Άρα $(Mx, x) = \ldots = \frac{1}{16}(x_1 - x_2)^2 \geq 0$

οπότε ο $M$ είναι μη αρνητικά ημιορισμένος

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής

# Κεφάλαιο 4º

## Πολυβηματικές Μέθοδοι

Προκαταρκτικά: Συμβολισμός του παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$

### Διβηματική μέθοδος

$y^0, y^1$ δεδομένα

$$y^{n+2} - y^n = 2h \underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{= f^{n+1}}, \quad n = 0, \ldots, N-2$$

Πώς προκύπτει; Με αριθμητική διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Τώρα,

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

οπότε $\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

αντικαθιστώντας $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με $y^m$ οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου

## Με αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

μέθοδος του μέσου

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx 2h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

### Άλλη μέθοδος

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

### Μέθοδος του Simpson

$$\int_c^d \varphi(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left[\varphi(c) + 4\varphi\left(\frac{c+d}{2}\right) + \varphi(d)\right]$$

Άρα

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx \frac{h}{3}\left[f(t^n, y(t^n)) + 4f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^{n+2}, y(t^{n+2}))\right]$$

Μέθοδος Simpson

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n \approx \frac{h}{3}\left[f(t^{n+2}, y^{n+2}) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\right] \quad n=0, \dots, N-1 \end{cases}$$

πεπλεγμένη

$k \in \mathbb{N}$ Γενική $k$-βηματική μέθοδος:

$\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0$

$\beta_k, \beta_{k-1}, \dots, \beta_0$

$$\begin{cases} y^0, \quad y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = h\left[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)\right] \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-k.$

Υπόθεση : $\alpha_k = 1$

$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ (δεν είναι και τα δύο συγχρόνως μηδέν)

$\beta_k = 0$ : άμεση μέθοδος

Κόστος: ένας υπολογισμός της $f$ ανά βήμα

$\beta_k \neq 0$ πεπλεγμένη μέθοδος γνωστό

(*) $\alpha_k y^{n+k} = h\beta_k (t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n$

Γενικά η υλοποίηση ανά βήμα είναι πολύ λιγότερο δαπανηρή από τις αντίστοιχες μεθόδους RK

<u>καλά ορισμένες;</u>

Με $\alpha_k = 1$ η (*) γράφεται στη μορφή

$$y^{n+k} = h\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n$$

Αν η $f$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς $y$, με σταθερά $L$ τότε για $h|\beta_k|L<1$ το $y^{n+k}$ είναι καλά ορισμένο

Άρα η $f$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz και $\beta_k>0$ (δηλαδή το $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$ είναι θετικό) τότε το $y^{n+k}$ είναι καλά ορισμένο χωρίς περιορισμό στο $h$. Η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.

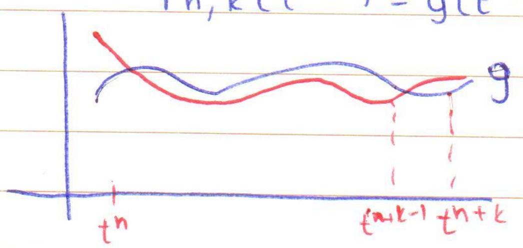
<u>Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών</u>

Έστω ότι $m=1$

Έστω $k\in\mathbb{N}$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $P_{n,k}$ βαθμού το πολύ $k$, τ.ω.

$$P_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}), \quad i=0,\dots,k$$




Το $P_{n,k}\in P_k$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της $y$ στα σημεία $t^n,\dots,t^{n+k}$

Τώρα στη σχέση $y'(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$ προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+k})$ με $P'_{n,k}(t^{n+k})$

Η $P'_{n,k}(t^{n+k})$ εκφράζεται συναρτήσει των τιμών $y(t^n),\dots,y(t^{n+k})$ της λύσης. Αντικαθιστώντας στην $P'_{n,k}(t^{n+k}) \approx f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$ το $\approx$ με $=$ και το $y(t^m)$ με $y^m$ οδηγούμαστε στο βήμα της <u>k-βηματικής μεθόδου ανάδρομων διαφορών</u>

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = hf(t^{n+k}, y^{n+k}) \end{cases}$$

$\beta_k = 1,\ \beta_{k-1} = \dots = \beta_0 = 0$

με $\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$ και $\nabla^j y^n = \nabla^1(\nabla^{j-1} y^n)$

$k=1$ $\quad a_1 = 1,\ a_0 = -1,\ \beta_1 = 1$ (πεπλ. Euler)

$k=2$ $\quad a_2 = 1,\ a_1 = -4/3,\ a_0 = 1/3,\ \beta_2 = 2/3$

$k=3$ $\quad a_3 = 1,\ a_2 = -18/11,\ a_1 = 9/11,\ a_0 = -2/11,\ \beta_3 = 6/11$

11/12/2014

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

| Dahlquet |
|---|
| Butcher<br>Rk |

## Συμβολισμός και παραδείγματα

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

1
$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + a_0 y^n = h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)],\ n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

$a_k = 1,\ |a_0| + |\beta_0| > 0$

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}),\ n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

όχι απ' έξω

## Μέθοδοι των Adams

$\beta_k = 0$ μέθοδοι των Adams–Bashforth

$\beta_k \neq 0$ μέθοδοι των Adams–Moulton

$k=2$: $y^{n+2} - y^{n+1} = h[\frac{3}{2} f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \frac{1}{2} f(t^n, y^n)]$

$k=3$: $y^{n+3} - y^{n+2} = h[\frac{23}{12} f(t^{n+2}, y^{n+2}) - \frac{4}{3} f(t^{n+1}, y^{n+1}) + \frac{5}{12} f(t^n, y^n)]$

$k=2$: $y^{n+2} - y^{n+1} = h[\frac{5}{12} f(t^{n+2}, y^{n+2}) + \frac{2}{3} f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \frac{1}{12} f(t^n, y^n)]$

Π.χ. $y^0, \dots, y^{k-1}$ δεδομένα

$y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}),\ n = 0, \dots, N-k$

$b_k = 0$ Μέθοδος του Nystrom
$b_k \neq 0$ Μέθοδοι του Milne – Simpson

## Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων.

Υπόθεση: Η $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς $y$.

Ορισμός: (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων)
Μια $k$-βηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές $a_k, \dots, a_0$, $b_k, \dots, b_0$ λέγεται ευσταθής, αν $\exists$ σταθερά $C$, που εξαρτάται από την $f$, αλλά είναι ανεξάρτητη του $h$ (του $N$) τ.ω. για ακολουθίες $(y^n)$, $(z^n)$ που ικανοποιούν τις ①

$$② \begin{cases} z^0, \dots, z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k z^{n+k} + \dots + a_0 z^n = h[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)],\ n=0,\dots,N-k. \end{cases}$$

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j|$$

Ορισμός: (Συνθήκη των ριζών): Λέμε ότι η $k$-βηματική μέθοδος ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο

$p(z) = a_k z^k + \dots + a_0$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, δηλαδή αν

$$\begin{cases} p(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1 \\ p(z) = p'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1 \end{cases}$$

Πώς ελέγχουμε τη συνθήκη των ριζών;
- Για μικρό $k$ βρίσκουμε τις ρίζες
- Για μεγάλο $k$
  1) κριτήριο του Schur
  2) — // — Routh-Hurwitz.

• Με γνώσεις από τη θεωρία των εξισώσεων διαφορών, αποδεικνύεται ότι αν μια μέθοδος είναι ευσταθής τότε ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών (ισχύει και το αντίστροφο).

$\exists$ δύο τεχνικές απόδειξης   1) του Dahlquist
2) του Butcher

SOS **Λήμμα** (Προκαταρκτικό αποτέλεσμα για την τεχνική του Butcher)
Έστω $\rho$, $\rho(z)=a_0+a_1z+\dots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k$ ένα πολυώνυμο με $a_k=1$, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών. Θεωρούμε τον $k\times k$ πίνακα.

$$A=\begin{pmatrix} -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_0 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

στην υποδιαγώνιο έχω 1

Τότε $\exists$ νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^k$ τ.ω. για την αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα $k\times k$ πινάκων ισχύει $\boxed{\|A\|\leq 1}$

Οι ιδιοτιμές του $A$ είναι οι ρίζες του $\rho$.

**Πρόταση** (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων Butcher)
Έστω ότι η $k$-βηματική μέθοδος (1) ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.
Έστω $\lambda^n$, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένες σταθερές και έστω $\beta_i^n$, $i=0,\dots,q$, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένοι αριθμοί τ.ω. $|\beta_i^n|\leq\quad<\infty$ Για $h=\frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$a_iy^{n+k}+\dots+a_ky^n=h\left(\beta_k^ny^{n+k}+\dots+\beta_0^ny^n\right)+\lambda^n \quad ,n=0,\dots,N-k$$

Τότε $\exists$ $h_0>0$ τ.ω. για $h\leq h_0$ να ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N}|y^n|\leq C\left[\max_{0\leq j\leq k-1}|y^j|+N\max_{0\leq n\leq N-k}|\lambda^n|\right]$$ όπου $C$

εξαρτάται από τα $b-a$, $h_0$, $B$ αλλά είναι ανεξάρτητη των $h$, $\lambda^n$, $y^n$, $N$ και $\beta_i^n$

## Σκιαγράφηση της Απόδειξης

Χ.π.γ. υποθέτουμε ότι $a_k = 1$ και έχουμε

$$y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \ldots + a_0 y^n = h(b_k^n y^{n+k} + \ldots + b_0^n y^n) + \lambda^n$$

Με τον πίνακα A του προηγούμενου Λήμματος,

$$Y^j = \begin{pmatrix} y^{j+k-1} \\ y^{j+k-2} \\ \vdots \\ y^j \end{pmatrix}, \qquad G^j = \begin{pmatrix} h(b_k^n y^{n+k} + \ldots + b_0^n y^n) + \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται μονοβηματική διανυσματική αναδρομική σχέση

$$Y^{n+1} = A Y^n + G^n, \quad 0 \le n \le N-k.$$

Τώρα με τη νόρμα που εξασφαλίζεται απ' το προηγούμενο Λήμμα έχουμε $\|Y^{n+1}\| \le \underbrace{\|A\|}_{\le 1} \|Y^n\| + \|G^n\|$

οπότε

$\|Y^{n+1}\| \le \|Y^n\| + \|G^n\|$ χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών στον $\mathbb{C}^k$ και το Λήμμα 2.1 προκύπτει "εύκολα" το ζητούμενο αποτέλεσμα.

• Πώς απ' την προηγούμενη πρόταση προκύπτει η ευστάθεια της μεθόδου (υποθέτοντας ότι ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών);

$$\begin{cases} a_k y^{n+k} + \ldots + a_0 y^n = h[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \ldots + b_0 f(t^n, y^n)] \\ a_k z^{n+k} + \ldots + a_0 z^n = h[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \ldots + b_0 f(t^n, z^n)] \end{cases}$$

θέτουμε $\varphi^m = y^m - z^m$, $m = 0, \ldots, N$ αφαιρώντας κατά μέλη:

$$a_k \varphi^{n+k} + \ldots + a_0 \varphi^n = h\{ b_k [f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k})] + \ldots$$
$$\ldots + b_0 [f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)] \}$$

θέτοντας

$$\boxed{g^m = \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y^m) - f(t^m, z^m)}{y^m - z^m}, & \text{για } y^m \neq z^m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}}$$

η προηγούμενη σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$a_k \varphi^{n+k} + \ldots + a_0 \varphi^n = h(\underbrace{b_k g^{n+k}}_{= b_k^n} \varphi^{n+k} + \ldots + \underbrace{b_0 g^n}_{= b_0^n} \varphi^n), \; n = 0, \ldots, N-k$$

$\Rightarrow$

Έχουμε ότι $|\beta_j^m| = |\beta_j^{n+j}| = |\beta_j| \underbrace{|g^{m+j}|}_{\le L}$

$\le L \max_{0\le j\le k} |\beta_j| = B$

Ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες της προηγούμενης πρότασης με $A^n = 0$.

Άρα: $\max_{0\le n\le N} |\psi^n| \le C' \max_{0\le j\le k-1} |\psi^j|$ ή $\boxed{\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C' \max_{0\le j\le k-1} |y^j - z^j|}$

$\underbrace{a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n}_{=\sum_{j=0}^{n} a_j y^{n+j}} = h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)] = \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j})$

## Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων

$a_k, \dots, a_0, \beta_k, \dots, \beta_0$

Ορίζουμε

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - h\beta_j y'(t+jh)], \quad t \in [a, b-kh]$$

### Σχόλιο: Σφάλμα Συνέπειας

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j})$$

Προφανώς $\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^n + jh) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j y'(t^{n+j})$

$= \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^n + jh) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j y'(t^n + jh)$

$= \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t^n+jh) - h\beta_j y'(t^n+jh)] = (L_h y)(t^n)$

**Ορισμός: (Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου)** Έστω $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ τυχούσα αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν $p$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\exists\ C = C_1(y)$ $\forall t \in [a, b-kh]$

$|(L_h y)(t)| \le C h^{p+1}$ τότε λέμε ότι η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας $p$.

Επειδή το σφάλμα συνέπειας εκφράζεται συναρτήσει της $y$ μόνο (η $f$ δεν υπεισέρχεται) ο προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων είναι πολύ εύκολος.

Αναπτύσσοντας τις $y(t+jh)$, $y'(t+jh)$ κατά Taylor (ως προς $t$) παίρνουμε $(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \dots$ με $C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k$ και $C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k)$ και για $j \ge 2$.

$$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k) - \frac{1}{(j-1)!}(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \dots + k^{j-1}\beta_k)$$

(24) Τάξη μεθόδου $= p \Rightarrow C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ και $C_{p+1} \ne 0$

16/12/2014

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)]$$

$$t \in [a, b-kh]$$

$$\underbrace{\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))}_{=(L_h y)(t^n)}$$ τοπικό σφάλμα

$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(t) + \dots$$

Τάξη μεθόδου $= p \Leftrightarrow C_0 = \dots = C_{p+1} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho(z) = a_k z^k + \dots + a_0 \\ \sigma(z) = b_k z^k + \dots + b_0 \end{array}}$$

$C_0 = a_0 + \dots + a_k$.

$C_1 = \underbrace{a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k}_{\rho'(1)} - (b_0 + \dots + b_k)$

και για $j \geq 2$: $C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$

Μέθοδος συνεπής : $\boxed{p \geq 1}$

$p \geq 1 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) - \sigma(1) = 0 \Leftrightarrow \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

άρα η μέθοδος συνεπής αν και μόνον αν:

$\rho(1) = 0$ ΚΑΙ $\rho'(1) = \sigma(1)$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι μια συγκλίνουσα πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής

Εδώ θα αποδείξουμε το αντίστροφο.

## Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος πολυβηματικών μεθόδων)

Έστω ότι η $k$-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$.
Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του προβλήματος αρχικών.
Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω. για $0 < h \leq h_0$ να ισχύει:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq G \left\{ h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| \right\},$$

με σταθερά $G$ ανεξάρτητη των $h$, $N$ και $y$.

**Απόδειξη** Έχουμε

- $\sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) + \rho^n$

με $\max_{0 \leq n \leq N-k} |\rho^n| \leq G h^{p+1} \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|$,

και

- $\sum_{j=0}^{k} a_j y^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j})$

αφαιρώντας κατά μέλη και με $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$ παίρνουμε

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \varepsilon^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} b_j \left[ f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) - f(t^{n+j}, y^{n+j}) \right] + \rho^n \Rightarrow$$

ορίζω $g^m = \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{y(t^m) - y^m} & \text{για } y(t^m) \neq y^m \\ & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Άρα $\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j \varepsilon^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \underbrace{b_j\, g^{n+j}}_{b_j^{\,n}} \cdot \varepsilon^{n+j} + \rho^n$

Ισχύει ότι $|g^m| \leq L$ οπότε $|b_j^{\,n}| \leq L \max_{1 \leq i \leq k} |b_i| = B < \infty$

Επομένως σύμφωνα με την πρόταση 4.1 ισχύει (αναλυτικά να τη γράψουμε)

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq \tilde{G} \cdot \left[ N \max_{0 \leq n \leq N-k} |\rho^n| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |\varepsilon^j| \right\}$$

Άρα $\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \tilde{G} \left[ N C h^{p+1} \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| \right\}$

$\le \tilde{C}[C(b-a)\, h^p \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1} |y(t^j)-y^j|$

$\le C_1 [\quad \downarrow \quad + \quad \downarrow \quad ].$

• Υπολογισμός αρχικών προσεγγίσεων

Για να οδηγηθούμε σε μια εκτίμηση σφάλματος της μορφής

$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \hat{C} h^p$ πρέπει και αρκεί οι αρχικές προσεγγίσεις να είναι τ.ω.

$\max_{0\le j\le k-1} |y(t^j)-y^j| \le C_2 h^p$ Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, π.χ. επιλέγοντας $y^0=y_0$ και υπολογίζοντας τις $y^1,\dots,y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK τάξης $\ge p-1$ (επειδή τη μέθοδο την εφαρμόζουμε μόνο $k-1$ φορές)

Η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας ευσταθούς $k$-βηματικής μεθόδου είναι:

$\begin{cases} k+1 & \text{για περιττό } k \\ k+2 & \text{για άρτιο } k \end{cases}$

Η μέγιστη δυνατή τάξη άμεσης ευσταθούς μεθόδου είναι $k$ $(p=k)$

Σοβαρό μειονέκτημα πολυβηματικών μεθόδων: Η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας Α-ευσταθούς πολυβηματικής μεθόδου είναι $p=2$!

Άσκηση 4.1

$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$

i) Να βρω τα $a_0, a_1, a_2$ ώστε η τάξη $p=2$;

ii) Ευστάθεια;

Λύση

$p\ge 2 \Rightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0 \;(=)$

$$\begin{cases} a_2+a_1+a_0=0 & (1) \\ a_1+2a_2 = 1 & (2) \\ \frac{1}{2!}(a_1+2^2a_2) - \frac{1}{1!}2^1\cdot 1 = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2+a_1+a_0=0 \\ 2a_2+a_1=1 \\ 4a_2+a_1=4 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} \to a_0 = 1/2 \\ \to a_1=-2 \\ \to a_2=\frac{3}{2} \end{array}$$

Η μέθοδος είναι $\frac{3}{2}y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n = hf(t^{n+2}, y^{n+2})$ είναι η διβηματική μέθοδος ανάδρομων διαφορών.

ii) χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho(z) = \frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}$

ρίζες $z = 1$, $z = \frac{1}{3}$. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, οπό[τε] η μέθοδος είναι ευσταθής

## Άσκηση 4.2

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh) ] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[ a_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h\beta_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[ a_j y(t) + a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j y(t) + \sum_{j=0}^{k} \left[ a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h b_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!} y^{(v)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= C_0 y(t) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v \left[ \sum_{j=0}^{k} \frac{j^v}{v!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right] y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= C_0 y(t) + h \left[ \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{j^1}{1!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \underbrace{\frac{j^0}{0!}}_{=1} \right] y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \left[ \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{j^v}{v!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right] \cdot y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

($j=1$) γιατί $0^1 = 0$

$$= C_0 y(t) + h \underbrace{\left[ \sum_{j=1}^{k} j a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j \right]}_{C_1} y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \underbrace{\left[ \frac{1}{v!} \sum_{j=1}^{k} j^v a_j - \frac{1}{(v-1)!} \sum_{j=1}^{k} j^{v-1} b_j \right]}_{C_v} y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

18/12/2014

## Άσκηση 4.15

τριβηματική μέθοδος με $a_3 = 1$, $a_2 = \frac{-11}{6}$, $a_1 = 1$, $a_0 = -\frac{1}{6}$
$b_3 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{7}{12}$

Είναι ευσταθής;

Λύση

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$$

$p(1) = 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 0$ (άρα το 1 ρίζα) Επομένως

$$p(z) = (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + z - 1 \Rightarrow$$

$$\left(+1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow p(z) = (z-1)(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z-1)(z+1) + (z-1)$$

$$= (z-1)\underbrace{\left[(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z+1) + 1\right]}_{= z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$$

ρίζες $z_1 = 1$ και $6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{2,3} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

Άρα η $z_1, z_2, z_3$ είναι απλές ρίζες και $|z_i| \le 1$, $i = 1, 2, 3$. Συμπέρασμα: Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

Μιγαδικοί
$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$
άρα ελέγχουμε αν είναι $\le 1$

## Άσκηση 4.16

Είναι συνεπής η τριβηματική μέθοδος της προηγούμενης άσκησης;

Λύση

$$p(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{7}{12}$$

Μέθοδος συνεπής. $\Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = 0 \ ✓ \\ p'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Τώρα $p'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3} z + 1$

$p'(1) = 3 - \frac{11}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

και $\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, δηλαδή όντως $p'(1) = \sigma(1)$

άρα η μέθοδος συνεπής.

## Άσκηση 4.21

$a_k, \dots, a_0$, $b_k, \dots, b_0$ Υπόθεση: η μέθοδος είναι ευσταθής & συνεπής

Ν.Δ.Ο. $b_k + \dots + b_0 \neq 0$

Απόδειξη

$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_0$

$\sigma(z) = b_k z^k + \dots + b_0$

Συνέπεια: $\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Υποθέτουμε ότι $b_k + \dots + b_0 = 0$ δηλαδή $\sigma(1) = 0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο

Πράγματι τότε θα είχαμε: $\left.\begin{matrix} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = 0 \end{matrix}\right\}$ άρα το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του ρ οπότε δεν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών δηλαδή η μέθοδος δεν είναι ευσταθής. ΑΤΟΠΟ άρα $b_k + \dots + b_0 \neq 0$

## Άσκηση 4.22

$f$ συνεχής και τ.ω. $\forall t \in [a, b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t, y_1) - f(t, y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2}), \\ \qquad n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

θέλουμε να δείξουμε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

Λύση

θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - h f(t^{n+2}, x)$

κάθε λύση της $\frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$ είναι ρίζα της $g$ και αντίστροφα. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η $g$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

<u>Μοναδικότητα της ρίζας</u>: Η $f(t^{n+2},\cdot)$ είναι φθίνουσα οπότε $-hf(t^{n+2},\cdot)$ είναι αύξουσα

$$g(x) = \underbrace{\tfrac{3}{2}x}_{\text{γνήσια αύξουσα}} - \underbrace{2y^{n+1} + \tfrac{1}{2}y^n}_{\text{αύξουσα}} \underbrace{- hf(t^{n+2}, x)}_{\text{αύξουσα}}$$

Άρα η $g$ είναι γνήσια αύξουσα άρα η $g$ έχει το πολύ μια ρίζα.

<u>Υπαρξη ρίζας</u>: Για $x \leq 0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},x) \leq -hf(t^{n+2},0)$ οπότε
$g(x) \leq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2},0) \to -\infty$ για $x \to -\infty$
Επομένως η $g$ παίρνει και αρνητικές τιμές
Αντίστοιχα για $x \geq 0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},x) \geq -hf(t^{n+2},0)$ οπότε
$g(x) \geq \frac{3}{2}x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - hf(t^{n+2},0) \to \infty$ για $x \to \infty$
οπότε η $g$ παίρνει και θετικές τιμές.
Έχουμε λοιπόν μια συνεχής συνάρτηση η οποία λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η $g$ λαμβάνει και την τιμή μηδέν οπότε έχει ρίζα. (Άρα έχει ακριβώς μία ρίζα)

## * ΓΕΝΙΚΑ.

$$a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + h b_0 f(t^n, y^n)$$

$$\Leftrightarrow a_k y^{n+k} = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \underset{\uparrow \text{δεδομένο}}{G^n}$$

$$g(x) = a_k x - h b_k f(t^{n+k}, x) - G^n$$

- $a_k,\ b_k > 0$
- $a_k,\ b_k < 0$ : $-g(x) = -a_k x + h b_k f(t^{n+k}, x)$

Συμπέρασμα: Αν $a_k b_k > 0$ και ικανοποιεί την ⊕ τότε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες