25/11/2024

Ύλη 2ης ΕΕ
Κεφάλαιο 2
+
παράγραφοι 3,1,

3. Μέθοδοι των Runge-Kutta

3.1 Προκαταρκτικά Συμβολισμός και παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Έστω $\tau_1, \dots, \tau_q \in \mathbb{R}$ (κατά κανόνα $0 \le \tau_i \le 1$), $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i,j = 1,\dots,q$ και $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$.
Για $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα που ακολουθούν με τους αντίστοιχους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

$$\int_0^1 \varphi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i)$$

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \varphi(\tau_j), \qquad i = 1, \dots, q$$

Δηλαδή τα τ_i είναι κόμβοι σε όλους αυτούς τους τύπους ολοκλήρωσης, τα b_i είναι βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0,1]$ και τα a_{ij} $j = 1, \dots, q$ είναι τα βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.
Σε μορφή πίνακα:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,q} \in \mathbb{R}^{q,q}$$

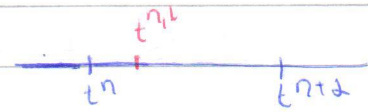
$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$t^{n,i} = t^n + \tau_i h, \quad i = 1, \dots, q$$

$y^0 = y_0$

$y^n \to y^{n+1}$ Βήμα της μεθόδου



$$A \begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, y^{n,j}), & i = 1, \dots, q \quad (1) \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & n = 0, \dots, N-1 \quad (2) \end{cases}$$

Πως οδηγούμαστε στη μέθοδο; δηλαδή στις (1) και (2);

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow$$

$$y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\, dt = h \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\, ds$$

Θέτω $t = t^n + hs$

Άρα

$$y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \underbrace{\int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\, ds}_{\simeq \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(\underbrace{t^n + \tau_j \cdot h}_{t^{n,j}},\, y(\underbrace{t^n + \tau_j \cdot h}_{t^{n,j}}))}$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) \simeq y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))$$

Αντικαθιστώντας το $\simeq$ με $=$ το $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,j})$ με $y^{n,j}$ οδηγούμαστε στην (1)

Σχετικά με την (2) έχουμε:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = h\int_0^1 f(t^n+hs, y(t^n+hs))\,ds$$

$t' = t^n + hs$

$$\approx \sum_{i=1}^{q} b_i f(\underbrace{t^n+\tau_i h}_{t^{n,i}}, f(\underbrace{t^n+\tau_i h}_{t^{n,i}}))$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \underbrace{y(t^{n,i})}_{\approx y^{n,i}})$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$, το $y(t^n)$ με y^n και το $y(t^{n,i})$ με $y^{n,i}$, οδηγούμαστε στην (9)

$$y^0 = y_0$$

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i=1,\dots,q \\ y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$$n = 0,\dots,N-1$$

Στην περίπτωση συστήματος Σ.Δ.Ε με $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, τα $y^n, y^{n,i} \in \mathbb{R}^m$.

Ειδική περίπτωση: Α γνήσια κάτω τριγωνικός δηλαδή $a_{ij}=0$ για $j \geq i$. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + ha_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,3} = y^n + ha_{31} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + ha_{32} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h\sum_{j=1}^{q-1} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \end{cases}$$

Τα ενδιάμεσα στάδια $y^{n,i}$ υπολογίζονται αυθόρμητα (δεν απαιτείται επίλυση συστήματος)

Άρα οι μέθοδοι λέγονται άμεσες. μέθοδοι R.K

ενώ οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες.

• Ειδικές περιπτώσεις πεπλεγμένων μεθόδων

Α κάτω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij}=0$ για $j>i$. Αυτές οι μέθοδοι λέγονται ημιπεπλεγμένες

$$y^{n,1} = y^n + h a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$ λύνω και βρίσκω το $y^{n,1}$

$$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, \underset{\uparrow \text{γνωστό}}{y^{n,1}}) + h a_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2})$$ → λύνω και βρίσκω το $y^{n,2}$

$\vdots$

$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} b_{qj} f(t^{n,j}, \underset{\text{γνωστά}}{y^{n,j}}) + h a_{qq} f(t^{n,q}, y^{n,q})$$ λύνω και βρίσκω το $y^{n,q}$

Στη γενική περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους (στην χειρότερη περίπτωση).
Στην περίπτωση ημιπεπλεγμένων μεθόδων το σύστημα αποσυνδέεται και αρκεί να λύσω q εξισώσεις (μόνες τους).

Παραδείγματα μεθόδων RK

• τάξη ακρίβειας $p \geq 1 \Rightarrow$
$b_1 + \dots + b_q = 1$.
• Συνήθως ισχύει ότι
$a_{i,1} + a_{i2} + \dots + a_{i,q} = \tau_i$
$i = 1, \dots, q$

1) $q=1$

0	0
	1

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot 1 \cdot f(\overset{t^n}{t^{n,1}}, \overset{y^n}{y^{n,1}}) \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$ ρητή μέθοδος του Euler

2) $q=1$

1	1
	1

$$\left.\begin{aligned} y^{n,1} &= y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} &= y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$ πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

56

3) $q=1$

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(\overset{t^n+\frac{h}{2}}{t^{n,1}}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + h f(\overset{t^n+\frac{h}{2}}{t^{n,1}}, y^{n,1}) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = 2y^{n,1} - 2y^n \\ hf(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^{n+1} - y^n \end{array}\right\} \Rightarrow 2y^{n,1} - 2y^2 = y^{n+1} - y^n$$

$$\Rightarrow y^{n+1} + y^n = 2y^{n,1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})}$$

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}))$ Μέθοδος του μέσου

4) $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow y^{n,2} = y^{n+1}$

Άρα:

$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n) + \frac{h}{2} f(t^{n+1}, y^{n+1})$ Μέθοδος του τραπεζίου.

5) $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(\overset{t^n}{t^{n,1}}, \overset{y^n}{y^{n,1}})$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n,2}, \underset{y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)}{y^{n,2}})$

Άρα

$$y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \boxed{y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)}\right)$$

• Άμεση μέθοδος του μέσου
• Βελτιωμένη μέθοδος του Euler

t^n — $t^n + \frac{h}{2}$ — t^{n+1}

Η βελτίωση είναι ότι ($p=2$)

27/11/2014

(1) $\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$,
$n = 0, \dots, N$

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

$t^{n,i} = t^n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$

$$\left.\begin{array}{l} y^0 = y_0 \\ \boxed{y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})} \; * \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{array}\right\} (**)$$

Παράδειγμα

6)
$$\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \lambda \\ 1-2\lambda & \lambda & 1-\lambda \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Για $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, τότε $p=3$. Για αυτήν την επιλογή οι μέθοδοι λέγονται (2,3) DIRK (Διαγώνια πεπλεγμένοι).
Για όλα τα άλλα
λ: $p = 2$,
$\in \mathbb{R}$

7) $\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-t & \frac{1}{2}-t \\ \frac{1}{4}+t & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+t \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$

με $t=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Είναι η μόνη μέθοδος με $q=2$ και $p=2q=4$. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος RK Gauss-Legendre δύο (σημείων) σταδίων.

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}+t\right)$$

ακριβής μέθοδος για τα πολυώνυμα βαθμού ≤ 3

//Για ιστορικούς λόγους η παρακάτω

8) $\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$ μέθοδος Kutta τρίτης τάξης.

$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$ Μέθοδος Heun τρίτης τάξης

$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \end{array}$ Μέθοδος Ralston τρίτης τάξης

9. $\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$ κλασική μέθοδος RK ($p=4$), άσκ.

3.2 Επιλυσιμότητα και ευστάθεια μεθόδων RK

• Επιλυσιμότητα

Στην περίπτωση άμεσων μεθόδων RK, τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, οπότε οι μέθοδοι είναι καλά ορισμένες για οποιοδήποτε h.

- Θα αποδείξουμε ότι για αρκετά μικρό h και f που ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz και οι πεπλεγμένες μέθοδοι είναι καλά ορισμένες.

(+) $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Πρόταση (Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων)

Έστω ότι ισχύει η (+) και ότι $h < \frac{1}{\gamma}$ με $\gamma := L \cdot \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$. Τότε το σύστημα (*) λύνεται μοναδικά ως προς $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$.

Απόδειξη Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$,

$$F_i(x) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, x_j) \qquad i = 1, \dots, q$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_q)^T$ και

$F(x) = (F_1(x), \dots, F_q(x))^T$.

Τότε κάθε λύση (*) είναι σταθερό σημείο (διάνυσμα του $\mathbb{R}^q$) της F και αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι η F έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, οπότε το (*) θα λύνεται μοναδικά.

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε $F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)]$, οπότε,

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\leq L|x_j - \tilde{x}_j|}$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|x_j - \tilde{x}_j|}_{\leq \|x - \tilde{x}\|_\infty}$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \underbrace{\left(L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\leq \gamma} \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \leq \underbrace{\gamma h}_{<1} \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

Η F είναι συστολή στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$ οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Ευστάθεια

Ορισμός (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής, αν για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών (1) και υπό τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει μια σταθερά C, ανεξάρτητη του h, τέτοια ώστε, για αυθαίρετες $y^0, \dots, y^N$ και $z^0, \dots, z^N$ που ικανοποιούν τις (**) και

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \text{ δεδομένο} \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, g z^{n,i}), \\ \qquad i = 1, \dots, q, \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C |y^0 - z^0|.$$

Πρόταση (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Θεωρούμε μια μέθοδο RK και υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες της προηγούμενης Πρότασης. Έστω $y^0, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που ορίζονται στην (**) και $z^0, \dots, z^N$ τ.ω

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, z^{n,i}) \\ \qquad i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + p^n \end{cases}$$

με $p^0, \dots, p^{N-1} \in \mathbb{R}$.

Τότε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2, ανεξάρτητες του h και τω $y^0, \dots, y^N$ και $z^0, \dots, z^N$ και $p^0, \dots, p^{N-1}$ τ.ω

(3) $$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |p^n|.$$

Παρατήρηση Για $p^0 = \dots = p^{N-1} = 0$, η (3) οδηγεί στην (2)

Απόδειξη:

Αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})]$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| = |y^n - z^n| + h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \underbrace{|f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})|}_{\le L |y^{n,j} - z^{n,j}|}$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n| \cdot h\underbrace{\left(L\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|\right)}_{\gamma} \max_{1\le \ell\le q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n| + \gamma h \max_{1\le \ell\le q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q}|y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n| + \gamma h \max_{1\le \ell\le q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\gamma h)}_{>0} \max_{1\le i\le q}|y^{n,i}-z^{n,i}| \le |y^n-z^n|$$

Για $h\le h_0 < \frac{1}{\gamma}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\max_{1\le i\le q}|y^{n,i}-z^{n,i}| \le C|y^n-z^n|} \qquad n=0,\dots,N-1.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε:

$$y^{n+1}-z^{n+1} = (y^n-z^n)+h\sum_{i=1}^{q} b_i\,[f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})]-p^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le |y^n-z^n| + h\sum_{i=1}^{q}|b_i|\cdot \underbrace{|f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})|}_{\le L|y^{n,i}-z^{n,i}|} + |p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le |y^n-z^n| + hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\underbrace{|y^{n,i}-z^{n,i}|}_{\le C|y^n-z^n|} + \max_{0\le m\le N-1}|p^m|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}| \le \Big(1+h\underbrace{\Big(CL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\Big)}_{C'}\Big)|y^n-z^n| + \underbrace{\max_{0\le m\le N-1}|p^m|}_{=K}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 παίρνουμε

$$\max_{0\le n\le N}|y^n-z^n| \le \underbrace{e^{C'(b-a)}}_{=C_1}|y^0-z^0| + \underbrace{\frac{e^{C'(b-a)}-1}{C'h}}_{=C_2}\max_{0\le m\le N-1}|p^m|$$

3η Πρόοδος

3.3 Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων RK

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ \qquad\qquad\qquad i=1,\dots,q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

δ^n: σφάλμα συνέπειας
τοπικό σφάλμα
» » διακριτοποίησης.

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και y είναι αρκετά ομαλές. Τάξη ακρίβειας p της μεθόδου RK, λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει μια εκτίμηση της μορφής

$$(4)\quad \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C} h^{p+1}$$

με $\tilde{C}$ ανεξάρτητο του h, (εξαρτάται από το πρόβλημα), για όλα τα προβλήματα αρχικών τιμών που ικανοποιούν την συνθήκη Lips.

Παρατήρηση: $p\ge 1 \Leftrightarrow b_1+b_2+\dots+b_q = 1$.

Θεώρημα (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδων RK)
Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και η λύση y του προβλήματος (1) είναι αρκετά ομαλή. Έστω ότι το h είναι αρκετά μικρό τ.ω. $\gamma h<1$. Τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'}\left[e^{C'(b-a)}-1\right]\cdot h^p,$$

με $\tilde{C}$ όπως την (4) και C' όπως στην (3) (στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης)

Απόδειξη

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \\ y(t^{n+1}) = \left[y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\right] - \delta^n \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση δηλαδή την (3) με $z^m = y(t^m)$ και $p^m = -\delta^m$ και παίρνουμε:

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le C_1 |\cancel{y^0 - y(a)}^{\,0}| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le m\le N-1} |\delta^m|$$

$$\le \check{C}\, h^{p+1}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le \check{C} \cdot C_2\, h^p$$

$\boxed{2/12/14}$

Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μεθόδων RK.

• $\boxed{p \le 2q}$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια

$p \le q$ για άμεσες μεθόδους

• Ακριβέστερα άνω φράγματα της p προκύπτουν εύκολα με τον τρόπο που θα γνωρίσουμε αργότερα, όταν θα αναφερθούμε στην ευστάθεια Γ μιας μεθόδου RK.

• $p \ge 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$

Η τάξη ακρίβειας p μπορεί να προσδιοριστεί με κατάλληλο ανάπτυγμα Taylor. Για μεγάλο q_1 οι πράξεις γίνονται πολύ πολύπλοκες. (Οι πράξεις διευκολύνονται χρησιμοποιώντας τα δένδρα (θεωρία) του Butcher με τα οποία δεν θα ασχοληθούμε.)

• Οι λεγόμενες απλοποιημένες συνθήκες, μπορούν να ελεγχθούν εύκολα και οδηγούν γενικά σε κάτω φράγματα για την p. Για ορισμένες ιδιαίτερα χρησιμοποιούμενες στην πράξη οικογένειες μεθόδων RK οι απλοποιημένες συνθήκες οδηγούν στην σωστή τάξη p (και όχι απλώς σε κάτω φράγματα της).

Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω.

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1} \qquad \ell = 0, \dots, \tilde{p}-1$$

Τότε $p \le \tilde{p}$

Παράδειγμα

H (τροποποιημένη μέθοδος του Euler)
(Ξέρουμε ότι $1 \le p \le 2$)

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{cases} \bar{y}^{n,1} = y(t^n) + h\frac{1}{2}f(t^{n,1}, \bar{y}^{n,1}) \\ \delta^n = [y(t^n) + hf(t^{n,1}, \bar{y}^{n,1})] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Έχουμε

$$f(t^{n,1}, \bar{y}^{n,1}) = f(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^{n,1}, \bar{y}^{n,1}))$$

Taylor

$$= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}f(t^{n,1}, \bar{y}^{n,1})f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}[f(t^n, y(t^n)) + O(h)]f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$= y'(t^n) + \frac{h}{2}[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n))f_y(t^n, y(t^n))] + O(h^2)$$

Επομένως αντικαθιστώντας στη σχέση για δ^n έχουμε:

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + \frac{h^2}{2}[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n))f_y(t^n, y(t^n))] + O(h^3)$$

$$- [\cancel{y(t^n)} + \cancel{hy'(t^n)} + \frac{h^2}{2}y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= \frac{h^2}{2}\underbrace{[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n))f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)]}_{\le 0} + O(h^3)$$

$$= O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \ge 2}$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\, y'(t)$$

ισχύει για όλα τα t

$$y'(t) \to f(t, y(t))$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 & 0 \le t \le 9 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση $\quad y(t) = t^3$

$$\delta^n = [y(t^n) + h3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1})]$$
$$= (t^n)^3 + 3h\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - (t^n+h)^3 \underset{\text{ύψωση στο τετράγωνο}}{=} \dots = -\frac{h^3}{4}$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \ge \frac{1}{4}h^3 \Rightarrow \boxed{p \le 2}$$

Παράδειγμα

Μέθοδος τραπεζίου

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\xi^{n,1} = y(t^n)$$
$$\xi^{n,2} = y(t^n) + \frac{h}{2}\left[f(\overset{t^n}{t^{n,1}}, \overset{y(t^n)}{\xi^{n,1}}) + f(\overset{t^{n+1}}{t^{n,2}}, \xi^{n,2})\right]$$

$$\delta^n = y(t^n) + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, \xi^{n,1}) + f(t^{n,2}, \xi^{n,2})\right] - y(t^{n+1})$$
$$= y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}f(t^n + h, \xi^{n,2}) - y(t^{n+1})$$

Έχουμε

$$f(t^n+h, \xi^{n,2}) = f\Big(t^n+h, y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}\underbrace{f(t^{n,2}, \xi^{n,2})}_{f(t^n, y(t^n)) + O}\Big)$$

$$= f\left(t^n+h, y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + O(h^2)\right)$$

Taylor

$$= f(t^n, y(t^n)) + hf_t(t^n, y(t^n)) + hf(t^n, y(t^n))f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην σχέση για το δ^n παίρνουμε

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \underbrace{\frac{h}{2} f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \underbrace{\frac{h}{2} f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \frac{h^2}{2}[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n))]$$
$$+ O(h^3) - [y(\cancel{t^n}) + h y'(\cancel{t^n}) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= O(h^3) \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad y(t) = t^3$$

$$\delta^n = \underset{(t^n)^3}{y(t^n)} + \frac{h}{2}[\underset{3(t^n)^2}{f(t^{n,1})} + \underset{3(t^n h)^2}{f(t^{n,1})}] - \underset{(t^n h)^3}{y(t^{n+1})}$$

$= \ldots$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{2} h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$$

Συμπέρασμα $\boxed{p = 2}$

Θεώρημα (Απλοποιημένες συνθήκες)

Έστω $p, s, r \geq 1$ τ.ω

(1) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k = \frac{1}{k+1}$ για $k = 0, \ldots, p-1$ (βρίσκω το p)

(2) $\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \tau_j^k = \frac{\tau_i^{k+1}}{k+1}$, $1 \leq i \leq q$ για $k = 0, \ldots, s-1$ (βρίσκω το s)

(3) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k a_{ij} = \frac{b_j(1 - \tau_j^{k+1})}{k+1}$, $1 \leq j \leq q$ για $k = 0, \ldots, r-1$ (βρίσκω το r)

(4) $p \leq r+s+1$ και $p \leq 2s+2$

Τότε η τάξη της μεθόδου είναι (τουλάχιστον) p.

Οι (1)→(4) λέγονται "απλοποιημένες" ικανές συνθήκες για τάξη ακρίβειας p.

• Αν ισχύουν οι (1)→(3) τότε η τάξη είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$

• $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \varphi(\tau_i)$

Για $\varphi(x)=x^k$ έχουμε

$$\frac{1}{k+1} \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^k.$$

Πόρισμα

α) Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1). Αν ισχύουν οι (2) με $s=p-1$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι p

β) Έστω q' το πλήθος των τ που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1) και ισχύουν οι (2) με $s=q'$ τότε η τάξη της μεθόδου είναι p.

γ) Υπάρχει ακριβώς μία μέθοδος με τάξη $p=2q$
(όλες οι άλλες έχουν τάξη $p<2q$).
Τα τ_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη, αντίστοιχα, του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss στο $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$. Τα a_{ij} κατασκευάζονται ώστε να ισχύει η (2) με $s=q$.
Αυτή είναι η οικογένεια μεθόδων RK Gauss-Legendre.

Περιοχή ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις του εκθετικού

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad h > 0$

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \lambda y^{n,j} & i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \lambda y^{n,i} \end{cases}$$

Έχουμε

$$y^{n,i} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} a_{ij} y^{n,j} \quad i = 1, \dots, q \iff$$

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \iff$$

$$(I_q - \lambda h A) \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e}$$ μοναδιαίο πίνακα.

Υποθεση το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν ειναι ιδιοτιμη του A.

Τοτε ο $I_q - \lambda h A$ ειναι αντιστρεψιμος και εχουμε

$$(*) \quad \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} e$$

Αρα $y^{n+1} = y^n + \lambda h \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i y^{n,i}}_{= b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + \lambda h b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} y^n + \lambda h b^T y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} e$$

$$= y^n [1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e]$$

$$(*) \quad y^{n+1} = [1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e] \, y^n$$

Θετω $r(z) = 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} e$

και γραφουμε την (*) στην μορφη

$$\boxed{y^{n+1} = r(\lambda z) y^n}$$

4/12/14

Παρασκευή 12/12
Μαθημα 16-18
I_3

Άσκηση 3.12

$$\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b^T & \end{array}$$

Ν.Δ.Ο $p \geq 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$

$$y^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}),$$

$$\delta^n = [y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})] - y(t^{n+1})$$

Προφανώς $y^{n,i} = y(t^n) + O(h)$ και $t^{n,i} = t^n + c_i h$,

οπότε

$$\delta^n = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^n + c_i h, y(t^n) + O(h))}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)} + O(h^2) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) y'(t^n) + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + O(h^2)]$$

$$= h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right) \underbrace{y'(t^n)}_{\neq 0} + O(h^2)$$

Άρα για $y'(t^n) \neq 0$, έχουμε
$\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i = 1}$

Άσκηση 3.13

$$\begin{cases} y'(t) = 1 & , t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση $y(t) = t$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$, $n = 0, \dots, N$

$y^N \simeq y(1) = 1$

Ν.Δ.Ο: $y^N \to y(1)$, $N \to \infty$ $\Leftrightarrow p \geq 1$

Λύση

A	τ
b^T	

$y^0 = 0$

$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot 1 \qquad n=0,\dots,N-1$

Άρα

$y^n = n \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \quad , \qquad n=0,\dots,N \qquad$ τετράγωνη επαγωγή.

Επομένως

$y^N = \underbrace{N \cdot h}_{=1} \sum_{i=1}^{q} b_i = \sum_{i=1}^{q} b_i$

οπότε $\quad y^N \to y(1) \quad , N \to \infty \quad \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = y(1)$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i = 1}$ Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι το $\boxed{p \geq 1}$ άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 3.14

A	τ
b	

$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad i=1,\dots,q$

N.Δ.Ο: $\quad \bullet \max_{n,i} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| \leq C_1 h$

$\bullet \max_{n} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| \leq C_1 h^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i \quad , i=1,\dots,q$

Λύση

$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \underbrace{f(t^n + \tau_j h, y(t^n) + O(h))}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)}$

$\Rightarrow y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h^2)$

$$\Rightarrow Y^{n,i} = y(t^n) + h\Big(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\Big)\cdot y'(t^n) + O(h^2)$$

$$y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i h) = y(t^n) + \tau_i\, h y'(t^n) + O(h^2)$$

Άρα

$$Y^{n,i} = y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) + O(h^2) + h\Big(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\Big) y'(t^n) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow Y^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\Big(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - \tau_i\Big) y'(t^n) + O(h^2)$$

Από εδώ έπονται άμεσα οι δύο ζητούμενες εκτιμήσεις.

$\boxed{\text{Άσκηση 3.15}}$

$$\begin{array}{c|ccc}
- & - & - & - \\
- & - & - & - \\
- & - & - & - \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Είναι συνεπής; και γιατί.

Για να είναι συνεπής πρέπει το άθροισμα των b_i να ισούται με το 1. Άρα:

$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}_{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow p \geq 1$ Άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

$\boxed{\text{Άσκηση 3.2}}$

$$\begin{array}{c|c}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\hline
 & 1
\end{array}$$

Ν.Δ.Ο : $p = 1$.

Λύση

$$Y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^{n,1}, Y^{n,1})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^{n,1}, Y^{n,1}) - y(t^{n+1})$$

Άρα

$$\delta^n = y(t^n) + h f\left(t^n + \tfrac{1}{3}h,\ y(t^n) + O(h)\right) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)}} + O(h^2) - \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + O(h^2)\right]$$

$$= O(h^2) \Rightarrow \boxed{p \geq 1}$$ τουλάχιστον 1.

Τώρα θα αποδείξω ότι δεν μπορεί να είναι πάνω από 1.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t^2$

$$\delta^n = y(t^n) + h\, 2t^{n,1} - y(t^{n+1})$$

$$= (t^n)^2 + 2h\left(t^n + \tfrac{1}{3}h\right) - (t^n + h)^2$$

$$= \ldots$$

$$= -\tfrac{1}{3}h^2$$

$$\Rightarrow |\delta^n| = \tfrac{1}{3}h^2 \Rightarrow \boxed{p \leq 1}$$ το πολύ 1.

Συμπερασματικά $\boxed{p = 1}$

/—/

Θεωρία

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$h > 0$

$$y^{n+1} = y^n\left[1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} e\right], \quad n \geq 0$$

$$e = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$$

Θέτουμε

$$r(z) = 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} e$$

Συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου

(ανεξάρτητη του τ)

Έχουμε

$$y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$$

Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1 \}$$

Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής, αν

$$S \supset \mathbb{C}_- = \{ z \in \mathbb{C} : Re z \le 0 \}$$

- Τι μορφή έχει η r;

Θέσαμε

$$w = (I_q - zA)^{-1} e$$

Έχουμε

$$\boxed{(I_q - zA) w = e} \quad (*)$$

Λύνουμε το (*) με τη μέθοδο του Cramer.

Οι παρανομαστές είναι όλοι: $\det(I_q - zA)$, το οποίο είναι πολυώνυμο ως προς z βαθμού $\le q$

Οι αριθμητές είναι πολυώνυμα βαθμού $\le q-1$

Συμπέρασμα Η r είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρανομαστή πολυώνυμα βαθμού $\le q$

Σφάλμα συνέπειας: $\delta^n = r(\lambda h) y(t^n) - y(t^{n+1})$

Άρα:

$$\delta^n = r(\lambda h) e^{\lambda t^n} - e^{\lambda t^n + \lambda h}$$
$$= [r(\lambda h) - e^{\lambda h}] e^{\lambda t^n}$$

Συμπέρασμα

$$\delta^n = O(h^{p+1})$$

$$r(z) - e^z = O(|z|^{p+1}) \quad z \to 0$$

Η συνθήκη

$$r(z) - e^z = O(|z|^{p+1}), \quad z \to 0,$$

είναι αναγκαία, για να έχει η μέθοδος τάξη ακρίβειας p.

- Άμεσες μέθοδοι RK

A γνήσια κάτω τριγωνικός $\Rightarrow$

zA " " " $\to$

$I_q - zA$ κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο

Άρα:

$$\det(I_q - zA) = 1$$

Συμπέρασμα: Η r είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq q$

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου είναι p. Τότε:

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + c_{p+1} \cdot z^{p+1} + \dots + c_q z^q$$

Συμπέρασμα: $\boxed{p \leq q}$

Μάλιστα αν ισχύει $p = q$, τότε $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^q}{q!}$

• Έστω $p \geq 1$

Τότε $|r(z)| \to \infty$ για $|z| \to \infty$

Οπότε η περιοχή ευστάθειας είναι φραγμένη.

Επομένως δεν υπάρχει (αυτής) Α-ευσταθής άμεση μέθοδος.

Γενικά:

Αν ο βαθμός του αριθμητή της συνάρτησης ευστάθειας είναι γνήσια μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε η S είναι φραγμένη, οπότε η μέθοδος δεν είναι Α-ευσταθής

Συνάρτηση ευστάθειας

Άμεση μέθοδος Euler: $r(z) = 1 + z$

πεπλεγμένη » » : $r(z) = \frac{1}{1-z}$

Μέθοδος του μέσου: $r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$

Μέθοδος του τραπεζίου: $r(z) =$ »

$e^z - r(z) = 1 + z + O(|z|^2)$

$= -\frac{1}{-z+1} =$

$= \cancel{1} + \cancel{z} + O(|z|^2) - (\cancel{1} + \cancel{z} + z^2 + z^3 + \dots)$

$= O(|z|^2)$

Προσεγγίσεις Padé

Μια συνάρτηση $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$

με $m, \ell \in \mathbb{N}_0$, λέγεται προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης e^z αν ισχύει

$$e^z - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1}) \quad \text{για } z \to 0$$

Για κάθε $m, \ell \in \mathbb{N}_0$, η αντίστοιχη προσέγγιση Padé της e^z είναι μοναδικά ορισμένη. Είναι μάλιστα γνωστοί οι τύποι που δίνουν τα P και Q.

Κατά κανόνα (αλλά όχι πάντα) η συνάρτηση ευστάθειας r είναι στοιχείο του πίνακα Padé της e^z. Σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος είναι A-ευσταθής, αν και μόνο αν: βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος ή κατά ένα μεγαλύτερος ή κατά δύο μεγαλύτερος από του αριθμητή.

Η μέθοδος RK Gauss-Legendre με q στάδια έχει $p=2q$, οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η r είναι η αντίστοιχη προσέγγιση Padé με βαθμό αριθμητή και παρονομαστή $= q$. Άρα οι μέθοδοι αυτές είναι A-ευσταθείς.

Γενικά, μια μέθοδος RK με συνάρτηση ευστάθειας r είναι A-ευσταθής, αν και μόνο αν
- $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
- Η r δεν έχει πόλους με αρνητικό πραγματικό μέρος.

(πόλος μιας ρητής συνάρτησης λέγεται μια ρίζα του παρονομαστή της που δεν είναι ρίζα του αριθμητή)

B-ευστάθεια

Ορισμός Μια μέθοδος RK $\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b^T & \end{array}$ λέγεται ~~αλγεβρικά ευσταθής~~ αν:

a) $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, q$

b) Ο $q \times q$ πίνακας M με στοιχεία $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$, $i, j = 1, \dots, q$, δηλαδή είναι ~~μη αρνητικά ορισμένος~~, δηλ

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = \sum_{i,j=0}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0$

Τώρα ισχύουν:

a) Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής $\Rightarrow$ μέθοδος B-ευσταθής

b) Αν τα $c_1, \dots, c_q$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει και το αντίστροφο. B-ευστάθεια $\Rightarrow$ αλγεβρική ευστάθεια.

Παραδείγματα

1) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

a) $b_1 = 1 > 0$

b) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1 = 1 \geq 0$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής, οπότε είναι και B-ευσταθής.

2) Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$

a) $b_1 = 1 \geq 0$

b) $m_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = 0 \geq 0$ ✓

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής, οπότε είναι και B-ευσταθής.

3) Μέθοδος του τραπεζίου

$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$

b) $m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1 b_1$

$= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Τώρα για $x = \binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2$

$$\left(M\binom{1}{0}, \binom{1}{0} \right) = m_{11} = -\frac{1}{4} < 0$$

Ο πίνακας δεν είναι θετικά ημιορισμένος, οπότε η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής.
Επειδή $\tau_1 \neq \tau_2$, συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής.

- Όλες οι μέθοδοι RK Gauss-Legendre είναι B-ευσταθείς.

Άσκηση 3.3

$q = 2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$

Τάξη $\boxed{p=2}$

Λύση

$g^{n,1} = y(t^n)$

$g^{n,2} = y(t^n) + h \cdot a_{21} f(\underset{t^n}{t^{n,1}}, \underset{y(t^n)}{g^{n,1}})$

Το τοπικό σφάλμα είναι:

$\delta^n = y(t^n) + h b_1 f(t^{n,1}, g^{n,1}) + h b_2 f(t^{n,2}, g^{n,2}) - y(t^{n+1})$

Θέλω να δω πότε είναι $\boxed{p=3}$

Άρα:

$\delta^n = y(t^n) + h b_1 f(t^n, y(t^n)) + h b_2 f(t^n + \tau_2 h, y(t^n) + h a_{21} f(t^n, y(t^n))) - y(t^{n+1})$

$= \cancel{y(t^n)} + h b_1 y'(t^n) + h b_2 [\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \tau_2 h f_t(t^n, y(t^n)) + h a_{21} f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)] - y(t^{n+1})$

$y(t^{n+1}) = [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$

$\Rightarrow \delta^n = h(b_1 + b_2 - 1) y'(t^n) + h^2 [b_2 \tau_2 f(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{1}{2} y''(t^n)] + O(h^3)$

$y''(t^n) = f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n)) \Rightarrow$

(29)

$$\Rightarrow \delta^n = h(b_1+b_2-1)\underbrace{y'(t^n)}_{\neq 0} + h^2(b_2\tau_2-\tfrac{1}{2})\underbrace{f_t(t^n,y(t^n))}_{\neq 0} + h^2(b_2a_{21}-\tfrac{1}{2})\underbrace{f(t^n,y(t^n))f_y(t^n,y(t^n))}_{\neq 0} + O(h^3)$$

Συμπέρασμα Άρα $\delta^n = O(h^3)$, αν

$$\left.\begin{aligned} b_1+b_2&=1\\ b_2\tau_2&=\tfrac{1}{2}\\ b_2a_{21}&=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}$$

$y'(t)=f(t,y(t)) \Rightarrow$
$y''(t)=f_t(t,y(t)) + f_y(t,y(t))y'$

Για $b_2\in\mathbb{R}$, $b_2\neq 0$, αυτές οι σχέσεις γράφονται στην μορφή

$$\left.\begin{aligned} b_1&=1-b_2\\ a_{21}&=\tau_2=\frac{1}{2b_2}\end{aligned}\right\}\ \boxed{p\geq 2}$$

$$\begin{cases} y'=y & t\geq 0\\ y(0)=1\end{cases}$$

$$\delta^n = y(t^n) + hb_1y(t^n) + hb_2 f^{n,2} - y(t^{n+1})$$

$y(t^n)+ha_{21}f^{n,1}$, $f^{n,1}=y(t^n)$

$$\Rightarrow \delta^n = y(t^n) + h\underbrace{b_1 y(t^n) + hb_2y(t^n)}_{=1} + h^2\underbrace{b_2a_{21}}_{\frac{1}{2}}y(t^n) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + hy(t^n) + \tfrac{1}{2}h^2y(t^n) - y(t^{n+1})$$
$$= (1+h+\tfrac{h^2}{2})e^{t^n} - e^he^{t^n}$$

$$= (1+h+\tfrac{h^2}{2} - e^h)\underbrace{e^{t^n}}_{\neq 0}$$

Τώρα:

$$e^h = 1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}e^{\xi}\quad \text{με } \xi\in(0,h)$$

Άρα

$$\delta^n = -\frac{h^3}{6}e^{\xi}e^{t^n} \Rightarrow |\delta^n| \geq Ch^3 \rightarrow \boxed{p\leq 2}$$

Συμπέρασμα $\boxed{p=2}$

Άσκηση 3.32

Να αποδείξετε ότι η μέθοδος RK με μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \end{array}$$

ν.δ.ο είναι αλγεβρικά ευσταθής

Λύση

α) $b_1, b_2 \ge 0$ ✓

β) $m_{11} = m_{22} = \frac{1}{16}$

$m_{12} = m_{21} = -\frac{1}{16}$

Άρα

$$(Mx, x) = \frac{1}{16}(x_1 - x_2)^2 \ge 0$$

Οπότε ο M είναι μη αρνητικά ορισμένος

Συμπέρασμα: η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής και B-ευσταθής

4ο Πολυβηματικές μέθοδοι

Προκαταρκτικά: Συμβολισμός και Παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$. (πλέγμα)

Διβηματική μέθοδος

y^0, y^1 δοσμένα

$$y^{n+2} - y^n = 2h \underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{= f^{n+1}}, \quad n = 0, \dots, N-2$$

Πως προκύπτει;

1) Με αριθμητική διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

→