4. Πολυβηματικές Μέθοδοι:

• Προκαταρτικά: συμβολισμός και παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad a \leq t \leq b.$$

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + n\cdot h$, $n = 0, \dots, N$

• Διβηματική Μέθοδος: $\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2\cdot h \cdot \overbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}^{= f^{n+1}} \\ \quad n = 0, \dots, N-2 \\ \quad (\text{άμεση}) \end{cases}$

• Πώς προκύπτει;

1. Αριθμητική Διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

τώρα:

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

οπότε:

$$\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστώντας το ≈ με = και τα $y(t^m)$ με y^m οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου.

2. Αριθμητική Ολοκλήρωση:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx 2h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

μέθοδος μέσου.

⋮

- Άλλη μέθοδος:

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt$$

Μέθοδος του Simpson:

$$\int_c^d \varphi(x)dx \approx \frac{d-c}{6} \cdot \left[\varphi(c) + 4\cdot\varphi\left(\frac{c+d}{2}\right) + \varphi(d)\right]$$

Άρα:

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(t^n, y(t^n)) + 4\cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^{n+2}, y(t^{n+2}))\right]$$

Αντικαθιστώντας...

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \qquad \text{Μέθοδος του Simpson.} \\ y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\cdot\left[f(t^{n+2}, y^{n+2}) + 4\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\right] \\ \qquad\qquad n = 0, \ldots, N \end{cases}$$

(πεπλεγμένη)

- $\kappa \in \mathbb{N}$ γενική κ-βηματική μέθοδος
  $\alpha_\kappa, \alpha_{\kappa-1}, \ldots, \alpha_0$
  $\beta_\kappa, \beta_{\kappa-1}, \ldots, \beta_0$

$$(1) \begin{cases} y^0, \ldots, y^{\kappa-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_\kappa\cdot y^{n+\kappa} + \alpha_{\kappa-1}\cdot y^{n+\kappa-1} + \ldots + \alpha_0\cdot y^n = h\cdot\left[\beta_\kappa\cdot f(t^{n+\kappa}, y^{n+\kappa}) \right. \\ \qquad \left. + \ldots + \beta_0\cdot f(t^n, y^n)\right], \quad n = 0, \ldots, N-\kappa \end{cases}$$

<u>Υπόθεση</u>: $\alpha_\kappa = 1$
$|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ (όχι ταυτόχρονα μηδέν)

(i) $\beta_\kappa = 0$: άμεση μέθοδος.
<u>Κόστος</u>: ένας υπολογισμός της f ανά βήμα.

(ii) $\beta_\kappa \neq 0$: πεπλεγμένη μέθοδος

$$\alpha_\kappa \cdot y^{n+\kappa} = h \cdot \beta_\kappa \cdot f(t^{n+\kappa}, y^{n+\kappa}) + \underset{\text{γνωστό.}}{g^n} \quad (*)$$

<u>Γενικά:</u> η υλοποίηση ανα βήμα είναι πολύ λιγότερο δαπανηρή απο τις αντίστοιχες μεθόδους RK.

- Καλά ορισμένες;

Με $\alpha_\kappa = 1$ η $(*)$ γράφεται στη μορφή

$$y^{n+\kappa} = h \cdot \beta_\kappa \cdot f(t^{n+\kappa}, y^{n+\kappa}) + g^n$$

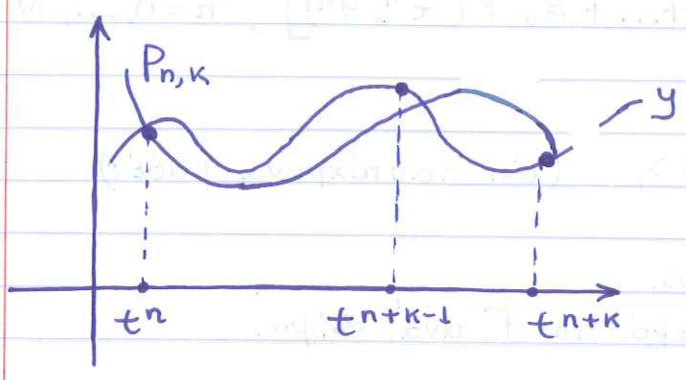
(α) Αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y με σταθερά L τότε για $h \cdot |\beta_\kappa| \cdot L < 1$ το $y^{n+\kappa}$ είναι καλά ορισμένο.

(β) Αν η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz και $\beta_\kappa > 0$ (δηλ. το $\beta_\kappa / \alpha_\kappa$ είναι θετικό) τότε το $y^{n+\kappa}$ είναι καλά ορισμένο χωρίς περιορισμό στο h. Η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.

- <u>Μέθοδοι Ανάδρομων διαφορών:</u>

Έστω ότι $m = 1$.
Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$.
Θεωρούμε το πολυώνυμο $P_{n,\kappa}$ βαθμού το πολύ κ, τ.ώ:

$$P_{n,\kappa}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}) \quad \text{για } i = 0, \dots, \kappa$$



Το $P_{n,\kappa} \in \mathbb{P}_\kappa$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία $t^n, \dots, t^{n+\kappa}$.

Τώρα στη σχέση

$$y'(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$$

προσεγγίζουμε την $y(t^{n+k})$ με $P'_{n,k}(t^{n+k})$

Η $P'_{n,k}(t^{n+k})$ εκφράζεται συναρτήσει των τιμών $y(t^n), \ldots, y(t^{n+k})$ της λύσης. Αντικαθιστώντας στην:

$$P'_{n,k}(t^{n+k}) \approx f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$$

το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m οδηγούμαστε στο βήμα της k-βηματικής μεθόδου ανάδρομων διαφορών:

$y^0, \ldots, y^{k-1}$ δεδομένα

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k})$$

$\beta_k = 1,\ \beta_{k-1} = \ldots = \beta_0 = 0.$

με $\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$ και
$\nabla^j y^n = \nabla^1(\nabla^{j-1} y^n)$

<u>k=1:</u> $\alpha_1 = 1,\ \alpha_0 = -1,\ \beta_1 = 1$ (πεπλ. Euler)

<u>k=2:</u> $\alpha_2 = 1,\ \alpha_1 = -\frac{4}{3},\ \alpha_0 = 1/3,\ \beta_2 = 2/3$

<u>k=3:</u> $\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = -\frac{18}{11},\ \alpha_1 = \frac{9}{11},\ \alpha_0 = -\frac{2}{11},\ \beta_3 = \frac{6}{11}.$

• $$\begin{cases} y^0, \ldots, y^{k-1} \text{ δεδομένα.} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \cdot \sum_{j=0}^{k} \beta_j \cdot f(t^{n+j}, y^{n+j}) \\ n = 0, \ldots, N-k \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $\boxed{11.12.14}$

λέγονται μέθοδοι του Adams.

<u>$\beta_k = 0$:</u> μέθοδοι των Adams - Bashforth.

$b_k \neq 0$: μέθοδοι των Adams - Moulton.

$k=2$: $y^{n+2} - y^{n+1} = h\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \frac{1}{2}\cdot f(t^n, y^n)\right]$

$k=3$: $y^{n+3} - y^{n+2} = h\cdot\left[\frac{23}{12}\cdot f(t^{n+2}, y^{n+2}) - \frac{4}{3}\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) + \right.$

$\left. + \frac{5}{12}\cdot f(t^n, y^n)\right]$.

$k=2$: $y^{n+2} - y^{n+1} = h\cdot\left[\frac{5}{12}\cdot f(t^{n+2}, y^{n+2}) + \frac{2}{3}\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) - \right.$
$(b_k \neq 0)$

$\left. - \frac{1}{12}\cdot f(t^n, y^n)\right]$

- $y^0, \dots, y^{k-1}$ δεδομένα.

$$y^{n+k} - y^{n+k-2} = h\cdot\sum_{j=0}^{k} b_j\cdot f(t^{n+j}, y^{n+j}),\ n=0,\dots,N-k.$$

$b_k = 0$: μέθοδοι του Nystrom

$b_k \neq 0$: » των Milne-Simpson.

~ Ευστάθεια: (πολυβηματικών μεθόδων)

- Υπόθεση: Η $f: [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y.
- Ορισμός: (ευστάθεια πολυβημ. μεθόδων)

Μια k-βηματική μέθοδος που περιγράφεται απο τις σταθερές $a_k, \dots, a_0$, $b_k, \dots, b_0$, λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται απο την f, αλλά είναι ανεξάρτητη του h (του N), τ.ώ για ακολουθίες (y^n), (z^n) που ικανοποιούν τις ① και :

σελ. 95

② $z^0, \dots, z^{k-1}$ δεδομένα

$$a_k\cdot z^{n+k} + \dots + a_0\cdot z^n = h\cdot\left[b_k\cdot f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0\cdot f(t^n, z^n)\right]$$

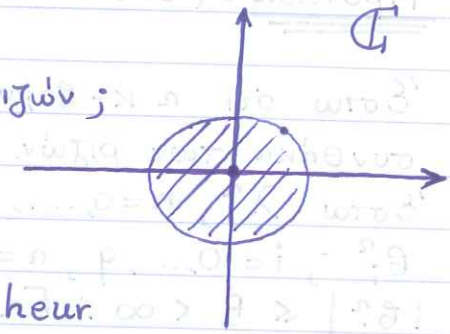
$n=0,\dots,N-k.$

να ισχύει:

$$\max_{0\leq n\leq N} |y^n - z^n| \leq C \cdot \max_{0\leq j\leq k-1} |y^j - z^j|$$

• **Ορισμός:** (συνθήκη των ριζών)

Λέμε ότι η κ-βηματική μέθοδος (1) ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο $\rho(z) = a_k \cdot z^k + \ldots + a_0$ ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών, δηλ. αν • $\rho(z)=0 \Rightarrow |z| \leq 1$.
• $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$.



• Πώς ελέγχουμε την συνθήκη των ριζών;

* για μικρό κ βρίσκουμε τις ρίζες.

* για μεγάλο κ: 1. Κριτήριο του Sheur.
2. » των Routh-Hurwitz.

• Με γνώσεις από τη Θεωρία των εξισώσεων διαφορών, αποδεικνύεται ότι αν μια μέθοδος είναι ευσταθής τότε ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών.

• Ισχύει και το αντίστροφο.
Υπάρχουν δύο τεχνικές απόδειξης:
1. του Dahlquist.
2. του Butcher.

• **Λήμμα:** (προκαταρτικό αποτέλεσμα για την τεχνική του Butcher.)

Έστω ρ, $\rho(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \ldots + a_{k-1} \cdot z^{k-1} + a_k \cdot z^k$, ένα πολυώνυμο με $a_k = 1$, το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Θεωρούμε τον $(k \times k)$ πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Τότε υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^k$ τ.ώ για την αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα $k \times k$ πίνακων να ισχύει : $\|A\| \leq 1$.

- Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του ρ.

⇝ <u>Πρόταση</u> : (ευστάθεια πολυβημ. μεθόδων, Butcher)

Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος ①, ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.
Έστω λ^n, $n=0,\dots,N-k$, δεδομένες σταθερές και έστω b_i^n, $i=0,\dots,q$, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένοι αριθμοί τ.ώ $|b_i^n| \leq B < \infty$. Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών.

$$a_k \cdot \psi^{n+k} + \dots + a_k \cdot \psi^n = h \cdot (b_k^n \cdot \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \cdot \psi^n) + \lambda^n.$$

για $n = 0, \dots, N-k$.

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ώ για $h \leq h_0$, να ισχύει:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\psi^n| \leq C \cdot \left[\max_{0 \leq j \leq k-1} |\psi^j| + N \cdot \max_{0 \leq n \leq N-k} |\lambda^n| \right]$$

όπου η C εξαρτάται απο τα $b-a$, h_0, B αλλά είναι ανεξάρτητη των h, λ^n, ψ^n, N και b_i^n

- <u>Σκιαγράφηση της απόδειξης:</u>

χ.π.τ.γ υποθέτουμε ότι $a_k = 1$ και έχουμε :

$$\psi^{n+k} + a_{k-1} \cdot \psi^{n+k-1} + \dots + a_0 \cdot \psi^n = h \cdot (b_k^n \cdot \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \cdot \psi^n) + \lambda^n.$$

Με του πίνακα A του προηγουμένου Λήμματος,

$$Y^j = \begin{pmatrix} \psi^{j+k-1} \\ \psi^{j+k-2} \\ \vdots \\ \psi^{j} \end{pmatrix}, \quad G^i = \begin{pmatrix} h(b_k^n \cdot \psi^{n+k} + \ldots + b_0^n \cdot \psi^n) + \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται μονοβηματική διανυσματική αναδρομική σχέση:

$$Y^{n+1} = A \cdot Y^n + G^n, \quad 0 \leq n \leq N-k.$$

Τώρα με την νόρμα που εξασφαλίζεται απο το προηγούμενο βήμα έχουμε:

$$\| Y^{n+1} \| \leq \underbrace{\| A \|}_{\leq 1} \cdot \| Y^n \| + \| G^n \|$$

Τότε:

$$\| Y^{n+1} \| \leq \| Y^n \| + \| G^n \|$$

χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών στον $\mathbb{C}^k$ και το λήμμα 2.1 προκύπτει "εύκολα" το ζητούμενο αποτέλεσμα.

- Πώς απο την προηγούμενη προκύπτει η ευστάθεια της μεθόδου; (υποθέτοντας ότι ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών)

$$a_k \cdot y^{n+k} + \ldots + a_0 \cdot y^n = h \cdot \left[b_k \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \ldots + b_0 \cdot f(t^n, y^n) \right]$$

$$a_k \cdot z^{n+k} + \ldots + a_0 \cdot z^n = h \cdot \left[b_k \cdot f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \ldots + b_0 \cdot f(t^n, z^n) \right]$$

Θέτουμε $\psi^m := y^m - z^m$, $m = 0, \ldots, N$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε:

$$a_k \cdot \psi^{n+k} + \ldots + a_0 \cdot \psi^n = h \cdot \left\{ b_k \cdot \left[f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k}) \right] + \right.$$

$$\left. + \ldots + b_0 \cdot \left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n) \right] \right.$$

Θέτοντας:

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y^m) - f(t^m, z^m)}{y^m - z^m} & \text{για } y^m \neq z^m \\ 0 & \text{, διαφορετικά} \end{cases}$$

η προηγούμενη σχέση λαμβάνει τη μορφή:

$$\alpha_K \cdot \psi^{n+K} + \ldots + \alpha_0 \cdot \psi^n = h \cdot \Big(\underbrace{\beta_K \cdot g^{n+K}}_{= \beta_K^n} \cdot \psi^{n+K} + \ldots + \underbrace{\beta_0 \cdot y^n}_{= \beta_0^n} \cdot \psi^n \Big)$$

$n = 0, \ldots, N-K$

Έχουμε:

$$|\beta_j^m| = |\beta_j \cdot g^{m+j}| = |\beta_j| \cdot \underbrace{|g^{m+j}|}_{\leq L}$$

$$\leq L \cdot \max_{0 \leq j \leq K} |\beta_j| = B$$

Ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του προηγούμενης πρότασης με $\lambda^n = 0$. Άρα:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |\psi^n| \leq C \cdot \max_{0 \leq j \leq K-1} |\psi^j|$$

ή

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C \cdot \max_{0 \leq j \leq K-1} |y^j - z^j|$$

⤳ Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση : (πολυβημ. μεθόδων)

$\alpha_K, \ldots, \alpha_0$, $\beta_K, \ldots, \beta_0$

Ορίζουμε:

$$(L_h \cdot y)(t) := \sum_{j=0}^{K} \left[\alpha_j \cdot y(t + j \cdot h) - h \cdot \beta_j \cdot y'(t + j \cdot h) \right]$$

$$t \in [a, b - K \cdot h]$$

• <u>Σχόλιο:</u> (σφάλμα συνέπειας)

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y(t^{n+j}) - h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))$$

$$\underbrace{a_k \cdot y^{n+k} + \dots + a_0 \cdot y^n}_{\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot y^{n+j}} = h \cdot \underbrace{\left[b_k \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 \cdot f(t^n, y^n) \right]}_{\sum_{j=0}^{k} b_j \cdot f(t^{n+j}, y^{n+j})}$$

Προφανώς:

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y(t^n + j \cdot h) - h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot y'(t^{n+j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y(t^n + j \cdot h) - h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot y'(t^n + j \cdot h) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[a_j \cdot y(t^n + j \cdot h) - h \cdot b_j \cdot y'(t^n + j \cdot h) \right] = (L_h \cdot y)(t^n)$$

• <u>Ορισμός:</u> (τάξη ακρίβειας πολυβημ. μεθόδου)

Έστω $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ τυχούσα, αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει

$$\exists\, C = C(y) \quad \forall t \in [a, b - k \cdot h] \quad |(L_h \cdot y)(t)| \leq C \cdot h^{p+1}$$

τότε λέμε ότι η μέθοδος έχει τάξη (ακρίβειας) p.

Επειδή το σφάλμα συνέπειας εκφράζεται συναρτήσει της y μόνο (η f δεν υπεισέρχεται) ο προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας πολυβημ. μεθόδων είναι πολύ εύκολες.

Αναπτύσσοντας της $y(t + j \cdot h)$, $y'(t + j \cdot h)$ κατά Taylor (ως προς το σημείο t) παίρνουμε:

$$(L_h \cdot y)(t) = C_0 \cdot y(t) + C_1 \cdot h \cdot y'(t) + C_2 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot y''(t) + \dots$$

με $C_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_k = \rho(1)$

$$C_1 = \overbrace{a_1 + a_2 + \ldots + k \cdot a_k}^{=\rho'(1)} - \underbrace{(b_0 + b_1 + \ldots + b_k)}_{=\sigma(1)}$$

και για $j \geq 2$

$$C_j = \frac{1}{j!} \cdot (a_1 + 2^j \cdot a_2 + 3^j \cdot a_3 + \ldots + k^j \cdot a_k) -$$

$$- \frac{1}{(j-1)!} \cdot (b_1 + 2^{j-1} \cdot b_k + \ldots + k^{j-1} \cdot b_k)$$

- Τάξη μεθόδου $= p \iff C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0$ και $C_{p+1} \neq 0$.

- $(Ly)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j \cdot y(t + j \cdot h) - h \cdot b_j \cdot y'(t + j \cdot h)]$ $\boxed{16.12.14}$ $t \in [a, b - k \cdot h]$

- $$\underbrace{\rho^n = \sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y(t^{n+j}) - h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))}_{= (Ly)(t^n)}$$

- Μέθοδος συνεπής: $p \geq 1$
  $p \geq 1 \iff C_0 = C_1 = 0 \iff \begin{cases} \overset{C_0}{\rho(1)} = 0 \\ \rho'(1) - \sigma(1) = 0 \iff \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$
  Χαρακτ. πολ. μεθόδου:
  $\rho(z) = a_k \cdot z^k + \ldots + a_0$.
  $\sigma(z) = b_k \cdot z^k + \ldots + b_0$.
  Μέθοδος συνεπής ανν: $\rho(1) = 0$ και $\rho'(1) = \sigma(1)$.

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια συγκλίνουσα πολυβημ. μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής.

- Εδώ θα αποδείξουμε το αντίστροφο.

⇝ <u>Θεώρημα</u>: (Εκτίμηση του σφάλματος πολυβημ. μεθόδου)

Έστω ότι η κ-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει

τάξη ακρίβειας $p \geq 1$. Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.
Τότε, υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ώ για $0 < h \leq h_0$ να ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C \cdot \Big\{ h^p \cdot \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| \Big\}$$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h, N και y.

~> <u>Απόδειξη</u>: Έχουμε:

- $$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y(t^{n+j}) = h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) + \rho^n$$

  με $\max_{0 \leq n \leq N-k} |\rho^n| \leq C \cdot h^{p+1} \cdot \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|$

και

- $$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot y^{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot f(t^{n+j}, y^{n+j})$$

Με $\varepsilon^n := y(t^m) - y^m$, αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \varepsilon^{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \left[f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) - f(t^{n+j}, y^{n+j}) \right] + \rho^n$$

ορίζουμε:

$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{y(t^m) - y^m} & \text{για } y(t^m) \neq y^m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άρα:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j \cdot \varepsilon^{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^{k} \underbrace{b_j \cdot g^{n+j}}_{= b_j^n} \cdot \varepsilon^{n+j} + \rho^n$$

Τώρα:

$|g^m| \leq L$ οπότε: $|b_j^n| \leq L \cdot \max_{1 \leq i \leq k} |b_i| = B < \infty$

Επομένως σύμφωνα με την πρόταση 4.1. ισχύει

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \tilde{C} \cdot \left[N \cdot \max_{0\le n\le N-k} |p^n| + \max_{0\le j\le k-1} |\varepsilon^j| \right]$$

Άρα:

$N \cdot h = b - a$

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \tilde{C} \cdot \left[N \cdot C \cdot h^{p+1} \cdot \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1} |y(t^j) - y^j| \right]$$

$$\le \tilde{C} \cdot \left[\underbrace{C(b-a) \cdot h^p \cdot \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)|} + \underbrace{\max_{0\le j\le k-1} |y(t^j) - y^j|} \right]$$

$$\le C_1 \cdot [\ \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ ]$$

- Υπολογισμός αρχικών προσεγγίσεων.

Για να οδηγηθούμε σε μια εκτίμηση σφάλματος της μορφής.

$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \hat{C} \cdot h^p$, πρέπει κ' αρκεί οι αρχικές να είναι τ.ώ να ισχύει:

$$\max_{0\le j\le k-1} |y(t^j) - y^j| \le C_2 \cdot h^p$$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί π.χ. επιλέγοντας $y^0 = y_0$, και υπολογίζοντας της $y^1, \ldots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK τάξης $\ge p-1$ (επειδή τη μέθοδο την εφαρμόζουμε μόνο $k-1$ φορές)

Η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας ευσταθούς k-βηματικής μεθόδου είναι:

$$\begin{cases} k+1 & \text{για περιττό } k. \\ k+2 & \text{για άρτιο } k. \end{cases}$$

Η μέγιστη δυνατή τάξη άμεσης ευσταθούς μεθόδου είναι $p = k$.

Σοβαρό μειονέκτημα πολυβημ. μεθόδων: η μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας μιας Α-ευσταθούς πολυβημ. μεθόδου είναι $p = 2$.

ΤΕΛΟΣ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

~ *!ΤΕΛΟΣ!* ~

~ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. ~

~ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ. ~

~ 2014 - 2015. ~

~ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ by ~

~ George! ~