6/11/2014

2. Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

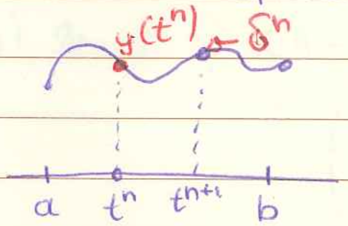
Υπόθεση: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

δείκτης

Έστω $a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^n = b$

ένας διαμερισμός του $[a,b]$ με κόμβους t^i, $i=0,\dots,N$

Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i των τιμών $y(t^i)$ της λύσης στους κόμβους t^i, $i=0,\dots,N$



Συνήθως για ευκολία στον συμβολισμό θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό δηλ. με $N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$ (βήμα του διαμερισμού) και $t^n = a + nh$, $n=0,\dots,N$.

Μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} := y^n + h f(t^n, y^n), & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Στην περίπτωση γενικού διαμερισμού το βήμα της μεθόδου του Euler είναι

$$y^{n+1} = y^n + (t^{n-1} - t^n) f(t^n, y^n)$$

Υπολογιστικό κόστος ανά βήμα:

Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα

Τρόποι κατασκευής της μεθόδου:

1. Με αριθμητική διαφόριση

Θεωρούμε τη Δ.Ε. στο σημείο t^n,

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

Προσεγγίζουμε την $y'(t^n)$ με

$$\frac{y(t^{n-1}) - y(t^n)}{t^{n-1} - t^n}, \quad y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

$= h$

Άρα $\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$

Αντικαθιστούμε σε αυτήν τη σχέση το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε $\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)$

2. Με αριθμητική ολοκλήρωση

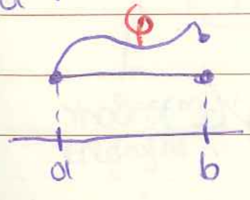
$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Αριστερός τύπος του ορθογωνίου: $y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h \cdot f(t^n, y(t^n))$

$\int_a^b \varphi(x)dx \approx (b-a)\varphi(a)$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n ...



3. Με ανάπτυγμα Tayler

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2!} y''(\xi_n), \text{ με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

Άρα

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot \underbrace{y'(t^n)}_{\overset{\Delta.E.}{=} f(t^n, y(t^n))}$$

δηλ.

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n...

Συνέπεια

Η ποσότητα $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot f(t^n, y(t^n))$ (ή το αντίθετό της)

λέγεται
- σφάλμα συνέπειας
- τοπικό σφάλμα
- τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

Το δ^n δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε, είναι όμως πολύ χρήσιμο για τη μελέτη της μεθόδου

Πως προκύπτει το δ^n;

- Αντικαθιστώντας στη μέθοδο τα y^m με τα $y(t^m)$ δεν έχουμε πια ισότητα, αλλά προκύπτει το σφάλμα δ^n. Δηλαδή το σφάλμα συνέπειας είναι το μέγεθος της αποτυχίας της ακριβής λύσης να ικανοποιεί τη μέθοδο.
- Ξεκινώντας από την ακριβή τιμή $y(t^n)$ και κάνοντας ένα βήμα με τη μέθοδο του Euler βρίσκουμε την προσέγγιση

$$\tilde{y}^{n+1} := y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Προφανώς $\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1}$

Πως συμπεριφέρεται το δ^n καθώς το h τείνει στο μηδέν;

Έχουμε

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\,y'(t^n)$$

$$\underset{\text{Tayler}}{=} \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\right] - \cancel{y(t^n)} - \cancel{h y'(t^n)}$$

(3).

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \Bigg| \Rightarrow \max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{\alpha\le t\le b} |y''(t)|$$

Το δ^n φθίνει για $h \to 0$ (τουλάχιστον όπως το h^2)

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & \alpha \le t \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-\alpha}{N}$ και $t^n := \alpha + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Ευστάθεια

$z^0 \in \mathbb{R}$

$z^{n+1} := z^n + h \cdot f(t^n, z^n)$, $n = 0, \dots, N-1$

Υπόθεση: Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, $\exists L \ge 0$ $\forall t \in [\alpha, b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L |y_1 - y_2|$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \cdot [f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \cdot \underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\le L \cdot |y^n - z^n|}$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + L \cdot h) |y^n - z^n| \quad (*)$$

Ισχυρισμός: $|y^n - z^n| \le (1 + L \cdot h)^n |y^0 - z^0|$, $n = 0, \dots, N$ $(**)$

Επαγωγή: $n = 0$: $|y^0 - z^0| \le |y^0 - z^0|$ ✓ (ισχύει)

$n \to n+1$: $|y^{n+1} - z^{n+1}| \overset{(*)}{\le} (1 + Lh) |y^n - z^n|$

$$\le \underbrace{(1+Lh)(1+Lh)^n}_{=(1+Lh)^{n+1}} \cdot |y^0 - z^0| \quad ✓ \text{ (ισχύει)}$$

Υπόθεση επαγωγής

Τώρα $\forall x \geq 0 \quad e^x \geq 1+x$

• $e^x = 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\geq 0}$

$e^x \geq 1+x.$

• $\varphi(x) = e^x - (1+x)$ (θεωρώ την $\varphi(x)$)

$\varphi(0) = 0$

$\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ άρα αύξουσα συνάρτηση.

Άρα $(1+Lh)^n \leq (e^{Lh})^n = e^{n \cdot Lh}$

$= e^{L(nh)} = e^{L(t^n - a)}$

Άρα $|y^n - z^n| \leq e^{L(t^n-a)} |y^0 - z^0|$ οπότε και

$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$

σταθερά ανεξάρτητη του h, n.

SOS

Λήμμα (Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Έστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, \dots \geq 0$ ε.ώ.

(*) $d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + K, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Τότε ισχύει $d_n \leq d_0 e^{n\delta} + K \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$ (**)

απόδειξη

Για $n=0$ η (**) γράφεται στη μορφή $d_0 \leq d_0 \cancel{e^0} + K \cancel{\frac{e^0 - 1}{\delta}} \Leftrightarrow d_0 \leq d_0$ ✓

1 $\quad 0$ (ισχύει)

Έστω τώρα $n \geq 1$

Ισχυρισμός: $d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$

το αποδεικνύω με επαγωγή

για $n=1$: $d_1 \leq (1+\delta) d_0 + K$ ισχύει σύμφωνα με την (*)

για $n \to n+1$: $d_{n+1} \underset{(*)}{\leq} (1+\delta) d_n + K$

$\underset{\text{Υπόθεση επαγωγής}}{\leq} (1+\delta)\{(1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]\} + K =$

συνέχεια ⟹

$$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + k[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^n] \quad \checkmark$$

Άρα $d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k\underbrace{[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]}_{= \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta)-1} = \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}} \Rightarrow$

$$S = 1+\omega+\dots+\omega^m$$
$$\Rightarrow \omega S = \omega + \dots + \omega^m + \omega^{m+1}$$
$$\omega S - S = \omega^{m+1} - 1$$
$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{\omega^{m+1}-1}{\omega - 1}}$$

$$\Rightarrow d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k \cdot \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta}$$

$(1+\delta)^n \leq e^{n\delta}$

άρα $d_n \leq e^{n\delta} d_0 + k\,\dfrac{e^{n\delta}-1}{\delta}$ $\checkmark$ ισχύει.

Εκτίμηση του σφάλματος (σύγκριση)

Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια της μεθόδου.

Θεώρημα Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.
Έστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση. Αν $y^0, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος.

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \underbrace{\boxed{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]}}_{= C} h$$

με $M := \max_{a\leq t\leq b} |y''(t)|$

11/11/2014

Απόδειξη

Έχουμε $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \delta^n$

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$

Θέτουμε $\varepsilon^i = y(t^i) = y^i$

ολικό σφάλμα της μεθόδου

ολικό σφάλμα προσέγγισης

ολικό σφάλμα διακριτοποίησης

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \delta^n$

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| = |\varepsilon^n| + h\underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\leq L|y(t^n) - y^n|} + \delta^n$

Άρα

$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1+Lh)|\varepsilon^n| + |\delta^n|$ οπότε $|\varepsilon^{n+1}| \leq (1+\underset{\delta}{Lh})|\varepsilon^n| + \underbrace{\max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^i|}_{k \text{ στο βοηθητικό λήμμα}}$

Επομένως σύμφωνα με το βοηθητικό λήμμα ισχύει

$|\varepsilon^n| \leq e^{Lhn}\underset{\downarrow 0}{|e^0|} + \dfrac{e^{Lhn}-1}{Lk} \max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^i|$

$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \dfrac{e^{L(t^n-a)}-1}{L\cancel{k}} \dfrac{k^{\cancel{2}}}{2} M = \dfrac{M}{2L}(e^{L\overset{\leq b}{t^n}-a)}-1)h$

$\Rightarrow \max_{0\leq n\leq N} |\varepsilon^n| \leq \dfrac{M}{2L}[e^{L(b-a)}-1]h$

Αποτέλεσμα π.χ. (✱✱) $\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \overset{\text{ανεξάρτητο του } h}{c}h$

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου $p \geq 1$

Ερώτημα Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του k στην εκτίμηση του σφάλματος ✱✱; (Αν M=0, δηλ. $y \in \mathbb{P}$ τότε το σφάλμα $y(t^n) = y^n$ είναι μηδέν)

Απάντηση Γενικά όχι (δηλ. $p \leq 1$)

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση $y(t) = t^2$ (επιλέχθηκε έτσι ώστε $y''(t) =$ σταθερά $\neq 0$)

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$ $t^n = nh$, $n = 0, \dots, N$

Μέθοδος του Euler $y^{n+1} = y^n + h \cdot 2t^n$

Άρα $y^{n+1} = y^n + h^2 2n$, $n = 0, \dots, N-1$

Ισχυρισμός: $y^n = y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2$ με $n = 0, \dots, N$

Επαγωγή: $n = 0$: $y^0 = y^0$

$n \to n+1$: $y^{n+1} = y^n + 2nh^2$

$= \boxed{y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)]h^2} + 2nh^2$

υπόθεση επαγωγής $\rightarrow$ $= y^0 + 2[1+2+\dots+(n-1)+n]h^2$

Επομένως

$y^n = \cancel{y^0}^{\,0} + \underbrace{2[1+2+\dots+(n-1)]}_{= \frac{(n-1)n}{2}}h^2 - (n-1)nh^2$

Για $n = N$ έχουμε $y^N = (N-1)Nh^2 = (N-1)\overset{=1}{(Nh)}h = (N-1)h = \overset{=1}{(Nh)} - h = 1 - h$

Επομένως

$\underset{=1}{y(t^N)} - y^N = 1 - (1-h) = h$

οπότε $y(t^N) - y^N = h$

Ιδιαίτερα $\max\limits_{0 \le n \le N} |y(t^N) - y^N| \ge h$ (γενικά μια σταθερά $c > 0$)

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler ($\underset{\substack{\uparrow \\ \text{εκτίμηση σφάλματος}}}{p \ge 1}$, $p \le 1$) $\rightarrow$ παραδ.

Το τοπικό σφάλμα είναι τάξης $p+1 = 2$!

Ερώτημα: Τι αλλάζει στην περίπτωση ΠΑΤ για ΣΔΕ;

(Βέβαια η απόλυτη τιμή θα αντικατασταθεί με κάποια νόρμα)

Απάντηση: Μόνο η παράσταση του σφάλματος συνέπειας.

Σφάλμα συνέπειας $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{= y'(t^n)}$

$\Rightarrow \boxed{\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot y'(t^n)}$

Βαθμωτή περίπτωση $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

Άρα $\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$

Διανυσματική περίπτωση $y: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $m \geq 1$. Τότε το ανάπτυγμα Taylor στη μορφή ⊛ δεν ισχύει! Για κάθε συνιστώσα i του y έχουμε
$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h\, y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{n_i})$$

Επομένως στη διανυσματική περίπτωση έχουμε
$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n_1}) \\ y_2''(\xi_{n_2}) \\ \vdots \\ y_n''(\xi_{n_m}) \end{pmatrix}$$

Άρα $\delta^n = \dfrac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n_1}) \\ y_2''(\xi_{n_2}) \\ \vdots \\ y_n''(\xi_{n_n}) \end{pmatrix}$

Για τη νόρμα μεγίστου $\|\ \|_\infty$ έχουμε $\|\delta^n\|_\infty \leq \frac{h^2}{2} M$ με $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} \|y'(t)\|_\infty$

Για μια τυχούσα νόρμα $\|\ \|$ του $\mathbb{R}^m$ χρησιμοποιούμε πρώτα την ισοδυναμία των $\|\ \|$ και $\|\ \|_\infty$ οπότε έχουμε: $\exists C > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| \leq C\|x\|_\infty$

Επομένως $\|\delta^n\| \leq C\|\delta^n\|_\infty$
$$\leq C \frac{M}{2} h^2 \quad \text{με } M = \max_{a \leq t \leq b} \|y'(t)\|_\infty$$

Εναλλακτικός τρόπος Τύπος του Taylor με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή
$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) y''(t)\, dt.$$

Σε αυτή τη μορφή ισχύει και για διανυσματικές συναρτήσεις. Επομένως
$\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) y''(t)\, dt$ οπότε $\|\delta^n\| \leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \|y''(t^n)\| dt$
$$\leq \underbrace{\left(\max_{a \leq t \leq b} \|y''(t^n)\|\right)}_{M} \cdot \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, dt}_{h^2/2}$$

Περιοχή ευστάθειας

A-ευστάθεια, B-ευστάθεια

Μια μέθοδος που μας δίνει το y^{n+1} χρησιμοποιώντας την προσέγγιση y^n (αλλά όχι την y^{n-1}) λέγεται μονοβηματική

Ορισμός (Β-ευστάθεια) : Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Β-ευσταθής αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής με f που ικανοποιεί τη μονοπλεύρη συνθήκη του Lipschitz
$\forall t \in [a,b]\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m\ (f(t,x)-f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}) \leq 0$ με αρχικές προσεγγίσεις y^0 και z^0 αντίστοιχα τ.ω. η ακολουθία $\|y^n - z^n\|$ $n=0,\dots,N$ (με $\| \ \|$ την Ευκλείδεια νόρμα) να είναι φθίνουσα δηλαδή $\|y^{n+1}-z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$, $n=0,\dots,N-1$. (δηλαδή η μέθοδος μιμείται τη διαφορική εξίσωση για λύσεις $y(t)$ και $z(t)$ της οποίας ισχύει ότι $\|y(t)-z(t)\|$ είναι φθίνουσα)

Όπως θα δούμε η μέθοδος του Euler δεν είναι Β-ευσταθής. Εξασθενούμε λίγο την απαίτηση ευστάθειας και εισάγουμε τη λεγόμενη Α-ευστάθεια. Αυτή αφορά την περίπτωση που η f είναι πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού ως προς y, $f(t,y)=\lambda y + \mu(t)$
Αρκεί να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των προσεγγίσεων για την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

Ορισμός (Α-ευστάθεια) : Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Α-ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \leq 0$ και τυχαίο βήμα h, δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η ακολουθία $|y^n|$ να είναι φθίνουσα.
$|y^{n+1}| \leq |y^n|$ $n=0,1,\dots$ (Δηλαδή η μέθοδος μιμείται την ιδιότητα της λύσης $y(t)$ που είναι ότι η $|y(t)|$ είναι φθίνουσα.

Ισχύουν τα εξής

$$\text{Β-ευστάθεια} \Rightarrow \text{Α-ευστάθεια}$$
$$\not\Leftarrow$$

13/11/2014

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι A-ευσταθής (οπότε δεν είναι ούτε B-ευσταθής)

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n \Rightarrow y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n \Rightarrow |y^{n+1}| = |1+\lambda h|\,|y^n|$$

Για $y^n \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \geq 0$ δεν ισχύει γενικά ότι $|y^{n+1}| \leq |y^n|$ γιατί π.χ. για $\lambda h = -3$ έχουμε $|y^{n+1}| = 2\underbrace{|y^n|}_{\neq 0} \geq |y^n|$

Με τη συνάρτηση $r(z) = 1+z$ η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα ⊛ γράφεται στη μορφή $y^{n+1} = r(\lambda) y^n$. Η r λέγεται συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου

Ορισμός (Περιοχή ευστάθειας): Εφαρμόζουμε μια μονοβηματική μέθοδο στο πρόβλημα δοκιμής ⊛. Η περιοχή ευσταθείας S της μεθόδου αποτελείται από όλα τα σημεία $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο με την ιδιότητα ότι για λ και h τ.ω. $\lambda h = z$ η μέθοδος να δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η ακολουθία $|y^n|$ $n = 0, \ldots$, να είναι φθίνουσα δηλ. $|y^{n+1}| \leq |y^n|$

Η τιμή της S με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται διάστημα ευσταθείας της μεθόδου

Παρατήρηση: Μια μέθοδος είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : Re z \leq 0\}$ περιέχεται στη περιοχή ευσταθείας S της μεθόδου.

Μέθοδος του Euler $\quad y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$

$$\Rightarrow |y^{n+1}| = |r(\lambda h)|\,|y^n|, \quad r(z) = 1+z$$

Άρα $S = \{z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |1+z| \leq 1\}$

Παρατήρηση: Σφάλμα συνέπειας της μεθόδου του Euler όταν την εφαρμόσουμε στο ⊛

$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\lambda\, y(t^n)$

$= y(t^{n+1}) - r(\lambda h)\, y(t^n)$

$= e^{\lambda t^n + \lambda h} - r(\lambda h) e^{\lambda t^n}$

$= [e^{\lambda h} - r(\lambda h)] e^{\lambda t^n}$

$= [1 + \lambda h + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 + O(h^2) - 1 - \lambda h]\, e^{\lambda t^n}$

$= O(h^2)^2$

Γενικά για μια μονοβηματική μέθοδο με συνάρτηση ευστάθειας r ισχύει: τάξη της μεθόδου $= p \Rightarrow e^z - r(z) = O(z^{p+1})$ για $z \to 0$

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου Euler

Πλεονεκτήματα: Η μέθοδος είναι άμεση (δεν χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις) προγραμματίζεται πολύ εύκολα και απαιτεί έναν μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα.

Μειονεκτήματα: Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ένα, δηλαδή πολύ χαμηλή οπότε για να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε πολύ μικρό βήμα h. Αυτό αυξάνει πολύ το συνολικό κόστος και επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης. Επιπλέον η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής ούτε καν A-ευσταθής και μάλιστα έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας S.

Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$ $\quad h = \frac{b-a}{N}$ $\quad t^n = a + nh$

$n = 0, \ldots, N.$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n = 0, \ldots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Τρόποι κατασκευής

- **Αριθμητική ολοκλήρωση**

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$y(t^{n+1})-y(t^n)=\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt \approx hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε

$$y^{n+1}-y^n=hf(t^{n+1}, y^{n+1})$$

- **Αριθμητική διαφόριση**

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

έχουμε $y'(t^{n+1}) \approx \dfrac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h}$ οπότε $\dfrac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

Αντικαθιστούμε . . .

- **Ανάπτυγμα Taylor** (ως προς το σημείο t^{n+1})

- **Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων**

Χωρίς υποθέσεις στην f και/ή στο βήμα h οι προσεγγίσεις δεν είναι καλά ορισμένες. π.χ. εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο πρόβλημα δοκιμής (*) έχουμε

$$y^{n+1}=y^n+h\lambda y^{n+1}$$

(+) $\boxed{(1-\lambda \quad)y^{n+1}=y^n}$

Έστω $\lambda \neq 0$ και $h=\frac{1}{\lambda}$. Τότε για $y^n \neq 0$ δεν υπάρχει λύση της (+)
Για $y^n=0$ κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση της (+)

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.
Ισχυρισμός: Για αρκετά μικρό h έτσι ώστε $Lh<1$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=y^n+hf(t^{n+1},x)$. Τότε κάθε σταθερό σημείο της g αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$y^{n+1}=y^n+hf(t^{n+1},y^{n+1})$$ και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x_1) - g(x_2) = h\,[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)]$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| = h\,|\underbrace{f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)}_{\leq L|x_1 - x_2|}]|$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \overset{<1}{L}\,|x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow$ g συστολή οπότε έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο.

<u>2η περίπτωση</u>: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$$\forall t \in [a,b]\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ [f(t, x_1) - f(t, x_2)](x_1 - x_2) \leq 0$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, χωρίς περιορισμό στο βήμα h.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, y^{n+1})$ και αντίστροφα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα. – Η g είναι συνεχής

– <u>Μοναδικότητα ρίζας</u>

Η g είναι γνήσια αύξουσα οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

• <u>Ύπαρξη ρίζας</u>

Για $x \leq 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \geq f(t^{n+1}, 0)$ οπότε

$$g(x) = x - y^n \underbrace{- h f(t^{n+1}, x)}_{\leq -hf(t^{n+1}, 0)}$$

$$g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, 0) \to -\infty, \quad x \to -\infty$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η g παίρνει και αρνητικές τιμές. Αντίστοιχα για $x > 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \leq f(t^{n+1}, 0)$ οπότε $g(x) \geq x - y^n - hf(t^{t+1}, 0) \to \infty$ για $x \to \infty$ άρα η g παίρνει και θετικές τιμές. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g έχει (τουλάχιστον) μία ρίζα.

<u>Συνέπεια</u>: $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ "$y'(t^{n+1})$"

$$\Rightarrow \delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot y'(t^{n+1})$$

<u>Taylor</u>: $y(t^n) = y(t^{n+1}) - hy'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ Άρα

$$\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \text{ με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| = \frac{h^2}{2} \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$$

$\Rightarrow$ τάξη ακρίβειας $p = 1$

Ευστάθεια:

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz. Έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\,[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h\,|y^{n+1} - z^{n+1}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{|1 - Lh|}_{>0} \cdot |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| = \frac{1}{1-Lh}\, |y^n - z^n|$$

Ισχυρισμός: Για h τ.ω. $Lh \leq \frac{1}{2}$ ισχύει $\frac{1}{1-Lh} \leq 1 + 2Lh$

$$\Rightarrow 1 \leq (1-Lh)(1+2Lh) \leq 1 - Lh + 2Lh - 2L^2h^2 = 1 + Lh - 2L^2h^2 = 1 + \underbrace{Lh(1-2Lh)}_{\geq 0}$$

Άρα $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+2Lh)\,|y^n - z^n|$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (1+2Lh)^n\,|y^0 - z^0| \leq e^{2Lhn}\,|y^0 - z^0| = e^{2L(t^n - a)}\,|y^0 - z^0|$$

$$\max_{0\leq n\leq N} |y^n - z^n| \leq e^{2L(b-a)}\,|y^0 - z^0|$$

$\rightarrow$ ανεξάρτητο του h.

18/11/2014

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$

$t^n = a + nh$, $n = 0,\dots,N$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Ευστάθεια

2η περίπτωση Η $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. $\forall t \in [a,b]$ $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ $(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}), & n=0,\dots,N \\ z^0 \text{ δεδομένο} \end{cases}$$

Έχουμε, $y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\,[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})]$

$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 = (\ ^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})$

Εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1} - z^{n+1}$

$$+ h\,\underbrace{(f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, y^{n+1} - z^{n+1})}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})$$
$$\underset{CS}{\leq} \|y^n - z^n\| \cdot \|y^{n+1} - z^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\| \quad (*)$$

Συμπέρασμα: Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι B-ευσταθής. (ιδιαίτερα και A-ευσταθής)

Έπισης από την $(*)$ έπεται ότι $\|y^n - z^n\| \leq \|y^0 - z^0\|$, $n=0,\dots,N$.

Περιοχή ευστάθειας αυτής της μεθόδου

$$(+)\ \begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h > 0$

$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}$

$\underbrace{(1-\lambda h)}_{\neq 0} y^{n+1} = y^n \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^{n+1} = \dfrac{1}{1-\lambda h}\, y^n}$

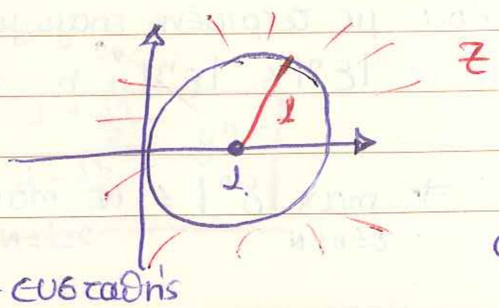
Συνάρτηση ευστάθειας: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Τότε με αυτό το συμβολισμό η μέθοδος γράφεται στη μορφή

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$$

Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \leq 1 \}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq 1 \} \supset \mathbb{C}^-$$



αφού είναι A-ευσταθής

Εκτίμηση σφάλματος (σύγκλιση)

1η περίπτωση : η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

Συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια όπως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler αποδεικνύουμε ότι για h τ.ω. $Lh \le \frac{1}{2}$ ισχύει
$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)} - 1\right] h$$
με $M = \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$

2η περίπτωση : Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (με $m=1$ για ευκολία)

$\boxed{\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{M}{2} h^2}$ το είχαμε αποδείξει στη συνέπεια

Έχουμε
$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$
Επομένως αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε με $\varepsilon^{n+1} = y(t^n) - y^n$
$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$$
(Εξίσωση σφάλματος)

Πολλαπλασιάζοντας επί $y(t^{n+1}) - y^{n+1} = \varepsilon^{n+1}$ παίρνουμε
$$(\varepsilon^{n+1})^2 = \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \underbrace{h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] \cdot \varepsilon^{n+1}}_{\le 0 \text{ από συνθήκη}} + \delta^n \varepsilon^{n+1}$$

Άρα $\Rightarrow (\varepsilon^{n+1})^2 \le \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \varepsilon^{n+1}$
$$\le |\varepsilon^n| |\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n| \cdot |\varepsilon^{n+1}|$$
$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^2 \le (|\varepsilon^n| + |\delta^n|) \cdot \cancel{|\varepsilon^{n+1}|}$$
$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + |\delta^n|$$
$$\le |\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N-1} |\delta^n|$$

Άρα με τετριμμένη επαγωγή
$$|\varepsilon^n| \le \cancelto{0}{|\varepsilon^0|} + n \max_{0\le i\le N-1} |\delta^n|$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le N \max_{0\le i\le N-1} |\delta^n| \Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le N \cdot \frac{M}{2} h^2 = \underbrace{N \cdot h}_{b-a} \cdot \frac{M}{2} h$$

Άρα.

$$\Rightarrow \max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{(b-\alpha) \cdot M}{2} h$$

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & \alpha \le t \le b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-\alpha}{N}$, $t^n := \alpha + nh$, $n = 0, \dots, N$

Άλλες χρήσιμες μέθοδοι χαμηλής τάξης ακρίβειας

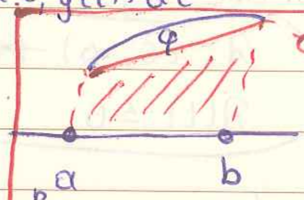
1. Μέθοδος του τραπεζίου

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$$ παίρνει τον μέσο όρο των $f(t^n, y^n)$ και $f(t^{n+1}, y^{n+1})$

- πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας $p = 2$
- Τρόπος κατασκευής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

τύπος τραπεζίου



$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2}[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))]$$

$$\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx \approx \frac{b-\alpha}{2}[\varphi(\alpha) + \varphi(b)]$$

αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n φτάνουμε στη μέθοδο

Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \ge 0, \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

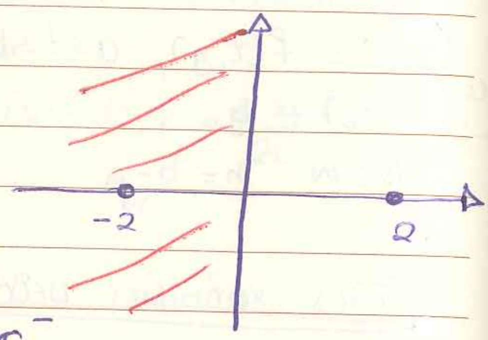
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}] \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)}_{\neq 0} y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow \boxed{y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} y^n}$$

Συνάρτηση ευστάθειας $\boxed{r(z) = \dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}}$

Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{z \in \mathbb{C} : r(z) \le 1\}$$
$$= \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{|1+\frac{z}{2}|}{|1-\frac{z}{2}|} \le 1\right\}$$
$$= \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z+2|}{|z-2|} \le 1\right\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} : \underbrace{|z+2|}_{|z-(-2)|} \le |z-2|\} = \mathbb{C}^-$$



άρα είναι Α-ευσταθής

Ισχυρισμός: Η μέθοδος τραπεζίου δεν είναι Β-ευσταθής.

$$y' = \lambda(t)y, \quad t \ge 0$$

$\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$\lambda(t) \le 0$

Τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[\lambda(t^n)y^n + \lambda(t^{n+1})y^{n+1}]$$

(αν έχω αντίστοιχα z^n τότε οι διαφορές $y^n - z^n$ ικανοποιούν την ίδια σχέση. αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής, γενικώς δεν ισχύει)

Έστω h δεδομένο. Επιλέγουμε το λ έτσι ώστε να ισχύει

$$h\lambda(t^n) = -8 \quad \text{και} \quad h\lambda(t^{n+1}) = -1.$$

Τότε έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}(-8y^n - y^{n+1}) \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{n+1} = -2y^n$$

$\Rightarrow |y^{n+1}| = 2|y^n|$ για $y^n \neq 0$ έχουμε

$|y^{n+1}| > |y^n|$ άρα δεν είναι Β-ευσταθής

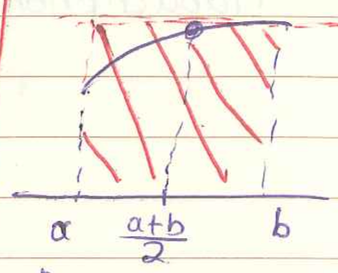
(19) (Λύστε μια μέθοδο που είναι Α-ευσταθής άρα όχι Β-ευσταθής)

2. Η μέθοδος του μέσου

$$y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2},\ \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

- πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας $p=2$.
- τρόπος κατασκευής:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$



$\int_a^b \varphi(x)dx \approx (b-a)\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$

τύπος του μέσου

Άρα $y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h f\left(\underbrace{\frac{t^n + t^{n+1}}{2}}_{= t^n + \frac{h}{2}},\ y\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}\right)\right)$

$$\approx \frac{1}{2}\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right]$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h f\left(t^n + \frac{h}{2},\ \frac{1}{2}\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right]\right)$$

αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και φτάνουμε στη μέθοδο

Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι B-ευσταθής

Υπόθεση $\forall t \in [a,b]\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}),\ x - \tilde{x}) \leq 0$$

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ z^{n+1} = z^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n - z^{n+1})\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + \frac{h}{2}\left[f\left(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})}_{x}\right) - f\left(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}(z^n - z^{n+1})}_{\tilde{x}}\right)\right]$$

παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})$

$$= \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})$$

και έχουμε:

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1},\ \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})\right) = \left(y^n - z^n,\ \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})\right)$$

$$+ \frac{h}{2}\underbrace{\left(f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) - f\left(t^n + \frac{h}{2}(z^n + z^{n+1})\right),\ \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \left(y^{n+1} - z^{n+1},\ \cancel{\tfrac{1}{2}}(y^n - z^n) + \cancel{\tfrac{1}{2}}(y^{n+1} - z^{n+1})\right) \leq \left(y^n - z^n,\ \cancel{\tfrac{1}{2}}(y^n - z^n) + \cancel{\tfrac{1}{2}}(y^{n+1} - z^{n+1})\right) \quad (20)$$

$\Rightarrow (y^{n+1}-z^{n+1}, y^n - z^n) + \|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2 \leq \|y^n - z^n\|^2 + (y^n - z^n, y^{n+1}-z^{n+1})$

$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2 \leq \|y^n - z^n\|^2$ άρα είναι B-ευσταθής

Παρατήρηση: Η μέθοδος του μέσου είναι και A-ευσταθής. Μάλιστα στην περίπτωση της $y' = \lambda y$ συμπίπτει με τη μέθοδο του τραπεζίου. Επομένως έχει περιοχή ευστάθειας

$$S = \mathbb{C}^-$$

20/11/2014

Άσκηση 2.9

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \geq 0$$

a) $[x(t)]^2 - [y(t)]^2 = 1, \; t \geq 0$

$x(t)\cdot x'(t) - y(t)\cdot y'(t) = x(t)\,[-y(t)] + y(t)\,x(t) = 0$

Άρα

$((x(t))^2 + (y(t))^2)' = 0$ οπότε $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \text{σταθερά}$

Επομένως

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = \underbrace{(x(0))^2 + (y(0))^2}_{=1}$$

Με $z = \binom{x}{y}$ έχουμε

$z'(t) = M\,z(t)$ με $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Σημαντική ιδιότητα $\forall x \in \mathbb{R}^2 \;\; (Mx, x) = 0$

β) Μέθοδος του Euler $h>0$

Ν.Δ.Ο. $(x^n)^2+(y^n)^2 \to \infty$

για $n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - hy^n \\ y^{n+1} &= y^n + h\cancel{x}x^n \end{aligned}\right\}$$

Άρα

$$(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 = (x^n-hy^n)^2+(y^n+hx^n)^2$$
$$= (x^n)^2+(y^n)^2+h^2[(x^n)^2+(y^n)^2]$$
$$= (1+h^2)[(x^n)^2+(y^n)^2]$$

Επομένως

$$(x^n)^2+(y^n)^2 = (1+h^2)^n \underbrace{[(x^0)^2+(y^0)^2]}_{=1}$$
$$= (1+h^2)^n \to \infty$$

για $n \to \infty$

γ) Μέθοδος τραπεζίου (κατάλληλη μέθοδος)

Ν.Δ.Ο. $(x^n)^2+(y^n)^2=1$.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \frac{h}{2}(y^n+y^{n+1}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2}(x^n+x^{n+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1}-x^n &= -\frac{h}{2}(y^n+y^{n+1}) \\ y^{n+1}-y^n &= \frac{h}{2}(x^n+x^{n+1}) \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με $(x^{n+1}+x^n)$ και την δεύτερη με $(y^{n+1}+y^n)$ και προσθέτουμε οπότε παίρνουμε

$$(x^{n+1})^2-(x^n)^2+(y^{n+1})^2-(y^n)^2 = 0 \Rightarrow$$

$(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 = (x^n)^2+(y^n)^2 \Rightarrow$ με τετριμμένη επαγωγή βρίσκουμε ότι

$$(x^n)^2+(y^n)^2 = \underbrace{(x^0)^2+(y^0)^2}_{=1}$$

δ) πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - hy^{n+1} \\ y^{n+1} &= y^n + hx^{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^n &= x^{n+1}+hy^{n+1} \\ y^n &= y^{n+1} - h\cancel{x}x^{n+1} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (x^n)^2+(y^n)^2 = (x^{n+1}+y^{n+1})^2+(y^{n+1}-hx^{n+1})^2$$
$$= (1+h^2)[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2]$$

Άρα $(x^n)^2+(y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n} \underbrace{[(x^n)^2+(y^n)^2]}_{\text{"}} \to 0$ για $n \to \infty$

Άσκηση 2.11

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) & , t \in [0,1] \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) & , t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

χρησιμοποιούμε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Ν.Δ.Ο. $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ (Mx, x) \leq 0$ (αρνητικά ημιορισμένος ο πίνακας δηλ.)

Έστω ότι ισχύει τότε, παίρνοντας στην (*) το εσωτερικό γινόμενο με $\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ έχουμε

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = x^n \cdot x^{n+1} + y^n \cdot y^{n+1} + h \underbrace{\left(M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq x^n \cdot x^{n+1} + y^n \cdot y^{n+1}$$
$$\underset{CS}{\leq} [(x^n)^2 + (y^n)^2]^{1/2} \cdot [(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow [(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2]^{\frac{1}{2}} \leq [(x^n)^2 + (y^n)^2]^{1/2}$$

$$(Mx, x) = \left(\begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1(-2x_1 + x_2) + x_2(2x_1 - 2x_2) =$$

$$= -2x_1^2 + x_1 x_2 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2$$

$$= \underbrace{-2(|x_1| - |x_2|)^2}_{\leq 0} \underbrace{- 4|x_1| \cdot |x_2| + 3x_1 x_2}$$

$$-4|x_1||x_2| + 3x_1x_2 = -3(|x_1 x_2| - x_1 x_2)$$

$$- |x_1 x_2| \leq 0$$

Άσκηση 2.12

$$\begin{cases} y' = My, & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: $M \in \mathbb{R}^{m,m}$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) \leq 0$

- πεπλεγμένη μέθοδος Euler
- μέθοδος του μέσου

Ν.Δ.ο $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$

- πεπλεγ. Euler

$$y^{n+1} = y^n + hMy^{n+1} \Rightarrow (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n, y^{n+1}) + h \underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1})$$

$$\underset{\uparrow CS}{\leq} \|y^n\| \cdot \|y^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$$

- μέθοδος μέσου

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot M \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} M(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$

$$(y^{n+1} - y^n, y^{n+1} + y^n) = \frac{h}{2} \underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), y^n + y^{n+1})}_{\leq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y^{n+1} - y^n, y^{n+1} + y^n) \leq 0 \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$$

Άσκηση 2.14

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = 0$

• μέθοδος μέσου (τραπεζίου είναι το ίδιο πράγμα σε αυτήν την περίπτωση)

Ν.Δ.Ο $\|y^{n+1}\| = \|y^n\|$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(My^n + My^{n+1})$$
$$= y^n + \frac{h}{2} M(y^n + y^{n+1})$$
$$\Rightarrow y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} M(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1} - y^n, y^{n+1} + y^n)}_{\|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2} = \frac{h}{2} \underbrace{(M(y^n + y^{n+1}), y^n + y^{n+1})}_{=0}$$
$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| = \|y^n\|$$

Άσκηση 2.15

SOS

$$\begin{cases} y' = -e^y, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

πεπλ. Euler. Ν.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

$f(t,y) = -e^y$ φθίνουσα συνάρτηση του y.

Επομένως η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [0,1] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

από την θεωρία, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς περιορισμό στο h.

Άσκηση 2.17

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

$\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \le 0$

Μέθοδος του μέσου

Ν.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

$$(*) \quad y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $x^* = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένο.

Τότε $y^{n+1} = 2x^* - y^n$ Με άγνωστο το x^* γράφουμε την (*) στη μορφή: $2x^* - y^n = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, x^*)$

$$\Rightarrow x^* = y^n + \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, x^*)$$

ορίζω τη συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, x)$$

- Η g είναι γνήσια αύξουσα, άρα έχει το πολύ μία ρίζα (μοναδικότητα της x^*)
- Ύπαρξη ρίζας Για $x > 0$ έχουμε

$$f(t^n + \frac{h}{2}, x) \le f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, x) \ge \frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow g(x) \ge x - y^n - \frac{h}{2}(t^n + \frac{h}{2}, 0) \to \infty$$

για $x \to \infty$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές

Για $x \le 0$ έχουμε

$$f(t^n + \frac{h}{2}, x) \ge f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, x) \le -\frac{h}{2} f(t^n + \frac{h}{2}, 0)$$

$$\Rightarrow g(x) \le x - y^n - \frac{h}{2}(t^n + \frac{h}{2}, 0) \to -\infty$$

για $x \to -\infty$

Άρα η g παίρνει και αρνητικές τιμές. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ρίζα της συνάρτησης

Άσκηση 2.18

$$\begin{cases} y' = f(y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: $f'(x) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

μέθοδος τραπεζίου

Ν.Δ.Ο. οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς περιορισμό στο h.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(y^{n+1})\right]$$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(x)$

• g γνήσια αύξουσα. άρα έχει το πολύ μια ρίζα.

για $x \ge 0$ $\quad f(x) \le f(0) \Rightarrow -\frac{h}{2} f(x) \ge -\frac{h}{2} f(0)$

άρα η $g(x) \ge x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \to \infty$ για $x \to \infty$

άρα η g παίρνει θετικές τιμές

για $x < 0$ $\quad f(x) \ge f(0) \Rightarrow -\frac{h}{2} f(x) \le -\frac{h}{2} f(0)$

$g(x) \le x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \to -\infty$ για $x \to -\infty$

άρα η g παίρνει αρνητικές τιμές.

Απ' το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ρίζα της g και είναι μοναδική

Άσκηση 2.19

$$\begin{cases} y'(t) = -[y(t)]^3 + \varphi(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f(t,y) = \varphi(t) - [y(t)]^3$ φθίνουσα συνάρτηση του y.

όπως στην προηγούμενη άσκηση οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

2η πρόοδος