότερος θετικός αριθμός τ.ω:

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0) \text{ και } \varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [0, t_0).$$

Τότε θα έχουμε: $\varphi(t_0) \leq a + b \cdot \int_0^{t_0} \varphi(s)\,ds <$

$$< a + b \cdot \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds < \underbrace{a + \varepsilon + b \cdot \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds}_{= \psi(t_0)}$$

Άρα: τέτοιο t_0 δεν υπάρχει συνεπώς ισχύει:

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

- $\varphi(t) < \psi(t) \Rightarrow \varphi(t) < (a + \varepsilon) \cdot e^{bt} \quad \forall \varepsilon > 0.$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq a \cdot e^{bt} \quad \forall t \in [0, T].$$

$a \leq b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$

$\Rightarrow a < b$

→ Απόδειξη: (της ⊛).

$$a + \varepsilon + b \cdot \int_0^t \psi(s)\,ds = a + \varepsilon + b \cdot (a + \varepsilon) \cdot \int_0^t e^{bs}\,ds$$

$$= a + \varepsilon + (a + \varepsilon) \cdot \int_0^t e^{bs} \cdot b\,ds =$$

$$= \cancel{a + \varepsilon} + (a + \varepsilon) \cdot (e^{bt} - \cancel{1}) = (a + \varepsilon) \cdot e^{bt} = \psi(t).$$

ΤΕΛΟΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

→ Ασκήσεις (απο τις σημειώσεις στην σελίδα) : ⇐ $\boxed{23.10.14}$

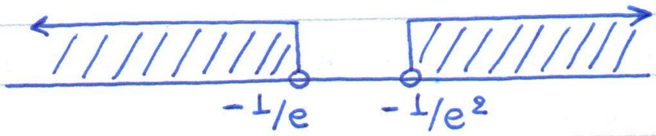
• Άσκηση 1.3 :

$$(+)\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 , & 1 \leq t \leq 2. \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. είναι Bernoulli και έχει λύσεις την:
$y(t)=0$ και :

(✱) $y(t) = \dfrac{1}{c\cdot e^t + 1}$ με $c \in \mathbb{R}$. (παράδειγμα 1.3 απο σημειώσεις.)

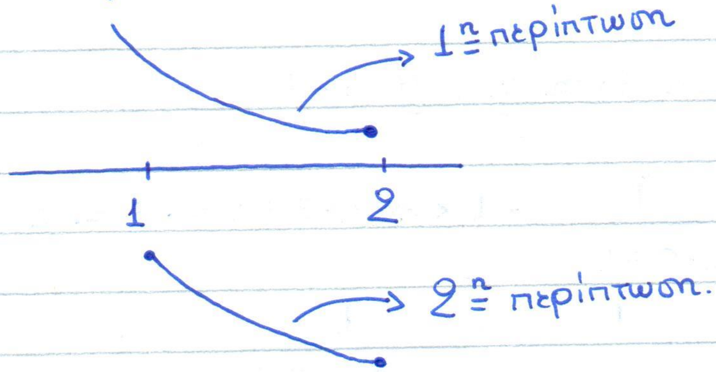
(α) Οι συναρτήσεις (✱) αποτελούν λύσεις της Δ.Ε. στο $[1, 2]$, αν και μόνο αν είτε $c < -1/e$ κ' $c > -1/e^2$.



Απόδειξη: $\varphi(t) = c\cdot e^t + 1$, $t \in [1,2]$.
Τότε οι (✱) είναι λύσεις, ανν $\varphi(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [1,2]$.

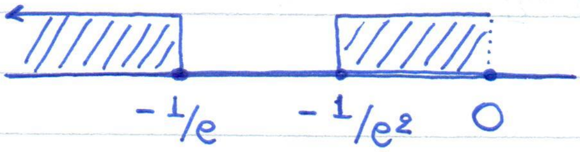
1η Περίπτωση: $c \geq 0$, τότε η φ είναι θετική και αύξουσα, οπότε η (✱) μας δίνει λύσεις.

2η Περίπτωση: $c < 0$, τότε η φ είναι φθίνουσα
Άρα η φ δεν μηδενίζεται στο $[1, 2]$ ανν είτε $\varphi(2) > 0$ είτε $\varphi(1) < 0$



- $\varphi(2) > 0 \iff c \cdot e^2 + 1 > 0 \iff c > -1/e^2$

- $\varphi(1) < 0 \iff c \cdot e + 1 < 0. \iff c < -1/e.$



(β) $y_0 = \dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$ το πρόβλημα $\overset{(+)}{}$ δεν έχει λύση.

Ακριβέστερα, $y(t) \to \infty$ για $t \nearrow 3/2$.

Απόδειξη: Προφανώς η $y(t)=0$ δεν είναι λύση γιατί δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.

Η $y(t)$ που δίνεται στην (*) ικανοποιεί την αρχική τιμή, αν:

$$y(1) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \iff \frac{1}{c\cdot e+1} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \iff$$

$$c\cdot e\cdot\sqrt{e} + \cancel{\sqrt{e}} = \cancel{\sqrt{e}} - 1 \iff c = -\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}$$

Επομένως: $y(t) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e\cdot\sqrt{e}}\cdot e^t} = \dfrac{1}{1-e^{t-3/2}} \to \infty$

καθώς $t \nearrow 3/2$ (αυξάνει).

(γ) Ποια είναι η λύση για $y_0 = -1$

$$y(1) = -1 \iff \frac{1}{c\cdot e+1} = -1 \iff c\cdot e+1 = -1 \Rightarrow c = \frac{-2}{e}$$

Άρα: $y(t) = \dfrac{1}{1-\frac{2}{e}\cdot e^t} = \dfrac{1}{1-2\cdot e^{t-1}}$

έχουμε: $e^{t-1} \geq 1$ στο $[1,2]$.

$\Leftrightarrow -2\cdot e^{t-1} \leq -2 \Leftrightarrow 1-2\cdot e^{t-1} \leq -1$.

$\Leftrightarrow 1-2\cdot e^{t-1} \neq 0$ για $t\in[1,2]$.

- Άσκηση 1.4:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)-(y(t))^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Να προσδιορίσουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα I (με $0\in I$) στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.

Λύση: Δ.Ε. Bernoulli με $\sigma=2$.

Η $y(t)=0$ είναι λύση της Δ.Ε. αλλά δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.

Θέτουμε:

$$v(t) := [y(t)]^{1-\sigma} = \frac{1}{y(t)}$$

Έχουμε: $v'(t) = -\dfrac{1}{(y(t))^2}\cdot y'(t)$

$$-[y(t)]^2\cdot v'(t) = y(t)-(y(t))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -v'(t) = \underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{v(t)} - 1 \Leftrightarrow v'(t)+v(t) = 1. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^t\cdot v(t))' = e^t \Leftrightarrow e^t\cdot v(t) = e^t + c \Leftrightarrow v(t) = 1+c\cdot e^{-t}$$

Άρα:

$$y(t) = \frac{1}{1+c\cdot e^{-t}}$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$$y(0)=2 \iff \frac{1}{1+C_1}=2 \implies C_1=-1/2.$$

Άρα η λύση του Π.Α.Τ είναι η:

$$y(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}} \quad (**).$$

Τώρα: $1-\frac{1}{2}\cdot e^{-t}=0 \iff e^{-t}=2 \iff$

$-t=\log 2 \iff t=-\log 2.$

Επομένως, η $y(t)$ της (**) της Δ.Ε. στα διαστήματα:

$(-\infty,-\log 2)$ και $(-\log 2,\infty)$

Επειδή θέλουμε το 0 να ανήκει στο διάστημα που η y είναι λύση της Δ.Ε. συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο διάστημα I είναι: $I=(-\log 2,\infty)$.

$\boxed{30.10.14}$ ⇒ • Άσκηση 1.5: $\begin{cases} y'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{y(t)}{t}-[y(t)]^2, & 1\leq t\leq 2. \\ y(1)=y_0 \end{cases}$

Η Δ.Ε. είναι εξίσωση του Ricatti.

Η γενική λύση της είναι:

$$(*) \quad y(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{Ct^3-\frac{t}{2}} \quad \text{με } c\in\mathbb{R} \quad (\text{παράδειγμα } 1.4)$$

(α) $y_0=-1$ Ν.δ.ο το πρόβλ. αρχ. τιμών δεν έχει λύση.

Ακριβέστερα: $y(t)\to-\infty$ καθώς $t\nearrow\sqrt{2}$.

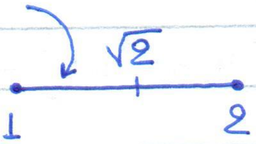
Σύμφωνα με την (*) έχουμε:

$$y(1) = -1 \iff 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = -1 \Rightarrow c = 1/4$$

Άρα, σύμφωνα με την (*) η λύση είναι:

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t\underbrace{(t^2-2)}} \longrightarrow -\infty \quad t \uparrow \sqrt{2}.$$

λύση μόνο εδώ.



$t^2 - 2 = 0 \iff t = \cancel{\pm}\sqrt{2}$

Η μόνη λύση y είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1, \sqrt{2})$ και τείνει στο $-\infty$ καθώς το t αυξάνει προς το $\sqrt{2}$. Άρα δεν υπάρχει λύση σε όλο το $[1,2]$.

(β) $y_0 = 3$ ποια είναι η λύση;

$$y(1) = 3 \iff 1 + \frac{1}{c - 1/2} = 3 \iff \dots \Rightarrow c = 1.$$

Άρα:

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{t}{2}\underbrace{(2t^2-1)}_{\geq 1}}$$

• Άσκηση 1.6: $y'(t) = \dfrac{1+[y(t)]^2}{2ty(t)}$ λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

$$y'(t) = \frac{1+[y(t)]^2}{2ty(t)} \iff \frac{2 \cdot y(t) \cdot y'(t)}{1 + [y(t)]^2} = \frac{1}{t}$$

Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\frac{2y(s)y'(s)}{1+[y(s)]^2} = \frac{1}{s} \Rightarrow 2\cdot\int_a^t \frac{y(s)\cdot y'(s)}{1+[y(s)]^2}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

$$\tau := [y(s)]^2 \rightsquigarrow d\tau = 2y(s)\cdot y'(s)\,ds$$

$$\int_{(y(a))^2}^{(y(t))^2} \frac{1}{1+\tau}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\left[(y(t))^2+1\right] - \log\left[(y(a))^2+1\right] = \log|t| - \log|a|.$$

$$\Rightarrow \log\left\{(y(t))^2+1\right\} = \log|t| + \underbrace{\log\left\{[y(a)]^2+1\right\} - \log|a|}_{=\log|c|.}$$

$$\Rightarrow \log\left\{(y(t))^2+1\right\} = \log|c\cdot t| \iff$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2+1 = |c\cdot t| \Rightarrow (y(t))^2 = \underbrace{|c\cdot t|-1}_{\geq 0}$$

$$\iff y(t) = \pm\sqrt{|c\cdot t|-1}$$

- Άσκηση 1.7: $y'(t) = \dfrac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$

$$\left\{[y(t)]^3 - y(t)\right\}\cdot y'(t) = 2t-1$$

Δηλ.

$$\left\{[y(s)]^3 - y(s)\right\}\cdot y'(s) = 2s-1$$

$$\int_a^t \left\{[y(s)]^3 - y(s)\right\}\cdot y'(s)\,ds = \underbrace{\int_a^t (2s-1)\,ds}$$

$\tau := y(s)$

Άρα: $$\int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3-\tau)\,d\tau = (t^2-a^2)-(t-a).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\left\{[y(t)]^4-[y(a)]^4\right\}-\frac{1}{2}\cdot\left\{[y(t)]^2-[y(a)]^2\right\}=$$

$$=(t^2-t)-(a^2-a)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}\cdot[y(t)]^4-\frac{1}{2}\cdot[y(t)]^2=t^2-t+\underbrace{\frac{1}{4}\cdot[y(a)]^4-\frac{1}{2}\cdot[y(a)]^2-(a^2-a)}_{=c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot[y(t)]^4-\frac{1}{2}\cdot[y(t)]^2=t^2-t+c$$

Η λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε:

$[y(t)]^2-y(t)\neq 0$ δηλ. $y(t)\neq 0$ και $y(t)\neq \pm 1$ $\forall t$.

$\boxed{04.11.14}\Rightarrow$ • Άσκηση 1.8:

$$y'(t)=\frac{3\cdot[y(t)]^2+t^2}{2ty(t)} \quad \text{ομογενής.}$$

(α) Γενική λύση;

Θέτουμε $v(t):=\dfrac{y(t)}{t}$ και έχουμε

$y(t)=t\cdot v(t)\Rightarrow y'(t)=t\cdot v'(t)+v(t)$

οπότε:

$$t\cdot v'(t)+v(t)=\frac{3\cdot[\cancel{t}\cdot v(t)]^2+\cancel{t^2}}{2\cdot\cancel{t^2}\cdot v(t)}\Rightarrow t\cdot v'(t)+v(t)=\frac{3}{2}v(t)+\frac{1}{2v(t)}$$

$$\Rightarrow t\cdot v'(t)=\frac{1}{2}\cdot v(t)+\frac{1}{2v(t)}\Rightarrow \frac{v'(t)}{\frac{1}{2}v(t)+\frac{1}{2v(t)}}=\frac{1}{t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v'(t)}{\frac{[v(t)]^2+1}{2v(t)}}=\frac{1}{t}\Rightarrow \frac{2\cdot v(t)\cdot v'(t)}{(v(t))^2+1}=\frac{1}{t}. \quad (a,t \text{ ομόσημα})$$

Άρα: $$\frac{2\cdot v(s)\cdot v'(s)}{(v(s))^2+1}=\frac{1}{s}\Rightarrow \int_a^t \frac{2\cdot v(s)\cdot v'(s)}{(v(s))^2+1}\,ds=\int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

$\tau := [v(s)]^2$

$$\Rightarrow \int_{(v(a))^2}^{(v(t))^2} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{[v(t)]^2+1\} - \log\{[v(a)]^2+1\} = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{(v(t))^2+1\} = \log|t| + \underbrace{\log\{(v(a))^2+1\} - \log|a|}_{=\log|c|}.$$

$$\Rightarrow \log\{(v(t))^2+1\} = \log|c\cdot t| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v(t))^2+1 = c\cdot t \Rightarrow (v(t))^2 = \underbrace{c\cdot t - 1}_{\geq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y(t))^2}{t^2} = ct-1 \Rightarrow (y(t))^2 = t^2\cdot(ct-1) \quad (*)$$

(β) $y(1) = 1$

Τότε αντικαθιστώντας στην $(*)$ έχουμε:

$1 = c-1 \Rightarrow c = 2.$

Άρα:

$$(y(t))^2 = t^2\cdot\underbrace{(2t-1)}_{\geq 0} \quad \text{όταν } t \geq \frac{1}{2}.$$

$y(t) = \pm t\cdot\sqrt{2t-1}$

Με πρόσημο το πλήν παίρνουμε $y(1) = -1$ απορρίπτεται.

Άρα: $y(t) = t\cdot\sqrt{2t-1}$ $t \geq 1/2$.

• Άσκηση 1.9: $y'(t) = -\dfrac{2t+y(t)}{t+2y(t)}$ (πλήρης.)

$M(t,y) = 2t+y$

$N(t,y) = t+2y$

Προφανώς: $\underset{1}{\underset{\parallel}{\dfrac{\partial M}{\partial y}}} = \underset{1}{\underset{\parallel}{\dfrac{\partial N}{\partial t}}}$ οπότε η Δ.Ε. είναι πλήρης.

Ζητείται συνάρτηση f:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t + y \Rightarrow f(t,y) = t^2 + yt + g(y).$$

οπότε: $\dfrac{\partial f}{\partial y} = t + g'(y)$

Αλλά πρέπει να ισχύει: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t + 2y$

Οπότε: $g'(y) + \cancel{t} = \cancel{t} + 2y \Rightarrow g(y) = y^2$

$\rightsquigarrow$ Συμπέρασμα: $f(t,y) = t^2 + y \cdot t + y^2$

Επομένως οι λύσεις $y(t)$ δίνονται απο την σχέση $f(t, y(t)) = c$ με c σταθερά, δηλαδή:
$t^2 + y(t) \cdot t + [y(t)]^2 = c.$

$\rightsquigarrow$ Επαλήθευση: (αν θέλουμε το κάνουμε αυτό.)

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 + y(t) + [y(t)]^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2t + y(t) + t \cdot y'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t + 2y(t)\right) y'(t) = -2t - y(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}.$$

• Άσκηση 1.10: $\quad y'(t) = -\dfrac{t + [y(t)]^2}{t \cdot y(t)}$ ανάγεται σε πλήρη.

$M(t,y) = t + y^2$

$N(t,y) = t \cdot y$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) &= 2y \\ \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) &= y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Άρα όχι πλήρης.}$$

Τώρα:

$$\frac{1}{N(t,y)} \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) \right] = \ldots = \frac{y}{ty} = \frac{1}{t}.$$

ανεξάρτητο του y.

⤳ Συμπέρασμα: Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{N(t,y)} \cdot \left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) \right] dt} =$$

$$= e^{\int \frac{1}{t} dt} \underset{t>0}{\overset{\uparrow}{=}} e^{\log t} = t.$$

γράφουμε την αρχική Δ.Ε. στην μορφή:

$$y'(t) = -\frac{t^2 + t \cdot [y(t)]^2}{t^2 \cdot y(t)}$$, πολλαπλ. αριθμητή και παρανομαστή με $\mu(t) = t$.

$\tilde{M}(t,y) = t^2 + t \cdot y^2$

$\tilde{N}(t,y) = t^2 \cdot y$

πλήρης!

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(t,y) = 2ty = 2ty = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}(t,y)$$

Ζητείται f τ.ώ: $\frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{M}$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}$.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = t^2 + t \cdot y \Rightarrow f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \cdot y^2 + g(y).$$

Άρα: $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t^2 \cdot y + g'(y)$.

Επομένως, αφού θέλουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \tilde{N}(t,y) = t^2 \cdot y$$

Θα έχουμε: $\cancel{t^2 y} + g'(y) = \cancel{t^2 y}$ οπότε $g'(y)=0$

π.χ για $g(y)=0$.

~> Συμπέρασμα: $f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \cdot y^2$.

Οι λύσεις $y(t)$ της εξίσωσης δίνονται απο τις σχέσεις:

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \cdot [y(t)]^2 = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}.$$

~> Επαλήθευση:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \cdot [y(t)]^2\right) = 0 \iff$$

$$t^2 + t \cdot [y(t)]^2 + \frac{t^2}{2} \cdot 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0 \iff$$

$t \neq 0$

$$\iff t + [y(t)]^2 + t \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0 \iff$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{t \cdot y(t)}.$$

ΤΕΛΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ...

2. Η Μέθοδος του Euler:

$\boxed{20.11.14}$

- **Άσκηση 2.9:**

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \quad t \geq 0 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ η λύση του συστήματος.

(α) $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$, $t \geq 0$.

Αρκεί ν.δ.ο: $x(t)\cdot x'(t) + y(t)\cdot y'(t) =$

$= x(t)\cdot[-y(t)] + y(t)\cdot x(t) = 0.$

Άρα:

$$\left((x(t))^2 + (y(t))^2\right)' = 0,$$ οπότε:

$(x(t))^2 + (y(t))^2 =$ σταθ.

Επομένως θα έχουμε ότι: $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \underbrace{(x(0))^2 + (y(0))^2}_{=1}$

- Με $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ έχουμε: $z'(t) = M\cdot z(t)$ με

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ σημαντική ιδιότητα: $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ (Mx, x) = 0.$

(β) Μέθοδος του Euler $h > 0$

Ν.δ.ο $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty$ για $n \to \infty$.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\cdot\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} = x^n - h\cdot y^n \\ y^{n+1} = y^n + h\cdot x^n \end{cases}$$

Άρα: $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - hy^n)^2 + (y^n + h\cdot x^n)^2 =$

$= (x^n)^2 + (y^n)^2 + h^2\cdot\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right] =$

$= (1+h^2)\cdot\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$

Επομένως:

$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n\cdot \overbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right]}^{=1} =$

$= (1+h^2)^n \to \infty$ για $n \to \infty$.

(γ) Μέθοδος του τραπεζίου. $\left(y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\cdot\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]\right)$

Ν.δ.ο: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} = x^n - h/2\cdot(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} = y^n + h/2\cdot(x^n + x^{n+1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{n+1} - x^n = -h/2\cdot(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n = h/2\cdot(x^n + x^{n+1}) \end{cases}$$

Πολλαπλ. την 1η σχέση με $x^{n+1} + x^n$, τη 2η με $y^{n+1} + y^n$ και προσθέτουμε οπότε παίρνουμε:

$(x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{=1}$.

(δ) Πεπλεγμ. μέθοδος του Euler.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^{n+1} = x^n - h \cdot y^{n+1} \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot x^{n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^n = x^{n+1} + h \cdot y^{n+1} \\ y^n = y^{n+1} - h \cdot x^{n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^{n+1} + h \cdot y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h \cdot x^{n+1})^2 \Rightarrow$$

$$= (1 + h^2) \cdot \left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \right]$$

Άρα:

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n} \cdot \underbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2 \right]}_{=1} \to 0 \quad \text{για } n \to \infty.$$

- **Άσκηση 2.11:**

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \cdot x(t) + y(t), & t \in [0,1] \\ y'(t) = 2 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), & t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler:

Ν.δ.ο: $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$.

$$M := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$$

→ <u>Ισχυρισμός:</u> $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ (M \cdot x, x) \leq 0$.

Τότε, παίρνωντας στην (*) το εσωτερικό γινόμενο με $\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ έχουμε:

$$(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 = x^n \cdot x^{n+1} + y^n \cdot y^{n+1} + h\underbrace{\left(M\cdot\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 \leq x^n \cdot x^{n+1} + y^n \cdot y^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{C.S.}} \leq \left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]^{1/2} \cdot \left[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2\right]^{1/2} \leq \left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]^{1/2}$$

$$(Mx,x) = \left(\begin{pmatrix} -2x_1+x_2 \\ 2x_1-2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= x_1(-2x_1+x_2) + x_2(2x_1-2x_2) =$$

$$= -2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 =$$

$$= \underbrace{-2\cdot(|x_1|-|x_2|)^2}_{\leq 0} - 4\cdot|x_1|\cdot|x_2| + 3\cdot x_1\cdot x_2$$

$$-4\cdot|x_1|\cdot|x_2| + 3\cdot x_1\cdot x_2 = -3\cdot\overbrace{(|x_1\cdot x_2| - x_1\cdot x_2)}^{\geq 0} - |x_1\cdot x_2| \leq 0 \ \checkmark$$

- <u>Άσκηση 2.12:</u>

$$\begin{cases} y' = M\cdot y, & t\geq 0. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Υπόθεση:</u> $M\in\mathbb{R}^{m,m}$, $\forall x\in\mathbb{R}^m \ (Mx,x)\leq 0.$

- Πεπλεγ. Euler
- Μέθοδος μέσου

<u>Ν.δ.ο</u> $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$ (και με τις δύο μεθόδους.)

- Πεπλεγ. μέθοδος:

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot M\cdot y^{n+1} \Rightarrow$$

$$(y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n, y^{n+1}) + h\cdot\underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0.}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1})$$

$$\xrightarrow{C.S.} \leq \|y^n\|\cdot\|y^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|.$$

- Μέθοδος μέσου:

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot M\cdot\frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}\cdot M\cdot(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y^{n+1} - y^n, y^{n+1} + y^n) = \frac{h}{2}\cdot\underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), (y^n + y^{n+1}))}_{\leq 0.}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1} - y^n, y^{n+1} + y^n)}_{\|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|.$$

- Άσκηση 2.14:

$$\begin{cases} y'(t) = My(t) & , \ t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) = 0.$

• Μέθοδος μέσου (τραπεζίου)

Ν.δ.ο $\| y^{n+1} \| = \| y^n \|$.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \cdot \left(M y^n + M y^{n+1} \right) =$$

$$= y^n + \frac{h}{2} \cdot M \left(y^n + y^{n+1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} \cdot M \cdot \left(y^n + y^{n+1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(y^{n+1} - y^n , y^{n+1} + y^n \right)}_{\| y^{n+1} \|^2 - \| y^n \|^2} = \frac{h}{2} \cdot \underbrace{\left(M (y^n + y^{n+1}) , y^n + y^{n+1} \right)}_{0}$$

$$\Rightarrow \| y^{n+1} \|^2 = \| y^n \|^2 \Rightarrow \| y^{n+1} \| = \| y^n \|.$$

• Άσκηση 2.15:

$$\begin{cases} y' = -e^y , & t \in [0,1]. \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

πεπλεγμ. Euler

Ν.δ.ο προσεγγίσεις καλά ορισμένες.

$f(t,y) = -e^y$ φθίνουσα συνάρτηση του y.

Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$\forall t \in [0,1]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $\left[f(t,y_1) - f(t,y_2) \right] \cdot (y_1 - y_2) \leq 0$.

Όπως είδαμε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες (χωρίς περιορισμό στο h).

- ## Άσκηση 2.17:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ [f(t,y_1) - f(t,y_2)] \cdot (y_1 - y_2) \leq 0.$

- **Μέθοδος του μέσου:**

Ν.δ.ο οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

(✱) $$y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2} \cdot (y^n + y^{n+1})\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $x^* = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένο. Τότε:

$y^{n+1} = 2x^* - y^n.$

Με άγνωστο το x^* γράφουμε την (✱) στην μορφή

$2x^* - y^n = y^n + h \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, x^*).$

ή $x^* = y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, x^*)$

Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, x)$

- Η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα, άρα έχει το πολύ μια λύση $\Rightarrow$ μοναδικότητα της x^*.

- **Ύπαρξη λύσης:** για $x \geq 0$ έχουμε:

$f(t^n + \frac{h}{2}, x) \leq f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$

$\Rightarrow g(x) \geq x - y^n - \frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, 0) \to \infty$ για $x \to \infty$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές.

Για $x \leq 0$ έχουμε $f(t^n + \frac{h}{2}, x) \geq f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$

οπότε $-\frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, x) \leq -\frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$

Άρα: $g(x) \leq x - y^n - \frac{h}{2} \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, 0) \to -\infty$ για $x \to -\infty$.

Επομένως η g παίρνει και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ υπάρχει ρίζα της g.

• Άσκηση 2.18 :

$$\begin{cases} y' = f(y) & , t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Μέθοδος του τραπεζίου
Ν.δ.ο: οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(y^n) + f(y^{n+1}) \right]$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} \cdot f(y^n) - \frac{h}{2} \cdot f(x)$$

• Η g είναι γνήσια αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

• για $x \geq 0$: $f(x) \leq f(0) \Rightarrow -\frac{h}{2} \cdot f(x) \geq -\frac{h}{2} \cdot f(0)$
συνεπώς

$$g(x) \geq x - y^n - \frac{h}{2} \cdot f(y^n) - \frac{h}{2} \cdot f(0) \to \infty \ , \ x \to \infty$$

Επομένως η g παίρνει και θετικές τιμές.

- Αντίστοιχα για $x \to -\infty$ έχουμε $g(x) \to -\infty$, οπότε παίρνει και αρνητικές τιμές.

- Θ.Ε.Τ υπάρχει ρίζα της g.

- Άσκηση 2.19:

$$\begin{cases} y'(t) = (-y(t))^3 + \varphi(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f(t,y) = \varphi(t) - y^3$ φθίν. συναρτ. του y.
Όπως στην προηγούμενη άσκηση, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

ΤΕΛΟΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

3. Μέθοδοι Runge-Kutta:

$\boxed{04.12.14}$

- Άσκηση 3.12:

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

N.δ.ο: $p \geq 1 \iff b_1 + \dots + b_q = 1$.

$$y^{n,i} = y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad i = 1, \dots, q$$

$$\delta^n = \left[y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - y(t^{n+1})$$

Προφανώς $J^{n,i} = y(t^n) + O(h)$ και $t^{n,i} = t^n + \tau_i \cdot h$

οπότε:

$$\delta^n = y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \underbrace{f(t^n + \tau_i \cdot h, y(t^n) + O(h))}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y(t^n)} + O(h^2) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} b_i \right) \cdot y'(t^n) + O(h^2) - \left[\cancel{y(t^n)} + h \cdot y'(t^n) + O(h^2) \right]$$

$$= h \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1 \right) \cdot \underbrace{y'(t^n)}_{\neq 0} + O(h^2)$$

Άρα για $y'(t^n) \neq 0$, έχουμε:

$$\delta^n = O(h^2) \iff \sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = 1.$$

- Άσκηση 3.13: $\begin{cases} y'(t) = 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Λύση: $y(t) = t$

$N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$, $t^n = n \cdot h$ $\quad n = 0, \dots, N$

$y^N \approx y(1) = 1.$

Ν.δ.ο: $y^N \to y(1)$, $N \to \infty \iff p \geq 1.$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$y^0 = 0.$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \underbrace{1}_{y'(t)=1} \quad \text{για } n = 0, \dots, N-1.$$

Άρα: $y^n = n \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i$ για $n = 0, \dots, N$. (τετριμμένη επαγ.)

Επομένως,

$$y^N = \underbrace{N\cdot h}_{=1}\cdot \sum_{i=1}^{q} b_i = \sum_{i=1}^{q} b_i \text{, οπότε:}$$

$$y^N \to y(1),\ N\to\infty \text{ ανν } \sum_{i=1}^{q} b_i = y(1) \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{q} b_i = 1.$$ σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση $p \geq 1$.

• **Άσκηση 3.14:**

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} \qquad J^{n,i} = y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot f(t^{n,j}, J^{n,j})$$

Ν.δ.ο: • $\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - J^{n,i}| \leq C_1\cdot h$

• $\max_{n} |y(t^{n,i}) - J^{n,i}| \leq C_1\cdot h^2 \iff$

$$\iff \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i \text{ για } i=1,\dots,q$$

Έχουμε:

$$J^{n,i} = y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot \underbrace{f(t^n + \tau_j\cdot h, \boxed{y(t^n)} + O(h))}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)}$$

$$\Rightarrow J^{n,i} = y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} + O(h)$$

$$\Rightarrow J^{n,i} = y(t^n) + h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right)\cdot y'(t^n) + O(h^2)$$

• $y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i\cdot h) = y(t^n) + \tau_i\cdot h\cdot y'(t^n) + O(h^2)$

Άρα $\zeta^{n,i} = y(t^{n,i}) - \tau_i \cdot h \cdot y'(t^n) + O(h^2) + h\cdot\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right)\cdot y'(t^n$
$+ O(h^2)$

$$\Leftrightarrow \zeta^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\cdot\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - \tau_i\right)\cdot y'(t^n) + O(h^2).$$

Απο εδώ έπονται αμέσως οι δύο ζητούμενες εκτιμήσεις.

- Άσκηση 3.15:

Έστω ενα μητρώο 3x3

$$\begin{array}{c|c} \cdots\cdots & \vdots \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \\ \hline \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{6} & \end{array}$$

Είναι συνεπής και γιατί;

Έχουμε: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Leftrightarrow p \geq 1 \Rightarrow$ μέθοδος συνεπής.

- Άσκηση 3.2:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & 1 \end{array}$$

N.δ.ο: $p = 1$

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3}\cdot f(t^{n,1}, \zeta^{n,1})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot f(t^{n,1}, \zeta^{n,1}) - y(t^{n+1})$$

Άρα:

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{3}, y(t^n) + O(h)\right) - \underbrace{y(t^{n+1})}_{\|}$$

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h\cdot \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{=y'(t^n)}} + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h\cdot y'(t^n)} + O(h$$

$$= O(h^2) \Rightarrow \boxed{p \geq 1}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2\cdot t \ , \ 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t^2$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot 2\cdot t^{n,1} - y(t^{n+1})$$
$$= (t^n)^2 + 2h\left(t^n + \frac{1}{3}\cdot h\right) - (t^n + h)^2$$

$$= \ldots\ldots = -\frac{1}{3}h^2$$

$$\Rightarrow |\delta^n| = \frac{1}{3}h^2 \Rightarrow \boxed{p \leq 1}$$

συμπέρασμα: $\boxed{p = 1}$

$\boxed{09.12.14}$

- Άσκηση 3.3:

$q = 2$

Τάξη $p = 2$.

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$

$$J^{n,1} = y(t^n)$$
$$J^{n,2} = y(t^n) + h\cdot a_{21}\cdot f(t^{n,1}, J^{n,1})$$

t^n $\quad y(t^n)$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot b_1\cdot f(t^{n,1}, J^{n,1}) + h\cdot b_2\cdot f(t^{n,2}, J^{n,2}) - y(t^{n+1})$$

Άρα:

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot b_1\cdot f(t^n, y(t^n)) + h\cdot b_2\left(f\left(t^n + \tau_2\cdot h, y(t^n) + h\cdot a_{21}\cdot f(t^n, y(t^n))\right)\right) - y(t^{n+1}) =$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h\,b_1\cdot y'(t^n) + h\cdot b_2\cdot\Big[f(t^n, y(t^n)) + \tau_2\cdot h\cdot f_t(t^n, y(t^n)) + h\cdot a_{21}\cdot f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)\Big] -$$
$$- \left[\cancel{y(t^n)} + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t^n) + O(h^3)\right]$$

$$= h\cdot(b_1+b_2-1)\cdot y'(t^n) + h^2\Big[b_2\cdot \tau_2\cdot f_t(t^n, y(t^n)) + b_2\cdot a_{21}\cdot f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{y''(t^n)}_{f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n))}\Big] + O(h^3) =$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$
$$y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\cdot y'(t)$$

$$= h(b_1+b_2-1)\cdot \overbrace{y'(t^n)}^{\neq 0} + h^2\left(b_2\cdot\tau_2 - \frac{1}{2}\right)\cdot \overbrace{f_t(t^n, y(t^n))}^{\neq 0} + h^2\cdot\left(b_2\cdot a_{21} - \frac{1}{2}\right)\cdot \underbrace{f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n))}_{\neq 0} + O(h^3)$$

Άρα: $\delta^n = O(h^3)$ αν $\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2\cdot\tau_2 = \frac{1}{2} \\ b_2\cdot a_{21} = 1/2 \end{array}\right\}$

Για $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$, αυτές οι σχέσεις γράφονται στη μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 1 - b_2 \\ a_{21} = \tau_2 = \dfrac{1}{2\cdot b_2} \end{array}\right\} \quad p \geq 2.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y' = y, \quad t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$ (πρόβλημα δοκιμής)

$y(t) = e^t$ λύση

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot b_1\cdot y(t^n) + h\cdot b_2\cdot \overbrace{J^{n,2}}^{y(t^n) + h\cdot a_{21}\cdot J^{n,1}} - y(t^{n+1}) =$$

$J^{n,1} = y(t^n)$

$$= y(t^n) + h\,\underbrace{(b_1 + b_2)}_{=1}\,y(t^n) + h^2\,\underbrace{b_2\cdot a_{21}}_{=1/2}\cdot y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h\cdot y(t^n) + \frac{1}{2}h^2\cdot y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)\cdot e^{t^n} - e^h\cdot e^{t^n} = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h\right)\cdot e^{t^n}$$

Τώρα: $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \cdot e^{\xi}$ με $\xi \in (0, h)$

$$= -\frac{h^3}{6} \cdot \underbrace{e^{\xi} \cdot e^{t^n}}_{\neq 0} \Rightarrow |\delta^n| \geq C \cdot h^3 \longrightarrow p \leq 2$$

- Άσκηση 3.32 :

$$\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \end{array}$$

α) $b_1, b_2 \geq 0$

β) $m_{11} = m_{22} = \frac{1}{16}$

$m_{12} = m_{21} = -\frac{1}{16}$

Άρα : $(Mx, x) = \dots = \frac{1}{16} \cdot (x_1 - x_2)^2 \geq 0$

οπότε ο M είναι μη αρνητικά ημιορισμένος.

- συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής.

ΤΕΛΟΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

• **Άσκηση 4.1:** $\boxed{16.12.14}$

$$\alpha_2 \cdot y^{n+2} + \alpha_1 \cdot y^{n+1} + \alpha_0 \cdot y^n = h \cdot f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

$p=2$ ευστάθεια;

Λύση:

$p \geq 2 \iff C_0 = C_1 = C_2 = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0. \\ 2 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 = 1. \\ \frac{1}{2} \cdot (\alpha_1 + 2^2 \cdot \alpha_2) - \frac{1}{1!} \cdot (2^1 \cdot 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 = 0. \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 = 1. \\ 4\alpha_2 + \alpha_1 = 4. \end{cases} \rightsquigarrow \alpha_0 = 1/2. \quad \rightsquigarrow \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = -2.$$

$$\frac{3}{2} \cdot y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} \cdot y^n = h \cdot f(t^{n+2}, y^{n+2}).$$

Διβηματική μέθοδος ανάλογων διαφορών.

Χαρακτ. πολ.: $\rho(z) = \frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}$.

ρίζες: $z_1 = 1$ και $z_2 = 1/3$.

Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

$$\rho(z) = \frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(z^2 - 1) - 2(z-1) + \overbrace{\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2}}^{=0}$$

$$= \frac{3}{2}(z-1)(z+1) - 2(z-1) =$$

$$= (z-1) \cdot \underbrace{\left[\frac{3}{2}(z+1) - 2\right]}_{\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}(3z-1)} = \frac{1}{2}(z-1)(3z-1).$$

• $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\text{Άσκηση 4.2:}}$

$$(L_h \cdot y)(t) = \sum_{j=0}^{\kappa} \alpha_j \cdot y(t+j\cdot h) - h\cdot \beta_j \cdot y'(t+j\cdot h)]$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa} \left[\alpha_j \cdot \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(j\cdot h)^v}{v!} \cdot y^{(v)}(t) - h\cdot \beta_j \cdot \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} \cdot y^{(v+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa} \left[\alpha_j \cdot y(t) + \alpha_j \cdot \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(j\cdot h)^v}{v!} \cdot y^{(v)}(t) - h\cdot \beta_j \cdot \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa} \alpha_j \cdot y(t) + \sum_{j=0}^{\kappa} \left[\alpha_j \cdot \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} \cdot y^{(v)}(t) - h\cdot \beta_j \cdot \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!} \cdot y^{(v)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

$$= C_0 \cdot y(t) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v \cdot \left[\sum_{j=0}^{\kappa} \frac{j^v}{v!} - \sum_{j=0}^{\kappa} \beta_j \cdot \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right] \cdot y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

$$= C_0 \cdot y(t) + h\cdot \left[\sum_{j=\not{0}}^{\kappa} \overset{\alpha_j}{} \frac{j^1}{1!} - \sum_{j=0}^{\kappa} \beta_j \cdot \frac{j^0}{0!} \right] \cdot y'(t) +$$

$$\scriptstyle 1 \text{ γιατί } 0^{1} = 0$$

$$+ \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \cdot \left[\sum_{j=\not{0}\,1}^{\kappa} \frac{\alpha_j j^v}{v!} - \sum_{j=\not{0}\,1}^{\kappa} \beta_j \cdot \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right] + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

$$= C_0 \cdot y(t) + h \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{\kappa} j\cdot \alpha_j - \sum_{j=0}^{\kappa} \beta_j \right]}_{=C_1} \cdot y'(t) + \sum^{\tilde{p}} h^v \cdot [$$

$$\cdot \underbrace{\left[\frac{1}{v!} \cdot \sum_{j=1}^{\kappa} j^v \cdot \alpha_j - \frac{1}{(v-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{\kappa} j^{v-1} \cdot \beta_j \right]}_{C_v.} \cdot y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1}).$$

• Άσκηση 4.15 : $\Leftarrow$ $\boxed{18.12.14}$

$a_3 = 1,\ a_2 = -\frac{11}{6},\ a_1 = 1,\ a_0 = -\frac{1}{6}.$

$b_3 = \frac{1}{12},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_0 = \frac{7}{12}.$

Ευστάθεια;

Λύση:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$p(z) = z^3 - \frac{11}{6}z^2 + z - \frac{1}{6}.$

Τώρα $p(1) = 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 0.$

εδώ πρέπει να προσθέσουμε $+1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 0.$

Επομένως:

$p(z) = (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + (z-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow p(z) = (z-1)\cdot(z^2+z+1) - \frac{11}{6}\cdot(z-1)\cdot(z+1) + (z-1).$

$= (z-1)\cdot\underbrace{\left[(z^2+z+1) - \frac{11}{6}\cdot(z+1) + 1\right]}_{\parallel}$

$z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}.$

$= \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$

Ρίζες: $z_1 = 1$

$6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

z_1, z_2, z_3 απλές ρίζες.

και $|z_i| \leq 1$ για $i = 1, 2, 3.$

Συμπέρασμα: Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

- Άσκηση 4.16:

Είναι συνεπής η μέθοδος της προηγούμενης άσκησης;

Λύση:

$\rho(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$. (συντελεστές τα a_i)

$\sigma(z) = \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{7}{12}$ (» » b_i)

Μέθοδος συνεπής: $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho(1) = 0. \ \checkmark \text{(προηγουμένως)} \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$

Τώρα:

$\rho'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3} \cdot z + 1 \Rightarrow \rho'(1) = \frac{1}{3}$.

και: $\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

δηλ. όντως ισχύει ότι: $\rho'(1) = \sigma(1)$.

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι συνεπής.

- Άσκηση 4.21:

$a_k, \ldots, a_0$, $b_k, \ldots, b_0$.

Υπόθεση: μέθοδος ευσταθής και συνεπής.

Ν.δ.ο: $b_k + \ldots + b_0 \neq 0$.

Απόδειξη:

$$\rho(z) = \alpha_K \cdot z^K + \ldots + \alpha_0$$
$$\sigma(z) = \beta_K \cdot z^K + \ldots + \beta_0$$

Συνέπεια: $\begin{cases} \rho(1)=0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Υποθέτουμε ότι $\beta_K + \ldots + \beta_0 = 0$ δηλ. $\sigma(1)=0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο.

Πράγματι, τότε θα είχαμε:
$\rho(1)=0$
$\rho'(1)=0$
Άρα το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του ρ, οπότε δεν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, δηλ. η μέθοδος δεν είναι ευσταθής, ΑΤΟΠΟ!

- Άσκηση 4.22:

f συνεχής και τ.ώ:

⊕ $\forall t \in [a,b], \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ [f(t,y_1) - f(t,y_2)] \cdot (y_1 - y_2) \leq 0.$

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h \cdot f(t^{n+2}, y^{n+2}) \\ \qquad n = 0, \ldots, N-2. \end{cases}$$

Ν.δ.ο: οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - h\cdot f(t^{n+2}, x)$$

Κάθε λύση y^{n+2} της $\frac{3}{2}y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n = h\cdot f(t^{n+2}, y^{n+2})$

είναι ρίζα της g και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

1. Μοναδικότητα: Η $f(t^{n+2}, \cdot)$ είναι φθίνουσα
οπότε η $-h\cdot f(t^{n+2}, \cdot)$ είναι αύξουσα.

$$g(x) = \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{γνήσια αύξουσα}}\cdot x \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n}_{\text{αύξουσα}} \underbrace{- h\cdot f(t^{n+2}, x)}_{\text{αύξουσα}}$$

$\Rightarrow$ g γνήσια αύξουσα.

$\Rightarrow$ Η g έχει το πολύ μια ρίζα.

2. Ύπαρξη: Για $x \leq 0$ έχουμε $-h\cdot f(t^{n+2}, x) \leq -h\cdot f(t^{n+2}, 0)$,

οπότε:

$$g(x) \leq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - h\cdot f(t^{n+2}, 0) \to -\infty$$

για $x \to -\infty$.

Επομένως, η g παίρνει και αρνητικές τιμές.
για $x \geq 0$ έχουμε $-h\cdot f(t^{n+2}, x) \geq -h\cdot f(t^{n+2}, 0)$,
οπότε

$$g(x) \geq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - h\cdot f(t^{n+2}, 0) \to \infty$$

για $x \to \infty$.

οπότε η g λαμβάνει και θετικές τιμές.
Έχουμε λοιπόν μια συνεχή συνάρτηση, η οποία λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ η g λαμβάνει και την τιμή μηδέν, οπότε έχει ρίζα.

Γενικά:

$$a_k \cdot y^{n+k} + \dots + a_0 \cdot y^n = h \cdot b_k \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + h \cdot b_0 \cdot f(t^n, y^n).$$

$$\Leftrightarrow a_k \cdot y^{n+k} = h \cdot b_k \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k}) + G^n$$ δεδομένο.

$$g(x) = a_k \cdot x - h \cdot b_k \cdot f(t^{n+k}, x) - G$$

- $a_k, b_k > 0$
- $a_k, b_k < 0$

<u>Συμπέρασμα</u>: Αν $a_k b_k > 0$ και η f ικανοποιεί την (+) τότε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.