• Η μέθοδος του μέσου είναι και Α-ευσταθής. Μάλιστα στην περίπτωση της $y' = \lambda \cdot y$ συμπίπτει με την μέθοδο του τραπεζίου. Επομένως, έχει περιοχή ευστάθειας $S = \mathbb{C}^-$.

ΤΕΛΟΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

3. Μέθοδοι των Runge-Kutta : ⇐ $\boxed{25.11.14}$

→ 3.1. Προκαταρτικά : Συμβολισμός και παραδείγματα.

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Έστω $\tau_1, \dots, \tau_q \in \mathbb{R}$ (κατά κανόνα $0 \leq \tau_i \leq 1$), $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, \dots, q$, και $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$.
Για $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα που ακολουθούν με τους αντίστοιχους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

$$\int_0^1 \psi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} \underbrace{b_i}_{\text{βάρη}} \overbrace{\psi(\tau_i)}^{\text{κόμβοι.}}$$

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot \psi(\tau_j) \quad \text{για } i = 1, \dots, q$$

Δηλαδή τα τ_i είναι κόμβοι σε όλους αυτούς τους τύπους ολοκλήρωσης, τα b_i είναι βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0,1]$ και τα a_{ij}, $j = 1, \dots, q$, είναι τα βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.

Σε μορφή μητρώου:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,q} \in \mathbb{R}^{q,q}$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + n \cdot h$, $n = 0, \dots, N$

$t^{n,i} := t^n + \tau_i \cdot h$, $i = 1, \dots, q$

$y^0 = y_0$

$y^n \to y^{n+1}$: βήμα της μεθόδου.

$$\left.\begin{array}{ll} ① & y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, y^{n,j})^{(*)}, \quad i = 1, \dots, q \\ ② & y^{n+1} := y^n + h \cdot \sum\limits_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, y^{n,i}), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{array}\right\} (**)$$

- Πως οδηγούμαστε στη μέθοδο, δηλ. στις ① και ②:

$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt$$

Θέτουμε το $t = t^n + h \cdot s$ τότε:

$$= h \cdot \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds$$

Άρα: $y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \cdot \underbrace{\int_0^{\tau_i} f(t^n + h \cdot s, y(t^n + h \cdot s))\,ds}_{\approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^n + \tau_j \cdot h,\, y(t^n + \tau_j \cdot h))}$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) \approx y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))$$

$t^n + \tau_j \cdot h = t^{n,j}$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$, το $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,j})$ με $y^{n,j}$ οδηγούμαστε στην ①.

Σχετικά με την ② έχουμε:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = h \cdot \int_0^1 \underbrace{f(t^n + h\cdot s,\ y(t^n + h\cdot s))}_{= \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(\underbrace{t^n + \tau_i \cdot h}_{=t^{n,i}},\ y(\underbrace{t^n + \tau_i \cdot h}_{=t^{n,i}}))}\,ds$$

$t = t^n + h\cdot s$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, \underbrace{y(t^{n,i})}_{\approx y^{n,i}})$$

Αντικαθιστώντας .....

$y^0 = y_0$

$y^n \to y^{n+1}$

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, y^{n,j}) & \text{για } i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, y^{n,i}) & \text{για } n = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Στην περίπτωση συστημάτων Σ.Δ.Ε. με $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y^n, y^{n,i} \in \mathbb{R}^m$

→ Ειδική περίπτωση: A γνήσια κάτω τριγωνικός
δηλ. $a_{ij} = 0$ για $j \geq i$

Τότε έχουμε:

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + h \cdot a_{21} \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$y^{n,3} = y^n + h \cdot a_{31} \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h \cdot a_{32} \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2})$

$\vdots$

$$y^{n,q} = y^n + \sum_{j=1}^{q-1} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Τα ενδιάμεσα στάδια $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά (δεν απαιτείται επίλυση συστήματος)

Αυτές οι μέθοδοι λέγονται άμεσες μέθοδοι RK.
Όλες οι άλλες λέγονται πεπλεγμένες.

→ Ειδική Περίπτωση: (πεπλεγμ. μεθόδων)

A κάτω τριγωνικός, δηλ. $a_{ij}=0$ για $j>i$
Αυτές οι μέθοδοι λέγονται ημιπεπλεγμένες.

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h\cdot a_{11}\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \rightsquigarrow y^{n,1} \\ y^{n,2} = y^n + h\cdot a_{21}\cdot f(t^{n,1}, \underset{\uparrow \text{ γνωστό}}{y^{n,1}}) + h\cdot a_{22}\cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \rightsquigarrow y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h\cdot \sum_{j=1}^{q-1} a_{ij}\cdot f(t^{n,j}, \underbrace{y^{n,j}}_{\text{γνωστά}}) + h\cdot a_{qq}\cdot f(t^{n,q}, y^{n,q}) \rightsquigarrow y^{n,q} \end{cases}$$

Στην γενική περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων πρέπει να λύσουμε ένα σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους (στη βαθμωτή περίπτωση.)
Στη περίπτωση ημιπεπλεγμένων μεθόδων το σύστημα αποσύνδεεται και αρκεί να λύσουμε q εξισώσεις.

• Παραδείγματα Μεθόδων RK :

- Τάξη ακρίβειας $p \geq 1 \iff b_1 + \dots + b_q = 1$
- Συνήθως ισχύει: $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{iq} = \tau_i$ για $i = 1, \dots, q$

1. $q=1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + h\cdot f(\underbrace{t^{n,1}}_{=t^n}, \underbrace{y^{n,1}}_{=y^n}) \end{cases}$$

$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^n, y^n)$ (μέθοδος Euler άμεση.)

2. $q=1$ $\quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

$$\left.\begin{aligned} y^{n,1} &= y^n + h\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} &= y^n + h\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$$

$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$ (πεπλεγμ. μέθοδος του Euler).

3. $q=1$ $\quad \begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$

$$\left\{\begin{aligned} y^{n,1} &= y^n + \frac{h}{2}\cdot f(\overbrace{t^{n,1}}^{t^n+\frac{h}{2}}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} &= y^n + h\cdot f(\underbrace{t^{n,1}}_{t^n+\frac{h}{2}}, y^{n,1}) \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} h\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) &= 2y^{n,1} - 2y^n \\ h\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) &= y^{n+1} - y^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\cdot y^{n,1} - 2\cdot y^n = y^{n+1} - y^n \Rightarrow 2\cdot y^{n,1} = y^{n+1} + y^n \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{n,1} = \frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1})$

Άρα: $y^{n+1} = y^n + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$ Μέθοδος του μέσου.

4. $q=2$ $\quad \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$

$$\begin{cases} \boxed{y^{n,1} = y^n} \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow y^{n,2} = y^{n+1}$

Άρα:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^n, y^n) + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

Μέθοδος του τραπεζίου.

5. $q = 2$

0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	

άμεση μέθοδος γιατί ο πίνακας είναι γνήσια κάτω τριγωνικός.

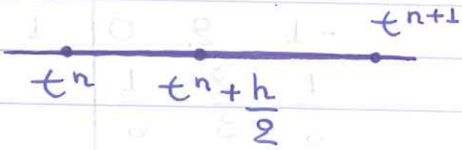
$$y^{n,1} = y^n$$

$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} \cdot f(\underbrace{t^{n,1}}_{=t^n}, \underbrace{y^{n,1}}_{=y^n})$$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n,2}, \underbrace{y^{n,2}}_{= y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^n, y^n)})$$

Άρα: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2} \cdot f(t^n, y^n)\right)$

- Άμεση μέθοδος του μέσου.
- Βελτιωμένη μέθοδος του Euler. ($p = 2$)



6.
$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$\boxed{27.11.14}$

για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, τότε $p=3$ (τάξη μεθόδου)

Για αυτή την επιλογή οι μέθοδοι λέγονται (2,3) DIRK
(διαγώνια πεπλεγμένες)
Για όλα τα άλλα μ: $p=2 \in \mathbb{R}$.

7.
$$\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/4-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ 1/4+\mu & 1/4 & 1/2+\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$ είναι η μόνη μέθοδος με $q=2$ και $p=2\cdot q=4$.

Η μέθοδος λέγεται μέθοδος RK Gauss-Legandre
δύο (σημείων) σταδίων.

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}-\mu\right) + \frac{1}{2}\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}+\mu\right)$$ ακριβής για πολυώνυμα βαθμού ≤ 3.

8.
$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Kutta $3^{ης}$ τάξης.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$

Heun τρίτης τάξης.

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 0 & 3/4 \\ \hline \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \end{array}$$

Ralston τρίτης τάξης.

9.
$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Κλασσική Μέθοδος RK $p=4$.

→ 3.2. : Επιλυσιμότητα και ευστάθεια μεθόδων RK

⇝ Επιλυσιμότητα: Στην περίπτωση άμεσων μεθόδων RK, τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, οπότε οι μέθοδοι είναι καλά ορισμένες για οποιοδήποτε h.

Θα αποδείξουμε ότι για αρκετά μικρό h και f που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και οι πεπλεγμένες μέθοδοι είναι καλά ορισμένες.

(+) $\exists\, L \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

• Πρόταση (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων)

Έστω ότι ισχύει η (+) και ότι $h < 1/\gamma$ με $\gamma := L \cdot \max\limits_{1\leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$

Τότε το σύστημα (*) λύνεται μονοσήμαντα ως προς $y^{n,1}, \ldots, y^{n,q}$

σελ. 73

• **Απόδειξη:** Θεωρούμε την συνάρτηση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

$$F_i(x) = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, x_j) \quad \text{για } i = 1, \dots, q$$

όπου $x = (X_1, \dots, X_q)^T$ και $F(x) = (F_1(x), \dots, F_q(x))^T$

Τότε κάθε λύση ⊛ είναι σταθερό σημείο (διάνυσμα του $\mathbb{R}^q$) της F και αντίστροφα.
Θα αποδείξουμε ότι η F έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο οπότε το ⊛ λύνεται μονοσήμαντα.

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε:

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot [f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)]$$

οπότε:

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\leq L \cdot |x_j - \tilde{x}_j|}$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot L \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j - \tilde{x}_j|}_{\leq \|x - \tilde{x}\|_\infty}$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq h \cdot \underbrace{\left(L \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right)}_{\leq \gamma} \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_i |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{= \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \leq \underbrace{\gamma \cdot h}_{< 1} \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty$$

Η F είναι συστολή στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$ οπότε έχει ακριβώς ένα σταθ. σημείο.

- **Ευστάθεια:**

$$(1)\quad \begin{cases} y' = f(t,y), \ a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

→ **Ορισμός** (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Μια μέθοδος RK λέγεται ευσταθής αν για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών (1) και υπό τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, υπάρχει μια σταθερά C_1, ανεξ. του h τ.ώ: για ακολουθίες $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$ που ικανοποιούν τις (**) και $z^0 \in \mathbb{R}$ δεδομένο.

σελ. 73

$$\left.\begin{aligned} z^{n,i} &= z^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, z^{n,j}), \\ z^{n+1} &= z^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{aligned}\right\}$$

ισχύει: $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C_1 \cdot |y^0 - z^0|$. (2)

- **Πρόταση** (Ευστάθεια Μεθόδων RK)

Θεωρούμε μια μέθοδο RK και υποθέτουμε ότι ισχύει οι συνθήκες της προηγούμενης πρότασης. Έστω $y^0, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις που ορίζονται στην (**) και $z^0, \dots, z^N$ τ.ώ:

$z^0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} z^{n,i} = z^n + h \cdot \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, z^{n,j}) \\ z^{n+1} = z^n + h \cdot \sum\limits_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, z^{n,i}) + p^n \end{cases}$$

με $p^0, \dots, p^{N-1} \in \mathbb{R}$

Τότε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h και την $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$, $p^0, \dots, p^{N-1}$ τ.ώ:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C_1 \cdot |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \cdot \max_{0 \leq n \leq N-1} |p^n| \quad (3)$$

- **Παρατήρηση:** για $p^0 = \dots = p^{N-1} = 0$ η (3) οδηγεί στη (2).

- <u>Απόδειξη:</u> Αφαιρώντας κατα μέλη έχουμε:

$$y^{n,i}-z^{n,i}=y^n-z^n+h\cdot\left[\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot\left(f(t^{n,j},y^{n,j})-f(t^{n,i},z^{n,i})\right)\right]$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|+h\cdot\sum|a_{ij}|\cdot\underbrace{|f(t^{n,j},y^{n,j})-f(t^{n,i},y^{n,i})|}_{\leq L\cdot|y^{n,j}-z^{n,j}|}$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|+h\cdot\underbrace{\left(L\cdot\sum_{j=1}^{q}|a_{ij}|\right)}_{\gamma}\cdot\max_{1\leq \ell\leq q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|+\gamma\cdot h\cdot\max_{1\leq \ell\leq q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq i\leq q}|y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|+\gamma h\cdot\max_{1\leq \ell\leq q}|y^{n,\ell}-z^{n,\ell}|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\gamma h)}_{>0}\cdot\max|y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|$$

G

για $h\leq h_0<1/\gamma$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\max_{1\leq i\leq q}|y^{n,i}-z^{n,i}|\leq |y^n-z^n|\quad, n=0,\dots,N-1.$$

Αφαιρώντας κατα μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε:

$$y^{n+1}-z^{n+1}=(y^n-z^n)+h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i\cdot\left[f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})\right]-p^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\leq |y^n-z^n|+h\cdot\sum_{i=1}^{q}|b_i|\cdot\underbrace{|f(t^{n,i},y^{n,i})-f(t^{n,i},z^{n,i})|}_{\leq L\cdot|y^{n,i}-z^{n,i}|}+|p^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\leq |y^n-z^n|+h\cdot L\cdot\sum_{i=1}^{q}|b_i|\cdot\underbrace{|y^{n,i}-z^{n,i}|}_{\leq G\cdot|y^n-z^n|}+\max_{0\leq m\leq N-1}|p^m|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}-z^{n+1}|\leq \left(1+h\cdot\underbrace{G\cdot L\cdot\sum_{i=1}^{q}|b_i|}_{=G'}\right)\cdot|y^n-z^n|+\max_{0\leq m\leq N-1}|p^m|$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1. παίρνουμε:

$$\max|y^n - z^n| \leq \underbrace{e^{C'(b-a)}}_{=C_1} \cdot |y^0 - z^0| + \overbrace{\frac{e^{C'(b-a)}-1}{C'h}}^{=C_2} \cdot \max_{0\leq m\leq N-1}|p^m|$$

→ **3.3 : Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων RK.**

$$\begin{cases} J^{n,i} = y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot f(t^{n,j}, J^{n,j}) \quad \text{για } i=1,\dots,q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i\cdot f(t^{n,i}, J^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

δ^n: σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα ή διακριτοποίησης.

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι αρκετά ομαλές. Τάξη ακρίβειας p της μεθόδου RK λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει μια εκτίμηση της μορφής

$$\max_{0\leq n\leq N-1}|\delta^n| \leq \tilde{C}\cdot h^{p+1} \qquad (4)$$

με $\tilde{C}$ ανεξ. του h (εξαρτόμενο απο το πρόβλημα), για όλα τα Π.Α.Τ που ικανοποιούν τις συνθήκες μας.

- **παρατήρηση:** $p \geq 1 \iff b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$.

- **Θεώρημα:** (Εκτίμηση σφάλματος μεθόδων RK)

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz και η λύση y του προβλήματος (1) είναι αρκετά ομαλή. Έστω ότι το h είναι τ.ώ $\gamma h < 1$. Τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος:

$$\max_{0\leq n\leq N}|y(t^n) - y^n| \leq \frac{\tilde{C}}{C'}\cdot\left[e^{C'(b-a)} - 1\right]\cdot h^p$$

με $\tilde{C}$ όπως στην (4) και C' όπως στην (3).
(στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης).

- <u>Απόδειξη:</u>

$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\cdot f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) \text{ για } i=1,\dots,q$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i\cdot f(t^{n,i}, \zeta^{n,i}) - \delta^n$$

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση δηλαδή την (3) με $z^m = y(t^m)$ και $p^m = -\delta^m$ και παίρνουμε:

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)| \le C_1\cdot|\underbrace{\cancel{y^0 - y(a)}}_{0}| + \frac{C_2}{h}\cdot\underbrace{\max_{0\le m\le N-1}|\delta^m|}_{\le \tilde{C}_1\cdot h^{p+1}}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N}|y(t^n) - y^n| \le \tilde{C}_1\cdot C_2\cdot h^p.$$

$\Leftarrow \boxed{02.12.2014}$

- <u>Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μεθόδων RK:</u>

<u>Γενικά σχόλια:</u> • $p \le 2\cdot q$ για κάθε μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια.

$p\le q$ για άμεσες μεθόδους.

- Ακριβέστερα άνω φράγματα της p προκύπτουν εύκολα με τον τρόπο που θα γνωρίσουμε αργότερα, όταν θα αναφερθούμε στη λεγόμενη συνάρτηση ευστάθειας r μιας μεθόδου RK.
- Το $p\ge 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$.
- Η τάξη ακρίβειας p μπορεί να προσδιοριστεί με κατάλληλα αναπτύγματα Taylor. Για μεγάλο q, οι πράξεις γίνονται πολύ πολύπλοκες (οι πράξεις διευκολύνονται χρησιμοποιώντας τα λεγόμενα δένδρα του Butcher με τα οποία δεν θα ασχοληθούμε).
- Οι λεγόμενες απλοποιημένες συνθήκες μπορούν να ελεχθούν εύκολα και οδηγούν γενικά σε κάτω φράγματα για την p.
- Για ορισμένες ιδιαίτερα χρησιμοποιούμενες στην πράξη οικογένειες μεθόδων RK οι απλοποιημένες συνθήκες οδηγούν στη σωστή τάξη p (και όχι απλώς σε κάτω φράγματα της)
- Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ώ:

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \tau_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1}, \quad \ell = 0, \dots, \tilde{p}-1 \quad \text{Τότε: } p \leq \tilde{p}.$$

- <u>Παραδείγματα:</u> Η πεπλεγμ. μέθοδος του μέσου. $\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$

(Ξέρουμε ότι: $1 \leq p \leq 2$) $\boxed{\text{S.O.S}}$

$$\begin{cases} J^{n,1} = y(t^n) + h \cdot \frac{1}{2} \cdot f(t^{n,1}, J^{n,1}) \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h \cdot f(t^{n,1}, J^{n,1}) \right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Τοπικό σφάλμα.

Έχουμε:

$$f(t^{n,1}, J^{n,1}) = f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, J^{n,1})\right)$$

Taylor $\rightarrow$ $= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \cdot f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \cdot f(t^{n,1}, J^{n,1}) \cdot f_y(t^n, y(t^n))$

$+ O(h^2) \leftarrow$ τάξη h^2.

$= y'(t^n) + \frac{h}{2} \cdot f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t^n, y(t^n)) + \cancel{O(h)} \right] \cdot f_y(t^n, y(t^n))$

$+ O(h^2)$

$= y'(t^n) + \frac{h}{2} \cdot \left[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n)) \right] + O(h^2).$

Επομένως, αντικαθιστώντας στη σχέση για το δ^n έχουμε:

$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{h \cdot y'(t)} + \frac{h^2}{2} \left[f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n)) \right]$

$+ O(h^3) - \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} \cdot y''(t^n) + O(h^3) \right] =$

$= \frac{h^2}{2} \cdot \Big[\underbrace{f_t(t^n, y(t^n)) + f(t^n, y(t^n)) \cdot f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)}_{=0} \Big] + O(h^3)$

$= O(h^3)$ οπότε: $\boxed{p \geq 2}$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot \overbrace{y'(t)}^{f(t,y(t))}$$

άρα για αυτό κάνει μηδέν το παραπάνω.

$$\begin{cases} y'(t) = 3t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ (παράδειγμα)

<u>Λύση:</u> $y(t) = t^3$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot 3(t^{n,1})^2 - y(t^{n+1}) =$$
$$= (t^n)^3 + 3h\left(t^n + \frac{h}{2}\right) - (t^n+h)^3 = \ldots = -\frac{h^3}{4}.$$

Άρα: $|\delta^n| \geq \frac{h^3}{4} \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$

Οπότε η τάξη είναι ακριβώς $p=2$. (γιατί $p \geq 2$ και $p \leq 2$)

• <u>Παράδειγμα:</u> Μέθοδος του τραπεζίου.

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$J^{n,1} = y(t^n)$

$$J^{n,2} = y(t^n) + \frac{h}{2}\cdot\left[f(\underset{\downarrow\, t^n}{t^{n,1}}, \underset{\downarrow\, y(t^n)}{J^{n,1}}) + f(\underset{\uparrow\, t^{n+1}}{t^{n,2}}, J^{n,2})\right]$$

$$\delta^n = y(t^n) + \frac{h}{2}\cdot\left[f(t^{n,1}, J^{n,1}) + f(t^{n,2}, J^{n,2})\right] - y(t^{n+1}) =$$

$$= y(t^n) + \frac{h}{2}\cdot f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}\cdot \underbrace{f(t^n+h, J^{n,2})} - y(t^{n+1})$$

Έχουμε: $f(t^n+h, J^{n,2}) = f\left(t^n+h,\ y(t^n) + \frac{h}{2}\cdot f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}\cdot \underbrace{f(t^{n,2}, J^{n,2})}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)}\right) =$

$$= f(t^n+h,\ y(t^n) + h\cdot f(t^n, y(t^n)) + O(h^2))$$

Taylor → $= f(t^n, y(t^n)) + h\cdot f_t(t^n, y(t^n)) + h\cdot f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$.

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη σχέση για το δ^n παίρνουμε:

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \frac{h}{2}\cdot \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{=y'(t^n)} + \frac{h}{2}\cdot \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{=y'(t^n)} + \frac{h^2}{2}\cdot\left[f_t(t^n, \cancel{y(t^n)}) + \right.$$
$$\left. + f(t^n, y(t^n))\cdot \cancel{f_y}(t^n, y(t^n))\right] + O(h^3) - \left[\cancel{y(t^n)} + h\cdot \cancel{y'(t^n)} + \frac{h^2}{2}\cdot \cancel{y''(t^n)} + O(h^3)\right] = O(h^3)$$

$\Rightarrow \boxed{p \geq 2}$

• $\begin{cases} y'(t) = 3t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad y(t) = t^3$

$$\delta^n = \underset{(t^n)^3}{\underset{\shortparallel}{y(t^n)}} + \frac{h}{2}\cdot\Big[\underset{3(t^n)^2}{\underset{\shortparallel}{f(t^{n,1})}} + \underset{3(t^n+h)^2}{\underset{\shortparallel}{f(t^{n,2})}}\Big] - \overset{(t^n+h)^3}{\overset{\shortparallel}{y(t^{n+1})}} = \ldots = \frac{h^3}{2}$$

$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{2}\cdot h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$

• Θεώρημα: (απλοποιημένες συνθήκες)

Έστω $p, r, s \geq 1$ τ.ω:

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \tau_i^{\kappa} = \frac{1}{\kappa+1}$ για $\kappa = 0, \ldots, p-1$.

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot \tau_j^{\kappa} = \frac{\tau_i^{\kappa+1}}{\kappa+1}$, $1 \leq i \leq q$ για $\kappa = 0, \ldots, s-1$.

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \tau_i^{\kappa} \cdot a_{ij} = \frac{b_j(1-\tau_j^{\kappa+1})}{\kappa+1}$ $\quad 1 \leq j \leq q$ για $\kappa = 0, \ldots, r-1$.

και

(4) $p \leq r+s+1$ και $p \leq 2s+2$

τότε η τάξη της μεθόδου είναι (τουλάχιστον) p.

Οι (1) - (4) "απλοποιημένες" ικανές συνθήκες με τάξη ακρ. p.

• Αν ισχύουν οι (1), (2), (3) τότε η τάξη είναι τουλάχιστον $\min(p,\ r+s+1,\ 2s+2)$

• $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \varphi(\tau_i)$

για $\varphi(x) = x^{\kappa}$ έχουμε:

$$\frac{1}{\kappa+1} \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \tau_i^{\kappa}$$

- Πόρισμα:

(α) Έστω p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1).

Αν ισχύουν οι σχέσεις (2) με $s=p-1$, τότε η τάξη μεθόδου είναι p.

(β) Έστω q' το πλήθος των τ_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (1) και ισχύουν οι (2) με $s=q'$ τότε η τάξη της μεθόδου είναι p.

(γ) Υπάρχει ακριβώς μια μέθοδος με τάξη $p=2\cdot q$.
('Ολες οι άλλες έχουν τάξη $p<2\cdot q$)
Τα τ_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη αντίστοιχα του τύπου ολοκλ. του Gauss στο $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.
Τα a_{ij} κατασκευάζονται ώστε να ισχύει η (2) με $s=q$.
Αυτή είναι η οικογένεια μεθόδων RK Gauss - Legendre.

- Περιοχή Ευστάθειας (ρητές προσεγγίσεις του εκθετικού.):

$$\begin{cases} y'=\lambda y, & t\geq 0, \ \lambda\in\mathbb{C} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

με $h>0$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

Λύση: $y(t)=e^{\lambda t}$.

$$\begin{cases} y^{n,i}=y^n+h\cdot\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\cdot\lambda\cdot y^{n,j} \quad \text{για } i=1,\dots,q \\ y^{n+1}=y^n+h\cdot\sum_{i=1}^{q}b_i\cdot y^{n,i}\cdot\lambda \end{cases}$$

Έχουμε: $y^{n,i}=y^n+\lambda\cdot h\cdot\sum_{j=1}^{q}a_{ij}\cdot y^{n,j}$ για $i=1,\dots,q \iff$

$$\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ y^{n,2}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^n\\ y^n\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}+\lambda\cdot h\cdot A\cdot\begin{pmatrix} y^{n,1}\\ y^{n,2}\\ \vdots\\ y^{n,q}\end{pmatrix} \iff$$

$$\left(I_q - \lambda h A\right)\cdot\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} = y^n \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}}_{=e}$$

<u>Υπόθεση</u>: το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A.

Τότε ο $I_q - \lambda h A$ είναι αντιστρέψιμος και έχουμε:

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} = y^n \cdot \left(I_q - \lambda h A\right)^{-1}\cdot e \quad (*)$$

Άρα:

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot y^{n,i}}_{= b^T\cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n + \lambda h b^T \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q}\end{pmatrix} \overset{(*)}{=} y^n + \lambda h\, b^T y^n \left(I_q - \lambda h A\right)^{-1}\cdot e$$

$$= y^n \cdot \left[1 + \lambda h b^T \left(I_q - \lambda h A\right)^{-1} e\right].$$

$$(+)\quad y^{n+1} = \left[1 + \lambda h b^T \cdot \left(I_q - \lambda h A\right)^{-1}\cdot e\right]\cdot y^n$$

Θέτω $r(z) := 1 + z b^T \left(I_q - zA\right)^{-1} e$ (συνάρτ. ευστάθειας) και γράφουμε την $(+)$ στη μορφή

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$$

<u>Περιοχή ευστάθειας:</u> $\Leftarrow \boxed{04.12.14}$

$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$

Η μέθοδος είναι A-ευσταθής ανν $S \supset \mathbb{C}^- = \{ z \in \mathbb{C} : Re z \leq 0 \}$.

Τι μορφή έχει η r;

Θέτουμε $w = \left(I_q - z\cdot A\right)^{-1}\cdot e$

Έχουμε:

$$\left(I_q - z\cdot A\right)\cdot w = e. \quad (*)$$

Λύνουμε το ⊛ με την μέθοδο του Cramer.
Οι παρονομαστές είναι όλοι: $\det(I_q - z\cdot A)$, το οποίο είναι πολυώνυμο ως προς z βαθμού $\leq q$.
Οι αριθμητές είναι πολυώνυμα βαθμού $\leq q-1$.

→ <u>συμπέρασμα:</u> Η r είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή πολυώνυμα βαθμού $\leq q$.

→ <u>Σφάλμα συνέπειας:</u> $r(\lambda\cdot h)\cdot y(t^n) - y(t^{n+1}) = \delta^n$

Άρα: $\delta^n = r(\lambda\cdot h)\cdot e^{\lambda t^n} - e^{\lambda t^n + \lambda h}$
$= [r(\lambda h) - e^{\lambda h}]\cdot e^{\lambda t^n}$

→ <u>συμπέρασμα:</u> $\delta^n = O(h^{p+1}) \iff$
$r(z) - e^z = O(|z|^{p+1})$ $z \to 0$.

Η συνθήκη $r(z) - e^z = O(|z|^{p+1})$ $z \to 0$
είναι αναγκαία, για να έχει μέθοδος τάξη ακρίβειας p.

- <u>Άμεσες Μέθοδοι RK:</u>

A γνήσια κάτω τριγωνικός => $z\cdot A$ και αυτός γν. κάτω τριγ.

$I_q - z\cdot A$ κάτω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.
Άρα:
$\det(I_q - z\cdot A) = 1$.

→ <u>συμπέρασμα:</u> Η r είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq q$.

Έστω ότι η τάξη της μεθόδου είναι p. Τότε:
$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1}\cdot z^{p+1} + \dots + C_q\cdot z^q.$$

→ <u>συμπέρασμα:</u> $p \leq q$.
Μάλιστα αν ισχύει $p = q$, τότε: $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^q}{q!}$

- Έστω $p \geq 1$ (συνεπής) τότε: $|r(z)| \to \infty$ για $|z| \to \infty$.

οπότε η περιοχή ευστάθειας είναι φραγμένη.
Επομένως δεν υπάρχει (συνεπής) A-ευσταθής άμεση μέθοδος!
Γενικά, αν ο βαθμός του αριθμητή της συνάρτησης ευστάθειας είναι γνήσια μεγαλύτερος του βαθμού του παρανομαστή, τότε η S είναι φραγμένη, οπότε η μέθοδος δεν είναι A-ευσταθής.

- Συναρτήσεις Ευστάθειας:

Άμεση μέθοδος Euler: $r(z) = 1+z.$

Πεπλ. μέθοδος Euler: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Πεπλ. μέθοδος Μέσου: $r(z) = \dfrac{1+z/2}{1-z/2}$

Μεθοδος τραπεζίου: $r(z) = \dfrac{1+z/2}{1-z/2}$

- Προσεγγίσεις Padé:

Μια συνάρτηση $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ με $P\in \mathbb{P}_m$ και $Q\in\mathbb{P}_\ell$, με $m,\ell\in\mathbb{N}_0$
Λέγεται προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης e^z, αν ισχύει $e^z - \dfrac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1})$ για $z\to 0$.

για κάθε m και $\ell\in\mathbb{N}_0$, η αντίστοιχη προσέγγιση Padé του εκθετικού της e^z είναι μοναδικά ορισμένη.
Είναι μάλιστα γνωστοί οι τύποι που δίνουν τα P και Q.
Κατά κανόνα (αλλά όχι πάντα) η συνάρτηση ευστάθειας r είναι στοιχείο του πίνακα Padé της e^z.
Σε αυτή την περίπτωση: Η μέθοδος είναι A-ευσταθής ανν: βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος ή κατα ένα μεγαλύτερος ή κατα δύο μεγαλύτερος απο τον αριθμητή.

Η μέθοδος RK Gauss-Legendre με q στάδια έχει τάξη $p=$
$= 2\cdot q$ οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η r είναι

η αντίστοιχη προσέγγιση Padé. Με βαθμό αριθμητή και παρονομαστή ίσο με q. Άρα οι μέθοδοι αυτές είναι A-ευσταθής.

- Γενικά, μια μέθοδος RK με συναρτ. ευστ. r είναι A-ευσταθής ανν:
  1. $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
  2. Η r δεν έχει πόλους με αρνητικό πραγματικό μέρος. (πόλος μιας ρητής συνάρτησης λέγεται μια ρίζα του παρονομαστή της που δεν είναι ρίζα του αριθμητή).

→ B-ευστάθεια: ⟸ $\boxed{09.12.14}$

- Ορισμός: Μία μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής, αν:

a) $b_i \geq 0 \;,\; i = 1, \dots, q$

β) Ο $q \times q$ πίνακας M με στοιχεία
$m_{ij} = b_i \cdot a_{ij} + b_j \cdot a_{ji} - b_i \cdot b_j$ για $i, j = 1, \dots, q$
είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \geq 0$$

- Τώρα ισχύουν:

a) Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής ⟹ B-ευσταθής.

β) Αν τα τ_i είναι ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει και το αντίστροφο.
B-ευστάθεια ⟹ αλγεβρική ευστάθεια.

- Παραδείγματα:

1. Πεπλεγμένη Μέθοδος του Euler.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

a) $b_1 = 1 > 0$ ✓
β) $m_{11} = b_1 \cdot a_{11} + b_1 \cdot a_{11} - b_1 \cdot b_1 = 1 \geq 0$ ✓

• συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής οπότε και B- ευσταθής.

2. Πεπλεγμένη Μέθοδος του μέσου:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

α) $b_1 = 1 \geq 0$ ✓

β) $m_{11} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = 0 \geq 0$ ✓

• συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι αλγεβρ. ευσταθής.

3. Μέθοδος του τραπεζίου

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

β) $m_{11} = b_1 \cdot a_{11} + b_1 \cdot a_{11} - b_1 \cdot b_1$
$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Τώρα για $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\left(M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = m_{11} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Ο πίνακας δεν είναι μη αρνητικά ημιορισμένος, οπότε η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής.

Επειδή $\tau_1 \neq \tau_2$, συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος δεν είναι B- ευσταθής.
Όλες οι μέθοδοι RK Gauss - Legendre είναι B- ευσταθής.

ΤΕΛΟΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...