11/12/14

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Πολυβηματικές μέθοδοι

Συμβολισμοί και παραδείγματα

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$y^0, y^1, \dots, y^{k-1}$ δεδομένα

$a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)]$ $n = 0, \dots, N-k$

$a_k = 1$, $|a_0| + |b_0| > 0$

Παράδειγμα

$$(1)\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j}) \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

Λέγονται μέθοδοι του Adams (άμεσοι)

$\boxed{b_k = 0}$ μέθοδος των Adams-Bashforth

$\boxed{b_k \neq 0}$ " " Adams-Moulton (πεπλεγμένη)

$\boxed{k=2}$ $y^{n+2} - y^{n+1} = h[\frac{3}{2} f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \frac{1}{2} f(t^n, y^n)]$

$\boxed{k=3}$ $y^{n+3} - y^{n+2} = h\left[\frac{23}{12} f(t^{n+2}, y^{n+2}) - \frac{4}{3} f(t^{n+1}, y^{n+1}) + \frac{5}{12} f(t^n, y^n)\right]$

πεπλεγμένη

$\boxed{k=2}$ $y^{n+2} - y^{n+1} = h[\frac{5}{12} f(t^{n+2}, y^{n+2}) + \frac{2}{3} f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \frac{1}{12} f(t^n, y^n)]$

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j}), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

$\boxed{b_k = 0}$ Μέθοδος του Nystrom

$\boxed{b_k \neq 0}$ Μέθοδος των Milne-Simpson.

Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

Υπόθεση: Η $f\ [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y

Ορισμός (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων)

Μια κ-βηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές $a_k,\dots,a_0$, $b_k,\dots,b_0$, λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει σταθερά C_1 που εξαρτάται από την f, αλλά είναι ανεξάρτητη του h (του N), τ.ω για ακολουθίες (y^n), (z^n) που ικανοποιούν τις ① και

$$② \begin{cases} z^0,\dots,z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k z^{n+k}+\dots+a_0 z^n = h[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k})+\dots+b_0 f(t^n,z^n)] \end{cases}$$

$$n=0,\dots,N-k$$

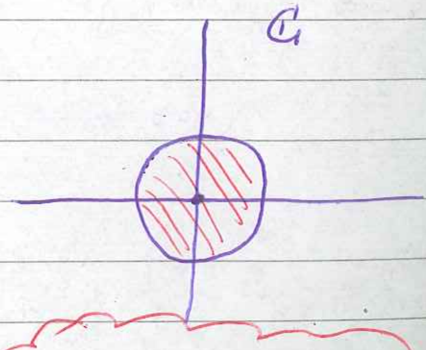
να ισχύει:

$$\max_{0\le n\le N} |y^n-z^n| \le C_1 \max_{0\le j\le k-1}|y^j-z^j|$$

Ορισμός (Συνθήκη των ριζών)

Λέμε ότι η κ-βηματική μέθοδος ① ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο $p(z)=a_k z^k+\dots+a_0$ ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών, δηλαδή αν

- $p(z)=0 \Rightarrow |z|\le 1$ (κλειστό)
- $p(z)=p'(z)=0 \Rightarrow |z|<1$



Όσες είναι πάνω στον κύκλο (ρίζες) είναι απλές, μέσα στον κύκλο είναι διπλές

- Πώς ελέγχουμε την συνθήκη των ριζών; (αν ικανοποιείται ή όχι)

* Για μικρό κ, βρίσκουμε τις ρίζες
* Για μεγάλο κ, υπάρχουν 2 κριτήρια
  - κριτήριο του Schur
  - κριτήριο των Routh-Hurwitz

Με χρήση από την θεωρία των εξισώσεων διαφορών αποδεικνύεται ότι αν μια μέθοδος είναι ευσταθής τότε ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών.

• Ισχύει και το αντίστροφο και υπάρχουν δύο τεχνικές αποδείξεις
  • του Dahlquist
  • του Butcher.

Λήμμα (Προκαταρκτικό αποτέλεσμα για την τεχνική του Butcher)
Έστω p, $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k$, ένα πολυώνυμο με $a_k = 1$, το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Θεωρούμε τον $k \times k$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(στην υποδιαγώνιο έχει μονάδες)

τότε υπάρχει νόρμα στον $\mathbb{C}^k$ $(\|\cdot\|)$ τ.ω στην αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα $k \times k$ πινάκων να ισχύει $\boxed{\|A\| \leq 1}$.

• Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του p.

Πρόταση (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων, Butcher)
Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος (1) ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Έστω λ^n, $n = 0, \dots, N-k$ δεδομένες σταθερές και έστω b_i^n, $i = 0, \dots, q$, $n = 0, \dots, N-k$ δεδομένοι αριθμοί τ.ω $|b_i^n| \leq B < \infty$.
Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών:

$$a^k \varphi^{n+k} + \dots + a_k \varphi^n = h\left(b_k^n \varphi^{n+k} + \dots + b_0^n \varphi^n\right) + \lambda^n$$

$$n = 0, \dots, N-k.$$

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω για $h \leq h_0$ να ισχύει:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\varphi^n| \leq C\left[\max_{0 \leq j \leq k-1} |\varphi^j| + N \max_{0 \leq n \leq N-k} |\lambda^n|\right]$$

όπου η C εξαρτάται από τα $b-a$, h_0, B αλλά είναι ανεξάρτητη των h, λ^n, φ^n, N και b_i^n.

Σκιαγράφηση της απόδειξης

Χ.Π.Τ.Γ υποθέτουμε $a_k=1$ και έχουμε $\varphi^{n+k}+a_{k-1}\varphi^{n+k-1}+\dots+a_0\varphi^n=$
$=h(b_k^n\varphi^{n+k}+\dots+b_0^n\varphi^n)+\delta^n$. Με τον πίνακα A του προηγούμενου Λήμματος,

$$Y^j=\begin{pmatrix}\varphi^{j+k-1}\\ \varphi^{j+k-2}\\ \vdots\\ \varphi^j\end{pmatrix},\quad G^j=\begin{pmatrix}h(b_k^n\varphi^{n+k}+\dots+b_0^n\varphi^n)+\delta^n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται μονοβηματική διανυσματική αναδρομική σχέση:

$$Y^{n+1}=AY^n+G^n,\quad 0\le n\le N-k$$

Τώρα με τη νόρμα που εξασφαλίζεται από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε:

$$\|Y^{n+1}\|\le\underbrace{\|A\|}_{\le 1}\|Y^n\|+\|G^n\|,$$

οπότε

$$\|Y^{n+1}\|\le\|Y^n\|+\|G^n\|$$

Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών στον $\mathbb{C}^k$ και το Λήμμα 2.1 προκύπτει εύκολα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πως από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει η ευστάθεια της μεθόδου?
(υποθέτοντας ότι ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών)

$$a_ky^{n+k}+\dots+a_0y^n=h[b_kf(t^{n+k},y^{n+k})+\dots+b_0f(t^n,y^n)]$$
$$a_kz^{n+k}+\dots+a_0z^n=h[b_kf(t^{n+k},z^{n+k})+\dots+b_0f(t^n,z^n)]$$

Θέτουμε $\varphi^m=y^m-z^m$, $m=0,\dots,N$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε,

$$a_k\varphi^{n+k}+\dots+a_0\varphi^n=h\{b_k[f(t^{n+k},y^{n+k})-f(t^{n+k},z^{n+k})]+\dots+b_0[f(t^n,y^n)-f(t^n,z^n)]\}$$

Θέτοντας

$$g^m=\begin{cases}\dfrac{f(t^m,y^m)-f(t^m,z^m)}{y^m-z^m}, & \text{για } y^m\ne z^m\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$a_k\varphi^{n+k} + \dots + a_0\varphi^n = h(\underset{\underset{b_k^n}{\shortparallel}}{b_k g^{n+k}}\varphi^{n+k} + \dots + \underset{\underset{b_k^0}{\shortparallel}}{b_0 g^n}\varphi^n) \quad n=0,\dots,N-k$$

Έχουμε:

$$|b_j^m| = |b_j g^{m+j}| = |b_j|\underset{\le L}{|g^{m+j}|}$$

$$\le L \max_{0\le j\le k}|b_j| = B$$

Ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες της προηγούμενης πρότασης με $\lambda^n = 0$. Άρα

$$\max_{0\le n\le N}|\varphi^n| \le C_1 \max_{0\le j\le k-1}|\varphi^j|$$

ή

$$\max_{0\le n\le N}|y^n - z^n| \le C_1' \max_{0\le j\le k-1}|y^i - z^i| \quad \text{άρα ευστάθης.}$$

Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων.

$$a_k, \dots, a_0 \qquad b_k, \dots, b_0$$

Ορίζουμε

$$(L_h y)(t) := \sum_{j=0}^{k}[a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)] \quad , t\in[a, b-kh]$$

Σχόλιο: Σφάλμα συνέπειας:

$$p^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h\sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))$$

Προφανώς:

$$\underbrace{a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n}_{\sum_{j=0}^{n} a_j y^{n+j}} = h\underbrace{[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)]}_{\sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j})}$$

$$p^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^n + jh) - h\sum_{j=0}^{k} b_j y'(t^{n+j})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^n + jh) - h\sum_{j=0}^{k} b_j y'(t^n + jh)$$

$$= \sum_{j=0}^{k}[a_j y(t^n + jh) - h b_j y'(t^n + jh)] = (L_h y)(t^n)$$

Ορισμός (Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου)
Έστω $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ τυχούσα, αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει:
$\exists C' = C'(y)\ \forall t\in[a, b-kh]\ |(L_h y)(t)| \le C' h^{p+1}$,
τότε λέμε ότι η μέθοδος έχει τάξη (ακρίβειας) p.

- Επειδή το σφάλμα συνέπειας εκφράζεται συναρτήσει της y και (η f δεν υπεισέρχεται), ο προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων είναι πολύ εύκολος.

Αναπτύσσοντας τις $y(t+jh)$, $y'(t+jh)$ κατά Taylor (ως προς το σημείο t), παίρνουμε,
$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h\cdot y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \dots$$
με
$$C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$
$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k - (b_0 + b_1 + \dots + b_k)$$
και για $j\ge 2$
$$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$$

Τάξη μεθόδου $= p \iff C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$
και $C_{p+1} \neq 0$

16/12/24

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)\,] \qquad ,\ t\in[a, b-kh]$$

$$\underbrace{p^n = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) - h\sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))}_{= (L_h y)(t^n)}$$

αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε:
$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(t) + \dots$$

Τάξη μεθόδου $= p \iff C_0 = \dots = C_p = 0$ και $C_{p+1} = 0$
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_0$
και $\sigma(z) = b_k z^k + \dots + b_0$

$C_0 = a_0 + \dots + a_k$

$C_1 = \underbrace{a_1 + 2a_2 + \dots + ka_k}_{\rho'(1)} - \underbrace{(b_0 + \dots + b_k)}_{\sigma(1)}$

και για $j \geq 2$:

$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$

Μέθοδος συνεπής: $p \geq 1$

$p \geq 1 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) - \sigma(1) = 0 \Leftrightarrow \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

Μέθοδος συνεπής, αν και μόνο αν:

$\rho(1) = 0$ και $\rho'(1) = \sigma(1)$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μία συγκλίνουσα πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής (χωρίς απόδειξη)

Εδώ θα αποδείξουμε το αντίθετο (αντίστροφο)

Θεώρημα (Σύγκλιση των γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων)

Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$. Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. Τότε, υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $0 \leq h \leq h_0$ να ισχύει:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C \cdot \left\{ h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| \right\}$$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h, N, και y.

Απόδειξη: Έχουμε:

- $\sum_{j=0}^{k} a_j y(t^{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) + \rho^n$

  με $\max_{0 \leq n \leq N-k} |\rho^n| \leq C h^{p+1} \cdot \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|$

- $\sum_{j=0}^{k} a_j y^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y^{n+j})$

Με $\varepsilon^m = y(t^m) - y^m$, αφαιρώντας κατά μέλη τις 2 προηγούμενες σχέσεις, Παρατηρούμε:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \varepsilon^{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} b_j\left[f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) - f(t^{n+j}, y^{n+j})\right] + p^n \Rightarrow$$

Ορίζω:

$$g^m = \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{\underbrace{y(t^m) - y^m}_{=\varepsilon^m}}, & \text{για } y(t^m) \neq y^m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j \varepsilon^{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \underbrace{b_j g^{n+j}}_{= b_j^n} \varepsilon^{n+j} + p^n$$

Τώρα:

$$|g^m| \leq L,$$

Τότε:

$$|b_j^n| \leq L \max_{1\leq l\leq k} |b_l| = B < \infty$$

Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση (σελ 66), ισχύει

$$\max_{0\leq n\leq N} |\varepsilon^n| \leq C\left[N \max_{0\leq n\leq N-k} |p^n| + \max_{0\leq j\leq k-1} |\varepsilon^j|\right]$$

Άρα:

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \tilde{C}\left[NCh^{p+1} \max_{a\leq t\leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j|\right]$$

$$\leq \check{C}\left[C(b-a) h^p \max_{a\leq t\leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j|\right]$$

$$\leq C_1 \left[\qquad + \qquad \right]$$

- Υπολογισμός αρχικών προσεγγίσεων

Για να οδηγηθούμε σε μια τέτοια εκτίμηση σφάλματος της μορφής

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \hat{C} h^p,$$

πρέπει και αρκεί οι αρχικές προσεγγίσεις να είναι τ.ω.

$$\max_{0\leq j\leq k-1} |y(t^j) - y^j| \leq C_2 h^p$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, π.χ. επιλέγοντας $y^0 = y_0$, και υπολογίζοντας τις $y^1, \dots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK τάξης $\geq p-1$ (επειδή τη μέθοδο την εφαρμόζουμε μόνο $k-1$ φορές).

Η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας ευσταθούς, k-βηματικής μεθόδου είναι:

$$\begin{cases} k+1 & \text{για περιττό } k \\ k+2 & \text{για άρτιο } k. \end{cases}$$

Η μέγιστη δυνατή τάξη άμεσης ευσταθούς μεθόδου είναι $\boxed{p=k}$

- Σύμφωνα με τα πολυβηματικών μεθόδων, η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας A-ευσταθούς πολυβηματικής μεθόδου είναι $p=2$!

/——/

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = hf(t^{n+2}, y^{n+2})$$

1) $p=2$ 2) Ευστάθεια;

Λύση

1) $p \geq 2 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ 2a_2 + a_1 = 1 \\ \frac{1}{2}(a_1 + 2^2 a_2) - \frac{1}{1!} 2^1 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 0 \\ 2a_2 + a_1 &= 1 \\ 4a_2 + a_1 &= 4 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}, \boxed{a_1 = -2}, \boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = hf(t^{n+2}, y^{n+2})$$

Δηλαδή είναι μέθοδος ανάδρομων διαφορών

2) Ευστάθεια

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(z) = \frac{3}{2} z^2 - 2z + \frac{1}{2}$$

ρίζες: $\boxed{z_1 = 1}$ $\boxed{z_2 = \frac{1}{3}}$

Ισχύει και αναγκαία συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

$$\ast \quad p(z) = \frac{3}{2} z^2 - 2z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(z^2 - 1) - 2(z-1) + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2}\right)}_{=0}$$

$$= \frac{3}{2}(z-1)(z+1) - 2(z-1)$$

$$= (z-1)\underbrace{\left(\frac{3}{2}(z+1) - 2\right)}_{\frac{3}{2}z + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - 2\right)}_{= -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3z-1)}$$

$\Rightarrow p(z) = \frac{1}{2}(z-1)(3z-1)$ και έτσι βρίσκουμε τις ρίζες

Άσκηση 42

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} a_j y(t + jh) - h b_j y'(t + jh)]$$

Λύση

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[a_j \sum_{\nu=0}^{\tilde p} \frac{(jh)^\nu}{\nu!} y^{(\nu)}(t) - h b_j \sum_{\nu=0}^{\tilde p - 1} \frac{(jh)^\nu}{\nu!} y^{(\nu+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde p + 1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t) + a_j \sum_{\nu=1}^{\tilde p} \frac{(jh)^\nu}{\nu!} y^{(n)}(t) - h b_j \sum_{\nu=0}^{\tilde p - 1} \frac{(jh)^\nu}{\nu!} y^{(\nu+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde p + 1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j y(t) + \sum_{j=0}^{k} \left[a_j \sum_{\nu=1}^{\tilde p} \frac{(jh)^\nu}{\nu!} y^{(n)}(t) - h b_j \sum_{\nu=1}^{\tilde p} \frac{(jh)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} y^{(\nu)}(t) \right] + O(h^{\tilde p + 1})$$

$$= C_0 y(t) + \sum_{\nu=1}^{\tilde p} h^\nu \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{j^\nu}{\nu!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{j^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] y^{(\nu)}(t) + O(h^{\tilde p + 1})$$

(74)

$$= C_0 y(t) + h\Big[\sum_{j=\cancel{0}\,1}^{k} a_j \frac{j^1}{1!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{j^0}{0!}\Big] y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \Big[\sum_{j=\cancel{0}\,1}^{k} a_j \frac{j^v}{v!} - \sum_{j=\cancel{0}\,1}^{k} b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!}\Big] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

γιατί $0^1 = 0$

$$= C_0 y(t) + h\underbrace{\Big[\sum_{j=1}^{k} a_j j - \sum_{j=0}^{k} b_j\Big]}_{C_1} y'(t) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \underbrace{\Big[\frac{1}{v!}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot j^v - \frac{1}{(v-1)!}\sum_{j=1}^{k} b_j\, j^{v-1}\Big]}_{C_v} y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

18/12/14

Άσκηση 4.15

$a_3 = 1$, $a_2 = -\frac{11}{6}$, $a_1 = 1$, $a_0 = -\frac{1}{6}$

$b_3 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{7}{12}$

Ευστάθεια;

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$$

Τώρα

$$p(1) = 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 0$$

Επομένως,

$$p(z) = (z^3 - 1) - \frac{11}{6}(z^2 - 1) + z - 1 \quad + 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow p(z) = (z-1)(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z-1)(z+1) + (z-1)$$

$$= (z-1)\underbrace{\Big[(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z+1) + 1\Big]}_{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{6}(z-1)(6z^2 - 5z + 1)$$

Ρίζες:

$z_1 = 1$

→

$6z^2 - 5z + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \mp 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

z_1, z_2, z_3 απλές ρίζες

και

$|z_i| \leq 1 \quad i = 1, 2, 3$

Συμπέρασμα: Ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άσκηση 4.16

Είναι συνεπής η μέθοδος της προηγούμενης Άσκησης;

Λύση

$p(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$

$\sigma(z) = \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{7}{12}$

Μέθοδος συνεπής $\Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = 0 \quad \checkmark \\ p'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Τώρα: $p'(z) = 3z^2 - \frac{11}{3} z + 1 \Rightarrow$

$$p'(1) = 3 - \frac{11}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

και

$$\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} = \frac{1+2-6+7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Συνεπώς: $\boxed{p'(1) = \sigma(1)}$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 4.21

$a_k, \dots, a_0$, $b_k, \dots, b_0$

Υπόθεση: Μέθοδος ευσταθής και συνεπής.

Ν.Δ.Ο $\quad b_k + \dots + b_0 \neq 0$

Λύση

Απόδειξη

$p(z) = a_k z^k + \dots + a_0$

$\sigma(z) = b_k z^k + \dots + b_0$

Συνέπεια: $\begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(1) = \sigma(1) \end{cases}$

Υποθέτουμε ότι $b_k + \dots + b_0 = 0$, δηλαδή $\sigma(1) = 0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο.

Πράγματι, τότε θα είχαμε:

- $p(1) = 0$
- $p'(1) = 0$

Άρα το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του p, οπότε δεν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, δηλαδή η μέθοδος δεν είναι ευσταθής, άτοπο.

Άσκηση 4.22

f συνεχής και τ.ω. να ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

(+) $\forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2}) \end{cases}$$

Ν.Δ.Ο. Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής

$$g(x)=\frac{3}{2}x-2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}-hf(t^{n+2},x)$$

Κάθε λύση y^{n+2} της $\frac{3}{2}y^{n+2}-2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}=hf(t^{n+2},y^{n+2})$ είναι ρίζα της g, και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα.

Μοναδικότητα: Η $f(t^{n+2},\cdot)$ είναι φθίνουσα,

οπότε η $-h(t^{n+2},\cdot)$ είναι αύξουσα.

$$g(x)=\underbrace{\frac{3}{2}x}_{\text{γνησια αυξουσα}}\underbrace{-2y^{n+1}-\frac{1}{2}y^{n}}_{\text{αύξουσα}}\underbrace{-hf(t^{n+2},x)}_{\text{αύξουσα}}$$

Η g είναι γνησίως αύξουσα

$\Rightarrow$ Η g έχει το πολύ μία ρίζα (λόγω γνησιότητας)

Ύπαρξη: Για $x\le 0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},x)\le -hf(t^{n+2},0)$

οπότε:

$$g(x)\le\frac{3}{2}x-2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}-hf(t^{n+2},0)\to-\infty,\quad x\to-\infty$$

Επομένως, η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

Για $x\ge 0$ έχουμε $-hf(t^{n+2},x)\ge -hf(t^{n+2},0)$

οπότε:

$$g(x)\ge\frac{3}{2}x-2y^{n+1}+\frac{1}{2}y^{n}-hf(t^{n+2},0)\to\infty,\quad x\to\infty$$

οπότε η συνάρτηση λαμβάνει και θετικές τιμές.

Έχουμε μία συνεχή συνάρτηση, η οποία λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών η g λαμβάνει και την τιμή 0, οπότε έχει ρίζα.

Γενική περίπτωση

$$a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + h b_0 f(t^n, y^n)$$

$$\Leftrightarrow a_k y^{n+k} = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \underset{\uparrow \text{δεδομένα}}{G^n}$$

- Θεωρώ

- $g(x) = a_k x - h b_k f(t^{n+k}, x) - G^n$
  - a_k, b_k θετικά
  - a_k, b_k αρνητικά (προσοχή)

Συμπέρασμα: Αν $a_k b_k > 0$ και η f ικανοποιεί την ⊕ τότε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες