3ο Κεφάλαιο 23/11/14

Μέθοδοι των Runge-Kutta

3.1. Προκαταρκτικά: Συμβολισμός και παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

(Butcher)

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Έστω $\tau_1, \dots, \tau_q \in \mathbb{R}$ (κατά κανόνα $0 \le \tau_i \le 1$) $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, q$ και $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$

Για $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα που ακολουθούν με τους αντίστοιχους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

$$\int_0^1 \psi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} b_j\, \psi(\tau_i)$$

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\psi(\tau_j), \qquad i = 1, \dots, q$$

Δηλαδή: τα τ_i είναι κόμβοι σε όλους αυτούς τους τύπους ολοκλήρωσης τα b_i είναι βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0,1]$ και τα a_{ij}, $j = 1, \dots, q$ είναι τα βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$

Σε μορφή μητρώου:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

($q^2 + 2q$ παράμετροι)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,q} \in \mathbb{R}^{q,q}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \dfrac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$\boxed{t^{n,i} = t^n + \tau_i h,}$ $i = 1, \dots, q \rightarrow$ ενδιάμεσοι κόμβοι

$y^0 = y_0$

$y^n \rightarrow y^{n+1}$ Βήμα της μεθόδου t^n $t^{n,i}$ t^{n+1}

$$\begin{cases} y^{n,i} := y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q & (1) \\ y^{n+1} := y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & (2) \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-1$

Πώς οδηγούμαστε στη μέθοδο δηλαδή στις (1) και (2);

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\underset{t = t^n + hs}{=} h \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds$$

Άρα $y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \underbrace{\int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds}_{\approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(\underbrace{t^n + \tau_j h}_{t^{n,j}}, y(\underbrace{t^n + \tau_j h}_{t^{n,j}}))}$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) \approx y(t^n) + \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$, το $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,j})$ με $y^{n,j}$ οδηγούμαστε στην (1)

Σχετικά με τη (2) έχουμε

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t)) \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \underset{t = t^n + hs}{=} h \int_0^1 \underbrace{f(t^n + hs, y(t^n + h}_{\approx \sum_{i=1}^{q} b_i f(\underbrace{t^n + \tau_i}_{t^{n,i}}}$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i + f(t^{n,i}, \underbrace{y^{n,i}}_{\approx y^{n,i}}))$$ Αντικαθιστούμε.

$y^0 = y_0$

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i=1,\dots,q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-1$

Στην περίπτωση συστημάτων ΣΔΕ με $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ τα $y^n, y^{n,i} \in \mathbb{R}^m$

Ειδική περίπτωση: A γνήσια κάτω τριγωνικός δηλ $a_{ij} = 0$ για $j \geq 0$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h a_2 \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,3} = y^n + h a_3 \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h a_{32} \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ y^{n,q} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q-1} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{cases}$$

Τα ενδιάμεσα στάδια $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά (δεν απαιτείται επίλυση συστήματος)

Αυτές οι μέθοδοι λέγονται άμεσες μέθοδοι RK

Όλες οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες

- Ειδική περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων:

  A κάτω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για $j > i$

  Αυτές οι μέθοδοι λέγονται ημιπεπλεγμένες.

  $y^{n,1} = y^n + h a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \rightsquigarrow y^{n,1}$

  $y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, \underset{\text{γνωστό}}{y^{n,1}}) + h a_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \rightsquigarrow y^{n,2}$

  $\vdots$

  $y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, \underset{\text{γνωστά}}{y^{n,j}}) + h a_{qq} f(t^{n,q}, y^{n,q}) \rightsquigarrow y^{n,q}$

Στη γενική περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους (στη βαθμωτή περίπτωση).
Στην περίπτωση ημιπεπλεγμένων μεθόδων το σύστημα αποσυνδέεται και αρκεί να επιλύσουμε q εξισώσεις.

Παραδείγματα μεθόδων R-K.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

- τάξη ακρίβειας $p \geq 1$, $b_1 + \dots + b_q = 1$.
- Συνήθως ισχύει $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{iq} = \tau_i$, $i = 1, \dots, q$

⇓

οι πίνακες είναι σύμφωνα με αυτά

1. $q = 1$.

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad b \longrightarrow 1$$

άμεση μέθοδος

$$① \begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(\underset{t^n}{t^{n,1}}, \underset{y^n}{y^{n,1}}) \end{cases}$$

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$

Άμεση μέθοδος του Euler. $\boxed{p = 1.}$

2. $q = 1$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{array}\right\} \Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$$

$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$

πεπλεγμένη μέθοδος Euler

3. $q = 1$

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(\underset{t^n + \frac{h}{2}}{t^{n,1}}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(\underset{t^n + \frac{h}{2}}{t^{n,1}}, y^{n,1}) \end{cases}$$

4. $q = 2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow y^{n,2} = y^{n+1}$ άρα θα έχουμε $y^{n+1} = y^n + hf(t$ … $+ \frac{h}{2} f^2(t^n$ …

Μέθοδος του τραπεζίου

$$\left.\begin{array}{l} hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = 2y^{n,1} - 2y^n \\ hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^{n+1} - y^n \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^{n-1} - 2y^n = y^{n+1} - y^n \Rightarrow$$

$2y^{n,1} = y^{n+1} + y^n \Rightarrow \boxed{y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n, y^{n+1})}$

Άρα θα έχουμε $y^{n+1} = y^n + hf(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n, y^{n+1}))$ μέθοδος του μέσου

5. $q = 2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

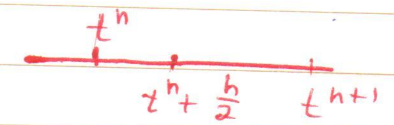
άμεση μέθοδος γιατί ο πίνακας είναι γνήσια κάτω τριγωνικός

$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(\underbrace{t^{n,1}}_{=t^n}, \underbrace{y^{n,1}}_{=y^n})$$

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,2}, \underbrace{y^{n,2}}_{= y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)})$$

Άρα $y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \boxed{y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)}\right)$

- άμεση μέθοδος του μέσου
- βελτιωμένη μέθοδος του Euler $(p=2)$



27/11/2014

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

$t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$

$$y^0 = y_0$$
$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \qquad (*)$$
$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$$
$(**)$

Παραδείγματα

6.
$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ τότε $p=3$. Για αυτήν την επιλογή οι μέθοδοι λέγονται (2,3) DIRK. (διαγώνια πεπλεγμένες)

$\mu \in \mathbb{R}$

Για όλα τα άλλα μ : $p = 2$.

SOS

7.
$$
\begin{array}{cc|c}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \mu & \frac{1}{2} - \mu \\
\frac{1}{4} + \mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$ είναι η μόνη μέθοδος με $q = 2$ και $p = 2q = 4$

Η μέθοδος λέγεται μέθοδος RK (Gauss-Lagandre) δύο (σημείων) σταδίων

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2} + \mu\right)$$ ακριβής για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3

8. για ιστορικούς λόγους (δεν χρησιμοποιούνται καν)

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
-1 & 2 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

Kutta τρίτης τάξης (1η μέθοδος)

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} &
\end{array}
$$

Heun τρίτης τάξης (2η μέθοδος)

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\
\hline
\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} &
\end{array}
$$

Ralston τρίτης τάξης (3η μέθοδος)

$q=4$

9.

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

άμεση

κλασική μέθοδος RK

$p=4$

3.2 Επιλυσιμότητα και ευστάθεια μεθόδων RK.

• Επιλυσιμότητα

Στην περίπτωση άμεσων μεθόδων RK, τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά οπότε οι μέθοδοι είναι καλά ορισμένες για οποιοδήποτε h.

Θα αποδείξουμε ότι για αρκετά μικρό h και f που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και οι πεπλεγμένες μέθοδοι είναι καλά ορισμένες

(+) $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Πρόταση (Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων) αναφέρομαι σε πεπλεγμένες μεθόδους

Έστω ότι ισχύει η (+) και ότι $h < \frac{1}{f}$ με

$f := L \cdot \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ τότε το σύστημα (*) λύνεται

μονοσήμαντα ως προς $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$

Απόδειξη Θεωρούμε την απεικόνιση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

$$F_i(x) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, x_j), \quad i = 1, \dots, q$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_q)^T$ και $F(x) = (F_1(x), \dots, F_q(x))^T$

τότε κάθε λύση (*) είναι σταθερό σημείο (διάνυσμα του $\mathbb{R}^q$) της F και αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Οπότε το (*) θα λύνεται μονοσήμαντα.

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot [f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)]$$

οπότε $|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\leq L \cdot |x_j - \tilde{x}_j|}$

Άρα

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|x_j - \tilde{x}_j|}_{\leq \|x - \tilde{x}\|_\infty}$$

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot \underbrace{\left(L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\leq \gamma} \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_i |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \leq \underbrace{\gamma \cdot h}_{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

άρα η F είναι συστολή $(\mathbb{R}^q, \|\,\|_\infty)$ οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

- Ευστάθεια

Ορισμός (Ευστάθεια μεθόδων RK) : Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής αν για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών ① και υπό τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης υπάρχει μια σταθερά C, ανεξάρτητη του h τέτοια ώστε για ακολουθίες $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$ που ικανοποιούν (**) και

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \text{ δεδομένο} \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}), \quad i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

ισχύει ότι $\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C |y^0 - z^0|$ ②

Πρόταση (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Θεωρούμε μια μέθοδο RK και υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες της προηγούμενης πρότασης. Έστω $y^0, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που ορίζονται στην (**) και $z^0, \dots z^N$ τ.ω.

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \\ z^{n,i} = z^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \quad i=1,\dots,q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$$ με $\rho^0, \dots \rho^{N-1} \in \mathbb{R}$.

Τότε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h και των $y^0, \dots, y^N, z^0, \dots, z^n, \rho^0, \dots, \rho^{N-1}$ τ.ω.

(3) $$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 \cdot |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho^n|$$

παρατήρηση Για $\rho^0 = \dots = \rho^{N-1} = 0$ η (3) οδηγεί στην (2)

Απόδειξη αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})]$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})|}_{\le L |y^{n,j} - z^{n,j}|}$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \underbrace{\left(L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\gamma} \max_{1 \le \ell \le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma \cdot h \cdot \max_{1 \le \ell \le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma \cdot h \max_{1 \le \ell \le q} |y^{n,\ell} - z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - \gamma h)}_{>0} \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n|$$

Για $h \le h_0 < \frac{1}{\gamma}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le C |y^n - z^n|}$$ για $n = 0, \dots, N-1$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$y^{n+1}-z^{n+1}=y^n-z^n+h\sum_{i=1}^{q} b_i\,[f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})]-\rho^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\le|y^n-z^n|+h\sum_{i=1}^{q}|b_i|\underbrace{|f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})|}_{\le L|y^{n,i}-z^{n,i}|}+|\rho^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\le|y^n-z^n|+hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\underbrace{|y^{n,i}-z^{n,i}|}_{\le G|y^n-z^n|}+\max_{0\le m\le N-1}|\rho^m|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\le\Big(1+h\underbrace{GL\sum_{i=1}^{q}|b_i|}_{=G'}\Big)|y^n-z^n|+\underbrace{\max_{0\le m\le N-1}|\rho^m|}_{=K}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 παίρνουμε

$$\max_{0\le n\le N}|y^n-z^n|\le\underbrace{e^{G'(b-a)}}_{=G_1}|y^0-z^0|+\underbrace{\frac{e^{G'(b-a)}-1}{G'h}}_{=G_2}\max_{0\le m\le N-1}|\rho^m|$$

Για 2η Πρόοδο ως εδώ

3.3. Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων RK

27/11/2014

$$\begin{cases} \eta^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, \eta^{n,j}) \quad i=1,\dots,q \\ \delta^n = [y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t^{n,i}, \eta^{n,i})] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

δ^n : σφάλμα συνέπειας
τοπικό σφάλμα
—||— διακριτοποίησης

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και y είναι αρκετά ομαλές.
Τάξη ακρίβειας p της μεθόδου RK λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει μια εκτίμηση της μορφής

(4) $\max\limits_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C} h^{p+1}$ με $\tilde{C}$ ανεξάρτητο του h (εξαρτούμενο από το πρόβλημα) για όλα τα προβλήματα αρχικών τιμών που ικανοποιούν τις συνθήκες μας.

Παρατήρηση $p \geq 1 \Leftrightarrow b_1+b_2+\dots+b_q = 1$

Θεώρημα (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδων RK)
Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και η λύση y του προβλήματος (1) είναι αρκετά ομαλή. Έστω ότι το h είναι τ.ω. $\gamma h < 1$. Τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C}\left[e^{C'(b-a)} - 1\right] h^p$$

με $\tilde{C}$ όπως στην (4) και C' όπως στην (3) (στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης)

Απόδειξη

$$J^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, J^{n,j})$$

$$i=1,\dots,q$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, J^{n,i}) - \delta^n$$

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση δηλαδή την ③ με $z^m = y(t^m)$ και $p^m = -\delta^m$ και παίρνουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le C_1 |\cancel{y^0 - y(a)}|^{0} + \frac{C_2}{h} \underbrace{\max_{0\le m\le N-1} |\delta^m|}_{\le \tau \cdot h^{p+1}}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le \tau \, C_2 \, h^p$$

αντικαθιστώ

2/12/2014

Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μεθόδων RK

Γενικά σχόλια

- $p \le 2q$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια. Αν $p \le q$ για άμεσες μεθόδους.
- Ακριβέστερα άνω φράγματα της p προκύπτουν εύκολα με τον τρόπο που θα γνωρίσουμε αργότερα όταν θα αναφερθούμε στη συνάρτηση ευστάθειας^r μιας μεθόδου RK.
- $p \ge 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$.
- Η τάξη ακρίβειας p μπορεί να προσδιοριστεί με κατάλληλα αναπτύγματα Taylor. Για μεγάλο q οι πράξεις γίνονται πολύ πολύπλοκες (οι πράξεις διευκολύνονται χρησιμοποιώντας τα λεγόμενα δένδρα του Butcher με τα οποία δεν θα ασχοληθούμε)
- Οι λεγόμενες απλοποιημένες συνθήκες μπορούν να ελεγχθούν εύκολα και οδηγούν γενικά σε κάτω φράγματα για την p. Για ορισμένες ιδιαίτερα χρησιμοποιούμενες στην πράξη

οικογένειες μεθόδων RK. οι απλοποιημένες συνθήκες οδηγούν στη σωστή τάξη p (και όχι απλώς σε κάτω φράγματά της)

- Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω.

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1}, \quad \ell=0,\dots,\tilde{p}-1 \quad \text{Τότε } \boxed{p \leq \tilde{p}}$$

SOS

Παράδειγμα (Η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου $\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$)

(Ξέρουμε ότι $1 \leq p \leq 2$)

$$\begin{cases} J^{n,1} = y(t^n) + h\frac{1}{2} f(t^{n,1}, J^{n,1}) \\ \delta^n = [y(t^n) + h f(t^{n,1}, J^{n,1})] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Έχουμε:

$$f(t^{n,1}, J^{n,1}) = f(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, J^{n,1}))$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, J^{n,1}) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} [f(t^n, y(t^n)) + O(h)] \cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2} [f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))] + O(h^2)$$

Επομένως αντικαθιστώντας στη σχέση για το δ^n έχουμε:

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} [f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))] + O(h^3)$$
$$- [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= \frac{h^2}{2} \underbrace{[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)]}_{\overset{!!}{0}} \circledast + O(h^3)$$

$$= O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

Ξέρουμε ότι $y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \underbrace{y'(t)}_{= f(t, y(t))}$

άρα η $\circledast$ κάνει όντως μηδέν.

• $\begin{cases} y'(t) = 3t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$ Λύση $y(t) = t^3$

$$\delta^n = y(t^n) + h \cdot 3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1})$$
$$= (t^n)^3 + 3h(t^n + \tfrac{h}{2})^2 - (t^n + h)^3$$
$$= \dots = -\frac{h^3}{4}$$
$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{4} h^3 \Rightarrow \boxed{p \le 2}$$

SOS

Παράδειγμα (μέθοδος τραπεζίου)

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$y^{n,1} = y(t^n)$$
$$y^{n,2} = y(t^n) + \frac{h}{2}[f(\underbrace{t^{n,1}}_{t^n}, \underbrace{y^{n,1}}_{y(t^n)}) + f(\underbrace{t^{n,2}}_{t^{n+1}}, y^{n,2})]$$

$$\delta^n = y(t^n) + \frac{h}{2}[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})] - y(t^{n+1})$$
$$= y(t^n) + \frac{h}{2}[f(t^n, y(t^n)) + \boxed{f(t^n + h, y^{n,2})]} - y(t^{n+1})$$

Έχουμε $f(t^n + h, y^{n,2}) = f(t^n + h, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^{n,2}, y^{n,2})}_{f(t^n, y(t^n)) + O(h)})$

$$= f(t^n + h, y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + O(h^2))$$
$$= f(t^n, y(t^n)) + h f_t(t^n, y(t^n)) + h f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη σχέση δ^n παίρνουμε:

$$\delta^h = \cancel{y(t^n)} + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \cancel{f(t^n, y(t^n))} + \frac{h^2}{2}[\cancel{f_t(t^n, y(t^n))} +$$

$$+ \cancel{f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))}] + O(h^3) - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''(t^n)} + O(h^3)]$$

$$= O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 & 0 \leq t \leq 1 \qquad y(t) = t^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\delta^h = \underset{(t^n)^3}{\underset{\shortparallel}{y(t^n)}} + \frac{h}{2}[\underset{3(t^n)^2}{\underset{\shortparallel}{f(t^{n,1})}} + \underset{3(t^n+h)^2}{\underset{\shortparallel}{f(t^{n,2})}}] - \underset{(t^n+h)^3}{\underset{\shortparallel}{y(t^{n+1})}} = \dots = \frac{h^3}{2}$$

$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{2} h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$ ακριβώς $p=2$ για το συγκεκριμένο παράδειγμα

Θεώρημα (Απλοποιημένες συνθήκες)

Έστω $p, s, r \geq 1$ τ.ω.

(1) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k = \frac{1}{k+1}$ για $k=0, \dots, p-1$

(2) $\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \tau_j^k = \frac{\tau_i^{k+1}}{k+1}$, $1 \leq i \leq q$ για $k=0, \dots, s-1$

(3) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k \cdot a_{ij} = \frac{b_j(1-\tau_j^{k+1})}{k+1}$, $1 \leq j \leq q$ και για $k=0, \dots, r-1$

(4) $p \leq r+s+1$ και $p \leq 2s+2$

Τότε η τάξη της μεθόδου είναι (τουλάχιστον) p

Οι (1) - (4) λέγονται απλοποιημένες συνθήκες και ικανές για τάξη ακριβείας p.

- Αν ισχύουν οι (1), (2), (3) τότε η τάξη είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$
- $\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i)$ Για $\varphi = x^k$ έχουμε: $\frac{1}{k+1} \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k$

Πόρισμα

α) Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1). Αν ισχύουν οι (2) με $S=p-1$ τότε η τάξη της μεθόδου είναι p.

β) Έστω q' το πλήθος των τ_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τους (κάθε τιμή την μετράω μία φορά). Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1) και ισχύουν οι (2) με $S=q'$ τότε η τάξη της μεθόδου είναι p.

γ) Υπάρχει ακριβώς μία μέθοδος με τάξη $p=2q$ (όλες οι άλλες έχουν τάξη $p<2q$). Τα τ_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη αντίστοιχα του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss στο $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.

Τα a_{ij} κατασκευάζονται ώστε να ισχύει η (2) με $S=q$. Αυτή είναι η οικογένεια μεθόδων R-K Gauss-Legendre.

Περιοχή ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις του εκθετικού

$$\begin{cases} y'=\lambda y, & t\geq 0 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad \text{με } \lambda\in\mathbb{C},\ h>0$$

$$\begin{cases} y^{n,i}=y^n+h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\lambda y^{n,j}, & i=1,\dots,q \\ y^{n+1}=y^n+h\sum_{i=1}^{q} b_i\lambda y^{n,i} \end{cases}$$

Έχουμε:

$$y^{n,i}=y^n+\lambda h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y^{n,j} \quad i=1,\dots,q \iff$$

$$\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ y^{n,2}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^n\\ y^n\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}+\lambda h\cdot A\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ y^{n,2}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix} \iff$$

$$(I_q-\lambda h A)\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ y^{n,2}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix}=y^n\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}}_{=e}$$

Υπόθεση: το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A.

Τότε ο πίνακας $I_q - \lambda h A$ είναι αναστρέψιμος και έχουμε

$$\circledast \quad \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n \cdot (I_q - \lambda h A)^{-1} e$$

Άρα

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} b_i y^{n,i} \right) = b^T \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + \lambda h \cdot b^T \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \overset{\circledast}{=} y^n + \lambda h \, b^T \cdot y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} e$$

$$= y^n \left[1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e \right]$$

$$\oplus \quad y^{n+1} = \left[1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e \right] y^n$$

Θέτω $r(z) := 1 + z\, b^T (I_q - z A)^{-1} e$ και γράφουμε την $\oplus$ στη μορφή $\boxed{y^{n+1} = r(\lambda h) \cdot y^n}$

4/12/2014

Άσκηση 3.12

A	τ
b_c	

Ν.Δ.Ο. $p \geq 1 \iff b_1 + \dots + b_q = 1$

$$\mathcal{J}^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \mathcal{J}^{n,j})$$

$$i = 1, \dots, q$$

$$\delta^n = \left[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \mathcal{J}^{n,i}) \right] - y(t^{n+1})$$

Προφανώς $\mathcal{J}^{n,i} = y(t^n) + O(h)$ και $t^{n,i} = t^n + \tau_i h$ οπότε

$$\delta^n = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^n + \tau_i h, y(t^n) + O(h))}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} + O(h^2) - y(t^{n+1}) =$$

$\Rightarrow$

$= \cancel{y(t^n)} + h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) y'(t^n) + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + hy'(t^n) + O(h^2)]$

$= h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) \underbrace{y'(t^n)}_{\neq 0} + O(h^2)$

Άρα για $y'(t^n) \neq 0$ έχουμε $\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i = 1}$

Άσκηση 3.13

$$\begin{cases} y'(t) = 1 & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση $y(t) = t$.

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$, $n = 0, \dots, N$

$y^N \approx y(1) = 1$

Ν.Δ.Ο. $y^N \to y(1)$, $N \to \infty \Leftrightarrow p \geq 1$.

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$y^0 = 0$

$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot 1$, $n = 0, \dots, N-1$

Άρα $y^n = nh \sum_{i=1}^{q} b_i$, $n = 0, \dots, N$ τετριμμένη επαγωγή

Επομένως $y^N = \underbrace{Nh}_{=1} \sum_{i=1}^{q} b_i = \sum_{i=1}^{q} b_i$ οπότε $y^N \to y(1)$, $N \to \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = y(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i = 1}$ Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι $p \geq 1$

Άσκηση 3.14

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b & \end{array} \qquad J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, J^{n,j}),$$
$$i = 1, \ldots, q$$

Ν.Δ.Ο. • $\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - J^{n,i}| \leq C h$

• $\max_{n} |y(t^{n,i}) - J^{n,i}| \leq C h^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i,$

$$i = 1, \ldots, q$$

Έχουμε $J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \underbrace{f(t^n + \tau_j h, y(t^n) + O(h))}_{f(t^n, y(t^n)) + O(h)}$

$$\Rightarrow J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{"y'(t^n)} + O(h^2)$$

$\Rightarrow J^{n,i} = y(t^n) + h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right) \cdot y'(t^n) + O(h^2)$

Άρα

• $y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i h) = y(t^n) + \tau_i h\, y'(t^n) + O(h^2)$

$$\Rightarrow J^{n,i} = y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) + O(h^2) + h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

$\Leftrightarrow$

$$J^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - \tau_i\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

Από εδώ έπονται αμέσως οι δύο ζητούμενες εκτιμήσεις.

Άσκηση 3.15

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

$(p \geq 1)$

Είναι συνεπής; και γιατί;

Έχουμε $\sum_{i=1}^{3} b_i = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

$\Leftrightarrow 1 = 1.$

Η μέθοδος έχει $p \geq 1$ άρα η μέθοδος συνεπής

Άσκηση 3.2

$$\begin{array}{c|c}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

Ν.Δ.Ο $p = 1.$

$$J^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^{n,1}, J^{n,1})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^{n,1}, J^{n,1}) - y(t^{n+1})$$

Άρα

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^n + \tfrac{1}{3}h, y(t^n) + O(h)) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + O(h^2)]$$

$$= O(h^2)$$ Συμπέρασμα $\boxed{p \geq 1}$

Θεωρώ το πρόβλημα

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \leq t \leq 1. \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση $y(t) = t^2$

$$\delta^n = y(t^n) + h\, 2t^{n,1} - y(t^{n+1})$$

$$= (t^n)^2 + 2h(t^n + \tfrac{1}{3}h) - (t^n + h)^2 = \dots = -\tfrac{1}{3}h^2$$

(10) Συμπέρασμα $|\delta^n| = \frac{1}{3}h^2 \Rightarrow \boxed{p \leq 1}$ Άρα $\boxed{p = 1}$

• $\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Λύση προβλήματος: $y(t) = e^{\lambda t}$

$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$ $h > 0$

$y^{n+1} = y^n [1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e]$, $n \geq 0$

$e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$

Θέτουμε $r(z) = 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} e$

Συνάρτηση ευσταθείας της μεθόδου (ανεξάρτητη του τ)

Έχουμε $\boxed{y^{n+1} = r(\lambda h) y^n}$ βήμα μεθόδου

Περιοχή ευσταθείας: $S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$

Η μέθοδος είναι A-ευσταθής αν $S \supset \mathbb{C}^- = \{ z \in \mathbb{C} : Re z \leq 0 \}$

Τι μορφή έχει η r;

Θέτουμε $\omega = (I_q - zA)^{-1} e$

Έχουμε $\boxed{(I_q - zA)\omega = e}$ (*)

Λύνουμε το (*) με τη μέθοδο του Cramer. Οι παρονομαστές είναι όλοι: $\det(I_q - zA)$ το οποίο είναι πολυώνυμο ως προς z βαθμού $\leq q$

Οι αριθμητές είναι πολυώνυμα βαθμού $\leq q-1$

Συμπέρασμα: Η r είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα βαθμού $\leq q$

Σφάλμα Συνέπειας: (στην ειδική περίπτωση με βήμα μεθόδου $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$)

$\delta^n = r(\lambda h) y(t^n) - y(t^{n+1})$

Άρα $\delta^n = r(\lambda h) e^{\lambda t^n} - e^{\lambda t^n + \lambda h}$

$= [r(\lambda h) - e^{\lambda h}] e^{\lambda t^n}$

Συμπέρασμα: $\delta^n = O(h^{p+1}) \overset{\text{ισοδύναμα}}{\iff}$

$r(z) - e^z = O(|z|^{p+1}) \quad z \to 0$

Η συνθήκη $r(z) - e^z = O(|z|^{p+1})$ $z \to 0$ είναι αναγκαία, για να έχει η μέθοδος τάξη ακρίβειας p.

Ειδική περίπτωση
Άμεσες μέθοδοι RK

A γνήσια κάτω τριγωνικός
zA γνήσια κάτω τριγωνικός

$I_q - zA$ κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.
Άρα $\det(I_q - zA) = 1$.
Συμπέρασμα : Η r. είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ q

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου είναι p. Τότε

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1} z^{p+1} + \dots + C_q z^q$$

Συμπέρασμα $p \le q$
Μάλιστα αν ισχύει $p = q$ τότε $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^q}{q!}$

- Έστω $p \geq 1$ (συνεπής)

Τότε $|r(z)| \to \infty$ για $z \to \infty$ οπότε η περιοχή ευστάθειας είναι φραγμένη.
Επομένως δεν υπάρχει (συνεπής) A-ευσταθής άμεση μέθοδος !
Γενικά, αν ο βαθμός του αριθμητή της συνάρτησης ευστάθειας είναι γνήσια μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή τότε η S είναι φραγμένη, οπότε η μέθοδος δεν είναι A- ευσταθής.

Συναρτήσεις ευστάθειας

- Άμεση μέθοδος Euler : $r(z) = 1 + z$
- πεπλεγμένη μέθοδος Euler : $r(z) = \frac{1}{1-z}$
- πεπλ. μέθοδος μέσου : $r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$
- μέθοδος τραπεζίου : $r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$

Προσεγγίσεις Padé

Μια συνάρτηση $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$ με $m, \ell \in \mathbb{N}_0$,

λέγεται **προσέγγιση Padé** της εκθετικής συνάρτησης e^z, αν ισχύει
$$e^z - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1}) \text{ για } z \to 0$$

Για κάθε $m, \ell \in \mathbb{N}_0$ η αντίστοιχη προσέγγιση Padé του εκθετικού (της e^z) είναι μοναδικά ορισμένη. Είναι μάλιστα γνωστοί οι τύποι που δίνουν τα P και Q.

Κατά κανόνα (αλλά όχι πάντα) η συνάρτηση ευστάθειας r είναι στοιχείο του πίνακα Padé της e^z.

Σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν: βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος ή κατά ένα μεγαλύτερος ή κατά δύο μεγαλύτερος από τον βαθμό του αριθμητή.

Η μέθοδος RK Gauss-Legendre με q στάδια έχει $p=2q$ οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα η r είναι η αντίστοιχη προσέγγιση Padé με βαθμό αριθμητή και παρονομαστή $=q$. Άρα οι μέθοδοι αυτές είναι A-ευσταθής.

Γενικά, μια μέθοδος RK με συνάρτηση ευστάθειας r είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν:
- $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
- Η r δεν έχει πόλους με αρνητικό πραγματικό μέρος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (πόλος μιας ρητής συνάρτησης λέγεται μια ρίζα του παρονομαστή, όχι ρίζα αριθμητή)

9/12/2014

B-ευστάθεια Ορισμός: μια μέθοδος RK $\dfrac{A \mid \tau}{b^T \mid}$ λέγεται αλγεβρικά ευσταθής αν

α) $b_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, q$

β) Ο $q \times q$ πίνακας M με στοιχεία $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$
$i, j = 1, \ldots, q$

είναι μη αρνητικά ορισμένος δηλαδή

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0$$

Τώρα ισχύουν

α) Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής $\Rightarrow$ Μέθοδος B-ευσταθής

β) Αν τα $\tau_1, \ldots, \tau_q$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει και το αντίστροφο

B-ευστάθεια $\Rightarrow$ αλγεβρική ευστάθεια

Παραδείγματα

1. Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

α) $b_1 = 1 \geq 0$

β) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1 = 1 \geq 0$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής οπότε και B-ευσταθής

2. Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

α) $b_1 = 1 \geq 0$

β) $m_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = 0 \geq 0$

Συμπέρασμα: αλγεβρικά ευσταθής άρα και B-ευσταθής

3. Μέθοδος του τραπεζίου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

α) ικανοποιείται

β) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_2 a_{21} - b_1 b_1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Τώρα για $x = \binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2$

$$\left(M\binom{1}{0}, \binom{1}{0}\right) = m_{11} = -\frac{1}{4} < 0$$

ο πίνακας δεν είναι μη αρνητικά ημιορισμένος οπότε η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής. Επειδή $\tau_1 \neq \tau_2$ συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής.

Όλες οι μέθοδοι RK Gauss-Legendre είναι B-ευσταθείς.

Άσκηση 3.3

$q=2$

	0	0	0
	a_{21}	0	τ_2
	b_1	b_2	

Να βρω όλες τις παραμέτρους έτσι ώστε: $\boxed{\text{τάξη } p=2}$

$y^{n,1} = y(t^n)$ $\qquad t^n \quad y(t^n)$

$y^{n,2} = y(t^n) + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$\delta^n = y(t^n) + h b_1 f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h b_2 f(t^{n,2}, y^{n,2}) - y(t^{n+1})$

Άρα: $\delta^n = y(t^n) + h b_1 f(t^n, y(t^n)) + h b_2 f(t^n + \tau_2 h, y(t^n) + h a_{21} f(t^n, y(t^n))) - y(t^n)$

$= \cancel{y(t^n)} + h b_1 y'(t^n) + h b_2 [\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \tau_2 h f_t(t^n, y(t^n)) + h a_{21} f(t^n, y(t^n)) \cdot$

$\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)] - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^2)]$

$= h(b_1 + b_2 - 1)\cdot y'(t^n) + h^2 [b_2 \tau_2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} f(t^n, y(t^n)) - \frac{1}{2} y''(t^n)] + O(h^3)$

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t) \end{array}\right\}$$

$f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot$
$\cdot f_y(t^n, y(t^n))$

$\neq 0 \quad \Delta \quad \neq 0$

$= h(b_1 + b_2 - 1) y'(t^n) + h^2 (b_2 \tau_2 - \frac{1}{2}) f_t(t^n, y(t^n)) + h^2 (b^2 a_{21} - \frac{1}{2}) f(t^n, y(t^n)) \cdot$

$\cdot \underbrace{f_y(t^n, y(t^n))}_{\neq 0} + O(h^3)$

Άρα $\delta^n = O(h^3)$ αν $b_1 + b_2 = 1$

$b_2 \tau_2 = \frac{1}{2}$

$b_2 \alpha_{21} = \frac{1}{2}$

Για $b_2 \in \mathbb{R}$, $b_2 \neq 0$ αυτές οι σχέσεις γράφονται στη μορφή:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 1 - b_2 \\ \alpha_{21} &= \tau_2 = \frac{1}{2b_2} \end{aligned}\right\} \boxed{p \geq 2}$$

$$\begin{cases} y' = y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(t) = e^t$$

$$\delta^n = y(t^n) + hb_1 y(t^n) + hb_2 \big(\underbrace{y^{n,2}}_{= y(t^n) + h\alpha_{21} y^{n,1},\ y^{n,1} = y(t^n)}\big) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h\underbrace{b_1 y(t^n) + hb_2}_{=1} y(t^n) + h^2 \underbrace{b_2\alpha_{21}}_{=\frac{1}{2}} y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h y(t^n) + \frac{1}{2} h^2 y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) e^{t^n} - e^h \cdot e^{t^n}$$

$$= \left(1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h\right) e^{t^n}$$

$$= -\frac{h^3}{6} e^{\xi} e^{t^n} \Rightarrow |\delta^n| \geq ch^3 \rightarrow p \leq 2$$

Τώρα $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} e^{\xi}$ με $\xi \in (0, h)$

Συμπέρασμα $\boxed{p = 2}$

Άσκηση 3.32

3/12	-1/12	1/3
3/4	1/4	1
3/4	3/4	

α) $b_1 \cdot b_2 \geq 0$

β) $m_{11} = m_{22} = 1/16$

$m_{12} = m_{21} = -1/16$

Άρα $(Mx, x) = \dots = \frac{1}{16}(x_1 - x_2)^2 \geq 0$

οπότε ο M είναι μη αρνητικά ημιορισμένος

Συμπέρασμα Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής

Κεφάλαιο 4ο

Πολυβηματικές Μέθοδοι

Προκαταρκτικά: Συμβολισμοί του παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Διβηματική μέθοδος

y^0, y^1 δεδομένα

$$y^{n+2} - y^n = 2h \underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{= f^{n+1}}, \quad n = 0, \dots, N-2$$

Πώς προκύπτει; Με αριθμητική διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Τώρα,

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

οπότε $\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

αντικαθιστώντας $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου