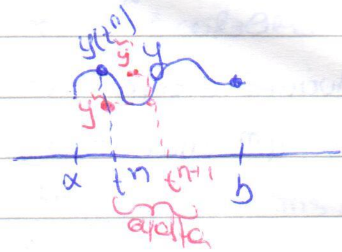
6/12/2024

2. Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Υπόθεση: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.



Έστω

$a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = b$ (δείκτης)

(αριστερό άκρο κόμβος) (δεξιό άκρο)

ένας διαμερισμός του $[a,b]$ με κόμβους t^i, $i=0,\dots,N$

- Στόχος: Προσεγγίσεις y^i των τιμών $y(t^i)$ της λύσης στους κόμβους t^i $i=0,\dots,N$.

Συνήθως για ευκολία στον διαμερισμό θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό, δηλαδή με $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ (βήμα του διαμερισμού) και $t^n = a + nh$, $n = 0,\dots,N$.

Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

* Στην περίπτωση γενικού διαμερισμού (μη ομοιόμορφου) το βήμα της μεθόδου του Euler είναι:

$$y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) f(t^n, y^n)$$

Υπολογιστικό κόστος ανά βήμα:

Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα.

Τρόποι κατασκευής της μεθόδου (3)

1ος

1. Με αριθμητική διαφόριση

Θεωρούμε την Δ.Ε. στο σημείο t^n,

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)).$$

Προσεγγίζουμε την $y'(t^n)$ με $\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{t^{n+1} - t^n}$, $y'(t^n) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$

→

②

Άρα:

$$\frac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$$

(Δεν θέλω το $\approx$ αλλά ακριβώς $=$)

Αντικαθιστάμε σε αυτή τη σχέση το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε:

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h} = f(t^n, y^n) \quad \text{(Βρήκα τη μέθοδο)}$$

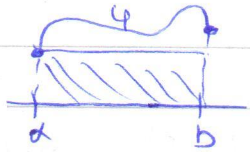
2. Με αριθμητική ολοκλήρωση:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

(Αριστερός τύπος του ορθογωνίου:)

$$\int_a^b y(x)\,dx \approx (b-a)\,y(a)$$



Λέγεται αριστερός γιατί χρησιμοποιεί το αριστερό άκρο.

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \underbrace{h}_{(t^{n+1}-t^n)} f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστάμε σε αυτή τη σχέση το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε:

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h} = f(t^n, y^n) \quad \text{(Βρήκα τη μέθοδο)}$$

3. Με ανάπτυξη Taylor

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\,y'(t^n) + \overbrace{\frac{h^2}{2!}\,y''(\xi^n)}^{\text{υπόλοιπο του τύπου}}$$

με $\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$ όπου το πήρα γιατί θέλω να σταματήσω.

Άρα: (Εξαιρώντας το υπόλοιπο)

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\,\underbrace{y'(t^n)}_{f(t^n,\, y(t^n))} \leftarrow \text{ΔΕ}$$

Δηλαδή:

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\,f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστάμε σε αυτή τη σχέση το $\approx$ με $=$ και τα

$y(t^m)$ με y^m και παίρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$$

⟶ Θέμα (ή και τα 3 ή 1 από αυτά)

Συνέπεια

Η ποσότητα $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^n, y(t^n))$ (ή το αντίθετο της) λέγεται:

- σφάλμα συνέπειας
- τοπικό σφάλμα
- τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης.

Το δ^n δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε είναι όμως πολύ χρήσιμο για την μελέτη της μεθόδου.

- Πως προκύπτει το δ^n;

• Αντικαθιστώντας στη μέθοδο τα y^m με τα $y(t^m)$ δεν έχουμε πια ισότητα, αλλά προκύπτει το σφάλμα δ^n. Δηλαδή το σφάλμα συνέπειας είναι το μέγεθος της αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιεί τη μέθοδο. Ξεκινώντας από την ακριβή τιμή $y(t^n)$ και κάνοντας ένα βήμα με τη μέθοδο του Euler βρίσκουμε την προσέγγιση $\tilde{y}^{n+1} := y(t^n) + hf(t^n, y(t^n))$

Προφανώς $\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1}$

• Πως συμπεριφέρεται το δ^n καθώς το h τείνει στο μηδέν;

Έχουμε:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^n)$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \left[\cancel{y(t^n)} + h\cancel{y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right] - \cancel{y(t^n)} - h\cancel{y'(t^n)}$$

Άρα:

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$$

$$\Rightarrow \max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

Το δ^n φθίνει για $h \to 0$ (τουλάχιστον όπως το h^2).

④

Εστω $N \in \mathbb{N}$ $h := \frac{b-a}{N}$ και $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) , & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Ευσταθεια

$z^0 \in \mathbb{R}$

$z^{n+1} := z^n + hf(t^n, z^n)$, $n = 0, \dots, N-1$

Υποθεση: Εστω οτι η f ικανοποιει την συνθηκη του Lipschitz ως προς y, ομοιομορφα ως προς t,

$\exists L \geq 0$ $\forall t \in [a, b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Αφαιρωντας κατα μελη εχω:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\leq L|y^n - z^n|}$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + Lh) \cdot |y^n - z^n| \ *$$

Ισχυρισμος:

$$(**) \quad |y^n - z^n| \leq (1 + Lh)^n |y^0 - z^0| , \quad n = 0, \dots, N.$$

Αποδειξη:

Επαγωγη:

Για $n = 0$: $|y^0 - z^0| \leq |y^0 - z^0|$ ✓

Βημα $n \to n+1$ $|y^{n+1} - z^{n+1}| \overset{*}{\leq} (1 + Lh) |y^n - z^n|$

$$\overset{\text{Υποθεση επαγωγης}}{\leq} \underbrace{(1 + Lh)(1 + Lh)^n}_{(1+Lh)^{n+1}} |y^0 - z^0|$$

Τωρα

$\forall x \geq 0$ $e^x \geq 1 + x$

Αποδειξη:

- $e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\geq 0} \geq 1 + x$

- $\varphi(x) = e^x - (1+x)$

  $\varphi(0) = 0$

  $\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ αύξουσα συνάρτηση

Άρα

$$(1+Lh)^n \leq (e^{Lh})^n = e^{nLh} = e^{L(nh)} = e^{L(t^n - a)}$$

Άρα συμπεραίνω

$$|y^n - z^n| \leq e^{L(t^n - a)} |y^0 - z^0|$$

οπότε και

$$\max_{a \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

σταθερά ανεξάρτητη των h, n.

▸ Λήμμα (Σημαντικό τεχνικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Έστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, \dots \geq 0$, τ.ω (*) $d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + K$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Τότε ισχύει:

(**) $d_n \leq d_0 e^{n\delta} + K \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Απόδειξη:

Για $n = 0$ η (**) γράφεται στη μορφή

$$d_0 \leq d_0 \underbrace{\cancel{e^0}}_{1} + K \underbrace{\cancel{\frac{e^0 - 1}{\delta}}}_{0} \Rightarrow d_0 \leq d_0 \checkmark$$

Προφανώς ισχύει.

Έστω τώρα $n \geq 1$

Ισχυρισμός: $d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$

Απόδειξη με επαγωγή: $n = 1$: $d_1 \leq (1+\delta) d_0 + K$ ισχύει σύμφωνα με την (*)

$n \to n+1$: $d_{n+1} \underset{(*)}{\leq} (1+\delta) d_n + K$

$$\overset{\text{υπόθεση επαγωγής}}{\leq} (1+\delta)\{(1+\delta)^n d_0 + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]\} + K$$

$$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + K[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^n]$$

ισχύει

⑥

Άρα:

$$d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + k\underbrace{\left[1+(1+\delta)+\cdots+(1+\delta)^{n-1}\right]}_{=\frac{(1+\delta)^n-1}{(1+\delta)-1} = \frac{(1+\delta)^n-1}{\delta}}$$

$$\Rightarrow d_n \leq \underbrace{(1+\delta)^n}_{\leq e^{n\delta}} d_0 + k\,\frac{(1+\delta)^n-1}{\delta}$$

$$\Rightarrow d_n \leq e^{n\delta} d_0 + k\,\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}$$

Εκτίμηση του σφάλματος (ολικού)

Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια της μεθόδου.

Θεώρημα:

Έστω $f: [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Έστω $y\in C^2[a,b]$ η λύση. Αν $y^0,\dots,y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για ένα ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h=b-a/N$, τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος:

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n)-y^n| \leq \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]}_{c} h$$

με $M=\max_{a\leq t\leq b} |y''(t)|$

11/11/2014

Η μέθοδος του Euler

$$(*)\begin{cases} y' = f(t,y), & a\le t\le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N\in\mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$

$t^n = a + nh$, $n = 0,\dots,N$

$$(+)\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Συνέπεια

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^n, y^n)$$

$$\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$$

Εκτίμηση σφάλματος

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή με σταθερά L. Έστω $y\in C^2[a,b]$ η λύση του $(*)$. Τότε για τις προσεγγίσεις $y^0,\dots,y^N$ που δίνονται από την $(+)$ ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]}_{C} h.$$

με $M := \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$

Απόδειξη

Έχουμε: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^n, y(t^n)) + \delta^n$

$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$

Θέτουμε: $\varepsilon^i = y(t^i) - y^i$

ολικό σφάλμα μεθόδου

ολικό σφάλμα προσέγγισης

ολικό σφάλμα διακριτοποίησης

Αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \delta^n$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h\underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\le L|y(t^n) - y^n| \le L|\varepsilon^n|} + |\delta^n|$$

Άρα

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1+Lh)|\varepsilon^n| + |\delta^n|$$

οπότε

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1+\underset{\delta}{Lh})|\varepsilon^n| + \underbrace{\max_{0\le i\le N-1}|\delta^i|}_{K \text{ (στο βοηθητικό λήμμα)}}$$

Επομένως, σύμφωνα με το βοηθητικό λήμμα ισχύει:

$$|\varepsilon^n| \le \cancel{e^{Lhn}|\varepsilon^0|} + \frac{e^{Lhn}-1}{Lh} \max_{0\le i\le N-1}|\delta^i|, \quad \varepsilon^0 = 0$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le \frac{e^{L(t^n-a)}-1}{L\cancel{h}} \cdot \frac{h^{\cancel{2}}}{2} \cdot M$$

$$= \frac{M}{2L}\left(e^{L(t^n-a)} - 1\right) \cdot h, \quad t^n \le b$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N}|\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] h$$

Αποτέλεσμα

$$\max_{0\le n\le N}|y(t^n) - y^n| \le C \cdot h$$

C ανεξάρτητο του h

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου: $\boxed{p \ge 1}$

• Ερώτηση: Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του h στην εκτίμηση σφάλματος (**);

(Αν $M=0$, δηλαδή $y \in P_1$, τότε το σφάλμα $y(t^n) - y^n$ είναι μηδέν)

• Απάντηση: Γενικά όχι (δηλαδή $\boxed{p \le 1}$)

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} y'(t) = 2t & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση

$$y(t) = t^2$$

(Επιλέξαμε έτσι ώστε $y''(t) = \text{σταθερά} \ne 0$)

Εστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$ $\quad n = 0, \dots, N$

Μεθοδος του Euler:

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot 2t^n$$

Αρα

$$y^{n+1} = y^n + 2nh^2 \quad n = 0, \dots, N-1.$$

- Ισχυρισμος

$$y^n = y^0 + 2[1 + 2 + \dots + (n-1)]\, h^2, \quad n = 0, \dots, N$$

- Αποδειξη

Επαγωγη

$n = 0$: $y^0 = y^0$

$n \to n+1$:

$$y^{n+1} = y^n + 2nh^2$$
$$\underset{\substack{\text{υποθεση} \\ \text{επαγωγης}}}{=} y^0 + 2[1 + 2 + \dots + (n-1)]h^2 + 2nh^2$$
$$= y^0 + 2[1 + 2 + \dots + (n-1) + n] \cdot h^2$$

Επομενως

$$y^n = y^0 + 2\underbrace{[1 + 2 + \dots + (n-1)]}_{\frac{(n-1)n}{2}} \cdot h^2$$
$$= \boxed{(n-1)nh^2}$$

Για $\boxed{n = N}$, εχουμε

$$y^N = (N-1) \cdot N\, h^2 = (N-1)\underbrace{(Nh)}_{1} \cdot h = (N-1)h = \underbrace{Nh}_{1} - h = 1 - h$$

Επομενως

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{y(t^N)} - y^N = 1 - (1 - h) = h$$

οποτε

$$|y(t^N) - y^N| = h$$

Ιδιαιτερα

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \ge h. \quad (C > 0)$$

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler $\boxed{p=1}$

$(p \geq 1 \quad , \quad p \leq 1)$

εκτ. σφάλμα   πορίσ

Το τοπικό σφάλμα είναι τάξης $p+1 = 2$!

• Ερώτημα: Τι αλλάζει στην περίπτωση ΠΑΤ για συστήματα ΣΔΕ;

(Βέβαια, η απόλυτη τιμή θα αντικατασταθεί με κάποια νόρμα)

• Απάντηση: Μόνο η παράσταση του σφάλματος συνέπειας.

Σφάλμα συνέπειας

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\,\overset{y'(t^n)}{\overset{\shortparallel}{f(t^n, y(t^n))}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h y'(t^n)}$$

• Βαθμωτή περίπτωση

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

Άρα

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

• Διανυσματική περίπτωση

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m \quad , m > 1$$

Τότε το ανάπτυγμα Taylor στη μορφή (*) δεν ισχύει!

Για κάθε συνιστώσα i του y έχουμε:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{ni})$$

Επομένως στην διανυσματική περίπτωση έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

Για την νόρμα μεγίστου $\| \, \|_\infty$ έχουμε

$$\|\delta^n\|_\infty \leq \frac{h^2}{2} M \quad \text{με } M = \max_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|_\infty$$

→

Για μια τυχαία νόρμα $\| \ \|$ του $\mathbb{R}^m$ χρησιμοποιούμε πρώτα την ισοδυναμία των $\| \ \|$ και $\| \ \|_\infty$ και έχουμε

$$\exists C_1>0 \ \forall x\in\mathbb{R}^m \quad \|x\| \le C_1\|x\|_\infty$$

Επομένως έχουμε

$$\|\delta^n\| \le C_1\|\delta^n\|_\infty \le C_1\frac{M}{2}h^2 \quad \text{με } M=\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|_\infty$$

Εναλλακτικός τρόπος: Τύπος του Taylor με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή,

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)y''(t)\,dt$$

Σ' αυτή τη μορφή ισχύει και για διανυσματικές συναρτήσεις.

Επομένως:

$$\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)y''(t)\,dt,$$

οπότε

$$\|\delta^n\| \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\|y''(t)\|\,dt$$

$$\le \underbrace{\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|}_{= M} \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\,dt}_{= \frac{h^2}{2}}$$

▷ Περιοχή ευστάθειας,

A-ευστάθεια, B-ευστάθεια

Μια μέθοδος που μας δίνει το y^{n+1} χρησιμοποιώντας την προσέγγιση y^n (αλλά όχι την $y^{n-1}, \dots$) λέγεται μονοβηματική.

Ορισμός (B-ευστάθεια)

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται B-ευσταθής, αν όταν εφαρμόζεται στο πρόβλημα δοκιμής με f που ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$$\forall t\in[a,b] \ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m \quad (f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\, x-\tilde{x}) \le 0$$

με αρχικές προσεγγίσεις y^0 και z^0 δίνει προσεγγίσεις y^n και z^n αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η ακολουθία $\|y^n-z^n\|$, $n=0,\dots,N$, (με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδεια νόρμα), να είναι φθίνουσα δηλαδή →

$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|$, $n=0,\dots,N-1$ (Δηλαδή η μέθοδος μιμείται την διαφορική εξίσωση για λύσεις $y(t)$ και $z(t)$ της οποίας ισχύει ότι $\|y(t)-z(t)\|$ είναι φθίνουσα).

Όπως θα δούμε η μέθοδος του Euler δεν είναι B-ευσταθής. Εξασθενούμε λίγο την απαίτηση ευστάθειας και εισάγουμε την περίπτωση που η f είναι πολυώνυμο το πολύ πρώτου βαθμού ως προς y, $f(t,y) = \lambda y + f(t)$.

Αρκεί να εξετάσουμε την συμπεριφορά των προσεγγίσεων για την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ.

Ορισμός (Α-ευστάθεια)

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Α-ευσταθής, αν, όταν εφαρμόζεται στο πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\,\lambda \le 0$, και τυχαίο βήμα h, δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η ακολουθία $|y^n|$ να είναι φθίνουσα

$$|y^{n+1}| \le |y^n| , \quad n=0,1,\dots$$

(Δηλαδή η μέθοδος μιμείται την ιδιότητα της λύσης $y(t)$ που είναι ότι η $|(y(t))|$ είναι φθίνουσα.

Ισχύουν τα εξής:

$$\text{B-ευστάθεια} \Rightarrow \text{A-ευστάθεια}$$
$$\not\Leftarrow$$

13/11/2014

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι Α-ευσταθής (οπότε δεν είναι ούτε Β-ευσταθής).

(άσκηση)

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y, & t \ge 0 \\ y(0)=1. \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda \cdot y^n \Rightarrow$$
$$y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n \Rightarrow$$
$$|y^{n+1}| = |1+\lambda h|\,|y^n|$$

Για $y^n \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\,\lambda \le 0$, δεν ισχύει γενικά ότι $|y^{n+1}| \le |y^n|$, γιατί

π.χ. για $\lambda h = -3$ έχουμε $|y^{n+1}| = 2\underbrace{|y^n|}_{\neq 0} > |y^n|$.

Με τη συνάρτηση

$$r(z) = 1+z$$

η μέθοδος του Euler για το πρόβλημα (*) γράφεται στη μορφή

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$$

Η r λέγεται συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου.

Ορισμός (Περιοχή ευστάθειας)
Εφαρμόζουμε μια μονοβηματική μέθοδο στο πρόβλημα δοκιμής (*). Η περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου αποτελείται από όλα τα σημεία $z = \lambda h \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο με την ιδιότητα ότι για λ και h τ.ω $\lambda h = z$ η μέθοδος να δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω η ακολουθία $|y^n|$ $n = 0, 1, \dots$, να είναι φθίνουσα, δηλαδή $|y^{n+1}| \leq |y^n|$. Η τομή της S με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται διάστημα ευστάθειας της μεθόδου.

Παρατήρηση: Μια μέθοδος είναι A-ευσταθής, αν και μόνο αν το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \;\; \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$ περιέχεται στην περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου.

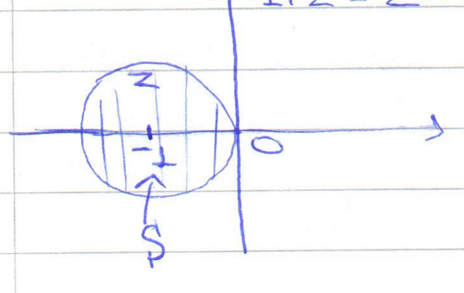
Μέθοδος του Euler: $y^{n+1} = r(\lambda h) y^n \Rightarrow$

$$|y^{n+1}| = |r(\lambda h)|\, |y^n|, \quad r(z) = 1+z$$

Άρα

$$S = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |r(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \;\; |1+z| \leq 1\}$$

$1+z = z-(-1)$



$z = x+iy$

ή $z+1 = (x+1)+iy$

$|z+1|^2 = (x+1)^2 + y^2$

$\boxed{(x+1)^2 + y^2 = 1}$ κύκλος.

Παρατήρηση (σχετικά με τη συνέπεια της μεθόδου) Σφάλμα συνέπειας της μεθόδου του Euler, όταν την εφαρμόσαμε στο (*)

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\lambda y(t^n)$$
$$= y(t^{n+1}) - r(\lambda h) \cdot y(t^n)$$

→

$$= e^{\lambda t^{n+1}} - r(\lambda h) e^{\lambda t^n}$$
$$= e^{\lambda t^n + \lambda h} - r(\lambda h) e^{\lambda t^n}$$
$$= [e^{\lambda h} - r(\lambda h)] e^{\lambda t^n}$$
$$= [e^{\lambda h} - r(\lambda h)] e^{\lambda t^n}$$
$$= [\cancel{1} + \cancel{\lambda h} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 h^2 + O(h^3) - \cancel{1} - \cancel{\lambda h}] e^{\lambda t^n}$$
$$= \boxed{O(h^2)}$$

Γενικά για μια μονοβηματική μέθοδο με συνάρτηση ευστάθειας r ισχύει:

τάξη της μεθόδου $= p \Rightarrow e^z - r(z) = O(z^{p+1})$ για $z \to 0$

$\not\Leftarrow$

• **Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου του Euler**

- Πλεονεκτήματα:
  - Η μέθοδος είναι άμεση (δεν χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις)
  - Προγραμματίζεται πολύ εύκολα, και απαιτεί ένα μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα.

- Μειονεκτήματα
  - Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ένα δηλαδή πολύ χαμηλή, οπότε για να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε πολύ μικρό βήμα h. Αυτό αυξάνει πολύ το συνολικό κόστος και επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων λόγω σφαλμάτων, στρογγύλευσης.
  - Επιπλέον η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής, ούτε και A-ευσταθής και μάλιστα έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας S.

• **Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler**

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}), & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Τροποι κατασκευης

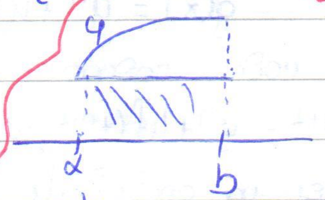
• **Αριθμητική ολοκλήρωση**

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt \Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

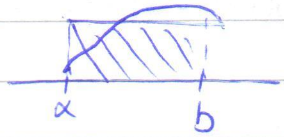
$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστούμε το $\simeq$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε

$$y^{n+1} - y^n = h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq (b-a)\varphi(a)$$



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq (b-a)\varphi(b)$$

• **Αριθμητική Διαφόριση**

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Έχουμε

$$y'(t^{n+1}) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

οπότε

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστούμε .... (όπως και πριν)

• Ανάπτυγμα Taylor (ως προς το σημείο t^{n+1})

- **Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων**

Χωρίς υποθέσεις στην f και/ή στο βήμα h οι προσεγγίσεις <u>δεν</u> είναι καλά ορισμένες.

π.χ. εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο πρόβλημα δοκιμής (*) έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot\lambda\cdot y^{n+1} \Rightarrow$$

$$(+)\quad \boxed{(1-\lambda h)\,y^{n+1} = y^n}$$

Έστω $\lambda > 0$ και $h = 1/\lambda$.

Τότε για $\boxed{y^n \neq 0}$, δεν υπάρχει λύση της (+)

Για $\boxed{y^n = 0}$ κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση της (+).

1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Ισχυρισμός: Για αρκετά μικρό h έτσι ώστε $Lh<1$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = y^n + hf(t^{n+1}, x).$$

Τότε κάθε σταθερό σημείο της g αποτελεί λύση της εξίσωσης $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$ και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x_1) - g(x_2) = h[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)] \Rightarrow$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| = h\underbrace{|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|}_{\le L|x_1 - x_2|}$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \le \underbrace{Lh}_{<1}|x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow$ g συστολή, οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

2η Περίπτωση Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$\forall t \in [a,b]$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t, x_1) - f(t, x_2)](x_1 - x_2) \le 0$.

Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, χωρίς περιορισμό στο βήμα h.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, x)$$

Κάθε ρίζα της g είναι λύση της $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$ και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα.

- Η g είναι συνεχής
- Μοναδικότητα ρίζας: Η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.
- Ύπαρξη ρίζας: Για $x \le 0$ έχουμε

$$\overset{-h}{\downarrow} f(t^{n+1}, x) \ge \overset{-h}{\downarrow} f(t^{n+1}, 0), \text{ οπότε,}$$

$$g(x) = x - y^n \underbrace{- hf(t^{n+1}, x)}_{\le -hf(t^{n+1}, x)}$$

$\rightarrow$

$g(x) = x - y^n - hf(t^{n+1}, 0) \to -\infty \ , \ x \to -\infty$

Συμπέρασμα: Η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

Αντίστοιχα για $x \geq 0$ έχουμε $f(t^{n+1}, x) \leq f(t^{n+1}, 0)$

οπότε

$$g(x) \geq x - y^n - hf(t^{n+1}, 0) \to \infty \quad \text{για } x \to \infty$$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, η g έχει (τουλάχιστον) μια ρίζα.

Συνέπεια

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\underbrace{f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}_{y'(t^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1})$$

Taylor

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) - hf'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Άρα

$$\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{h^2}{2} \underbrace{\max_{a \leq t \leq b} |y''(\xi)|}_{\chi_1}$$

$\Rightarrow$ Τάξη ακρίβειας: $p = 1$

Ευστάθεια

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1}), & n = 0, \dots, N-1 \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

1η Περίπτωση Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + hL|y^{n+1} - z^{n+1}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - Lh)}_{>0} |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow \boxed{|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1-Lh}|y^n - z^n|}$$

Ισχυρισμός: Για h τ.ω $Lh \leq 1/2$ ισχύει:

$$\frac{1}{1-Lh} \leq 1 + 2Lh$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (1-Lh)(1+2Lh) = 1 - Lh + 2Lh - 2L^2h^2$$
$$= 1 + Lh - 2L^2h^2$$
$$= 1 + Lh\underbrace{(1-2Lh)}_{\geq 0}$$

Άρα: $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+2Lh)|y^n - z^n|$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (1+2Lh)^n |y^0 - z^0|$$
$$\leq e^{2Lhn}|y^0 - z^0| = e^{2L(t^n - a)}|y^0 - z^0|$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq n\leq N} |y^n - z^n| \leq e^{2L(b-a)}|y^0 - z^0|$$

$\downarrow$ C ανεξ. του h.

18/11/14

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$

$t^n = a + nh \quad n = 0, \dots, N$

Πεπλεγ. μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) & n = 0 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Ευστάθεια

▷ 2η περίπτωση Η $f : [\alpha, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [\alpha, b]\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}\quad (f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}) & n=0,\dots,N \\ z^0 \text{ δεδομένο} \end{cases}$$

Έχουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}) \right]$$

$$\overset{\text{Εσωτ γιν}}{\Longrightarrow} \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 = (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) + h\underbrace{\left(f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}), y^{n+1} - z^{n+1}\right)}_{\le 0}$$

$$\Longrightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \le (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) \underset{CS}{\le} \|y^n - z^n\| \cdot \|y^{n+1} - z^{n+1}\|$$

$$\Longrightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| \quad (*)$$

• **Συμπέρασμα**: Η πεπλεγμένη μορφή του Euler είναι B-ευσταθής (ιδιαίτερα και A-ευσταθής)

Επίσης, από την $(*)$ έπεται ότι $\|y^n - z^n\| \le \|y^0 - z^0\|$, $n=0,\dots,N$

Βαθμοί	
$8 \le b < 9$	2
$7 \le b < 8$	3
$6 \le b < 7$	4
$5 \le b < 6$	7
$4 \le b < 5$	14

• **Περιοχή ευσταθείας**

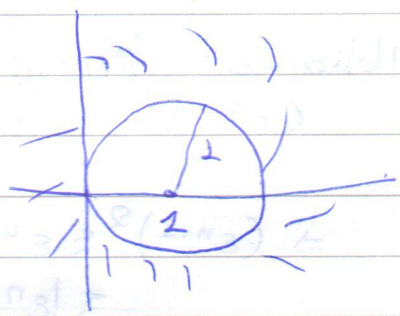
$$(+)\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h > 0$

$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n-1} \Longrightarrow$

$\underbrace{(1+\lambda h)}_{\neq 0} y^{n+1} = y^n \Longrightarrow$

$$\boxed{y^{n+1} = \frac{1}{1+\lambda h} y^n}$$



• **Συνάρτηση ευστάθειας**: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Τότε η μέθοδος γράφεται στη μορφή:

$$y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$$

• **Περιοχή ευσταθείας**

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \le 1 \}$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \le 1 \right\}$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \ge 1 \} \supset \mathbb{C}^-$$

②

- **Εκτίμηση του σφάλματος (συνέχεια)**

▷ 1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz. Συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια, όπως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler, αποδεικνύεται ότι, για h τ.ω. $Lh \leq \frac{1}{2}$,

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n)-y^n| \leq \frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)}-1\right]h$$

με $M=\max_{a\leq t\leq b}|y''(t)|$

▷ 2η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (με $m=1$)

Έχουμε:

$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

Επομένως, αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε, με

$$\varepsilon^n = y(t^n) - y^n$$

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] + \delta^n$$

(εξίσωση σφάλματος)

$$\max_{0\leq n\leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{M}{2}h^2$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $y(t^{n+1})-y^{n+1}=\varepsilon^{n+1}$ παίρνουμε:

$$(\varepsilon^{n+1})^2 = \varepsilon^n\varepsilon^{n+1} + \underbrace{h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]\cdot\varepsilon^{n+1}}_{\leq 0} + \delta^n\varepsilon^{n+1}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon^{n+1})^2 \leq \varepsilon^n\cdot\varepsilon^{n+1} + \delta^n\cdot\varepsilon^{n+1}$$

$$\leq |\varepsilon^n|\,|\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^{\cancel{2}} \leq (|\varepsilon^n| + |\delta^n|)\,\cancel{|\varepsilon^{n+1}|}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + |\delta^n|$$

$$\leq |\varepsilon^n| + \max_{0\leq n\leq N}|\delta^n|$$

Άρα

$$|\varepsilon^n| \leq \cancel{|\varepsilon^0|}^{\,0} + n\cdot\max_{0\leq i\leq N-1}|\delta^i|$$

→

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le N \cdot \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le N \cdot \frac{M}{2} h^2$$

$$= Nh \frac{M}{2} \cdot h$$

$$= \frac{(b-a)}{2} M h$$

Άλλες χρήσιμες μέθοδοι υψηλής τάξης ακρίβειας

1. Μέθοδος Τραπεζίου

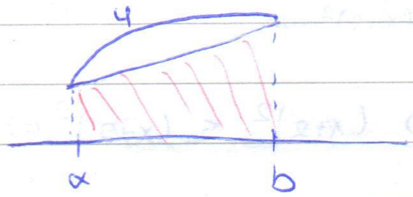
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$$

- πεπλεγμένη μορφή
- τάξης ακρίβειας $p=2$

• Τρόπος κατασκευής

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$



Θα προσεγγίσω το ολοκλήρωμα με τον τύπο του τραπεζίου.

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq \frac{h}{2}[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))] \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}[\varphi(a) + \varphi(b)]$$

Αντικαθιστώντας το $\simeq$ με $=$

και τα $y(t^m)$ με y^m ....

• Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \ge 0, \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

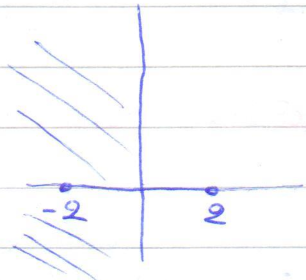
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}] \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)}_{\neq 0} y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 + \frac{\lambda h}{2}} \cdot y^n$$

Συνάρτηση ευστάθειας $\quad r(z) = \dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$.

Περιοχή ευστάθειας

$$S = \{z\in\mathbb{C} : |r(z)|\le 1\}$$
$$= \left\{z\in\mathbb{C} : \frac{|1+\frac{z}{2}|}{|1-\frac{z}{2}|}\le 1\right\}$$
$$= \left\{z\in\mathbb{C} : \frac{|z+2|}{|2-z|}\le 1\right\}$$
$$= \{z\in\mathbb{C} : |z+2| \le \underset{|z-(-2)|}{\underset{\shortparallel}{|z-2|}}\} = \mathbb{C}^-$$



αυτά που απέχουν το ίδιο -2 και 2 είναι αυτά που είναι στη μεσοκάθετο δηλ. στον άξονα

2ος τρόπος

$z = x+iy$

$|z+2| \le |z-2| \Leftrightarrow$

$$\underset{(x+2)^2+y^2}{\underset{\shortparallel}{|(x+2)+iy|^2}} \le \underset{(x-2)^2+y^2}{\underset{\shortparallel}{|(x-2)+iy|^2}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 \le (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4 \le x^2-4x+4 \Leftrightarrow 8x\le 0 \Rightarrow x\le 0$$

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι B-ευσταθής.

$$y' = \lambda(t)y \qquad t\ge 0$$

$\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$
$\lambda(t) \le 0$

Τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[\lambda(t^n)y^n + \lambda(t^{n+1})y^{n+1}]$$

(Αν έχω και αντίστοιχα z^n, τότε οι διαφορές $y^m - z^m$ ικανοποιούν την ίδια σχέση)

Έστω h σταθερό.

Επιλέγουμε το λ έτσι ώστε $h\lambda(t^n) = -8$ και $h\lambda(t^{n+1}) = -1$.

Τότε, έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}\left(-8y^n - y^{n+1}\right) \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = -2y^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}| = 2|y^n|$$

Για $y^n \neq 0$ έχουμε

$$|y^{n+1}| > |y^n|$$

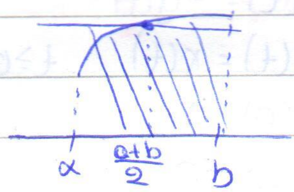
2 Η μέθοδος του μέσου

$$y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

- πεπλεγμένη μορφή
- τάξη ακρίβειας $p=2$

$$y'(t)=f(t,y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$



$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq h f\Big(\underbrace{\frac{t^n+t^{n+1}}{2}}_{= t^n + \frac{h}{2}}, \underbrace{y\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}\right)}_{\simeq \frac{1}{2}[y(t^n)+y(t^{n+1})]}\Big)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq (b-a)\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Τύπος του μέσου

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \simeq y(t^n) + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}[y(t^n)+y(t^{n+1})]\right)$$

Αντικαθιστούμε ....

Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι B-ευσταθής

Υπόθεση: $\forall t\in[a,b]\ \forall x,\bar{x} \in \mathbb{R}^m \quad (f(t,x)-f(t,\bar{x}), x-\bar{x}) \le 0$

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right) \\ z^{n+1} &= z^n + \frac{h}{2} f\left(z^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + \frac{h}{2}\Big[f\Big(t^n+\frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})}_{= x}\Big) - f\Big(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})}_{\bar{x}}\Big)\Big]$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με

$$\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1}) = \frac{1}{2}(y^n-z^n)+\frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})$$

και έχουμε

$$\left(y^{n+1}-z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^n-z^n)+\frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})\right) = \left(y^n-z^n, \frac{1}{2}(y^n-z^n)+\frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})\right)$$

$$+ \frac{h}{2}\underbrace{\left(f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right)-f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right), \frac{1}{2}(y^n-z^n)+\frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1}\right)}_{\le 0}$$

$$\Rightarrow \left(y^{n+1}-z^{n+1}, \tfrac{1}{2}(y^n-z^n)+\tfrac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})\right) \le \left(y^n-z^n, \tfrac{1}{2}(y^n-z^n)+\tfrac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{(y^{n+1}-z^{n+1}, y^n-z^n)}+\|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2 \le \|y^n-z^n\|^2+\cancel{(y^n-z^n, y^{n+1}-z^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\|^{\cancel{2}} \le \|y^n-z^n\|^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}-z^{n+1}\| \le \|y^n-z^n\|$$

· Η μέθοδος του μέσου είναι και Α-ευσταθής. Ειδικά στην περίπτωση της $y'=\lambda y$ ταυτίζεται με τη μέθοδο του τραπεζίου. Επομένως, έχει περιοχή ευστάθειας $S = \mathbb{C}^-$

20/11/14

Άσκηση 2.9

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \quad t \ge 0 \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned}$$

a) $[x(t)]^2+[y(t)]^2 = 1 \quad t \ge 0$

$$x(t)x'(t)+y(t)y'(t) = x(t)[-y(t)]+y(t)x(t) = 0$$

Άρα

$$(x(t)^2+y(t)^2)' = 0$$

οπότε

$$(x(t))^2+(y(t))^2 = \text{σταθ}$$

Επομένως $(x(t))^2+(y(t))^2 = \underbrace{(x(0)^2+y(0)^2)}_{=1}$

Με $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ έχουμε $z'(t) = M(z(t))$ με

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Σημαντική ιδιότητα $\forall x \in \mathbb{R}^2 \ (M, x, x) = 0$

b) Μέθοδος του Euler $h > 0$

Ν.Δ.Ο $(x^n)^2+(y^n)^2 \to \infty$ για $n \to \infty$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^{n+1} = x^n + hy^n \\ y^{n+1} = y^n + hx^n \end{matrix}$$

Άρα $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - hy^n)^2 + (y^n + hx^n)^2$
$= (x^n)^2 + (y^n)^2 + h^2[(x^n)^2 + (y^n)^2]$
$= (1+h^2)[(x^n)^2 + (y^n)^2]$

Επομένως
$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^2 \underbrace{[(x^0)^2 + y(0)^2]}_{=1}$
$= (1+h^2)^n \to \infty$ για $n \to \infty$

γ) Μέθοδος τραπεζίου

$y'(t) = f(t, y(t))$
$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})]$

Ν.Δ.Ο $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^{n+1} = x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} = y^n - \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^{n+1} - x^n = -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{matrix}\right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με $x^{n+1} + x^n$, την δεύτερη με $y^{n+1} + y^n$ και προσθέτουμε, οπότε παίρνουμε
$(x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = 0$
$(x^{n+1})^2 - (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2 \Rightarrow$
$(x^n)^2 + (y^n)^2 = \underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{=1}$

δ) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - h y^{n+1} \\ y^{n+1} &= y^n + h x^{n+1} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^n &= x^{n+1} + h y^{n+1} \\ y^n &= y^{n+1} - h x^{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (x^n)^2 + (y^n)^2 &= (x^{n+1} + h y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2 \\ &= (1+h^2)\left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right] \end{aligned}$$

Άρα διαιρούμε,

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n}\left[\underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{=1}\right] \to 0, \; n \to \infty$$

- Άσκηση 2.11

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) & , \; t \in [0,1] \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) & , \; t \in [0,1] \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

Ν.Δ.Ο $\quad (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h\underline{U} \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός $\quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (Ux, x) \leq 0$

Ώστε παίρνοντας στην $(*)$ το εσωτερικό γινόμενο με $\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ έχουμε

$$(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 = x^n x^{n+1} + y^n y^{n+1} + h\underbrace{\left(M\begin{pmatrix}x^{n+1}\\ y^{n+1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{n+1}\\ y^{n+1}\end{pmatrix}\right)}_{\le 0}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 \le x^n x^{n+1} + y^n y^{n+1}$$

$$\overset{CS}{\le} \left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]^{1/2}\left[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \left[(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2\right]^{1/2} \le \left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]^{1/2}$$

$$(Mx, x) = \left(\begin{pmatrix}-2x_1+x_2\\ 2x_1-2x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right) = x_1(-2x_1-x_2)+x_2(2x_1-2x_2)$$

$$= -2x^2 + x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

$$= \underbrace{-2(|x_1|-|x_2|)^2}_{\le 0} \underbrace{-4|x_1||x_2| + 3x_1x_2}_{=-3\underbrace{(|x_1x_2|-x_1x_2)}_{\ge 0} - |x_1x_2| \le 0}$$

≤ 0 γιατί (-3)

Άσκηση 2.12

$$\begin{cases} y' = My & t \ge 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) \le 0$

- Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler
- Μέθοδος του μέσου

Ν.Δ.Ο $\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$

Λύση

Πεπλεγμένη Euler

$$y^{n+1} = y^n + hMy^{n+1} \Rightarrow (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n, y^{n+1}) + h\underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\le 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \le (y^n, y^{n+1})$$

$$\overset{CS}{\le} \|y^n\| \cdot \|y^{n+1}\|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$$

Μέθοδος του μέσου

$$y^{n+1} = y^n + hM\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y^{n+1}-y^n,\ y^{n+1}-y^n) = \frac{h}{2}\underbrace{(M(y^n+y^{n+1}),\ y^n+y^{n+1})}_{\le 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1}-y^n,\ y^{n+1}+y^n)}_{\|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2} \le 0$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \le \|y^n\|^2 \Rightarrow \|y^{n+1}\| \le \|y^n\|$$

- Άσκηση 2.14

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \ge 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Όταν είναι έτσι το σύστημα τότε η μέθοδος του μέσου είναι η μέθοδος του τραπεζίου

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ $\forall x \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) = 0$

- Μέθοδος μέσου (τραπεζίου)

Ν.Δ.Ο

$$\|y^{n+1}\| = \|y^n\|$$

Λύση

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(My^n + My^{n+1}) = y^n + \frac{h}{2}M(y^n + y^{n+1})$$

$$\Rightarrow y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}M(y^n + y^{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y^{n+1}-y^n,\ y^{n+1}+y^n)}_{\|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2} = \frac{h}{2}\underbrace{(M(y^n+y^{n+1}),\ y^n+y^{n+1})}_{0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2 = \|y^{n+1}\| = \|y^n\|$$

- Άσκηση 2.15

$$\begin{cases} y' = -e^y, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

Ν.Δ.Ο προσεγγίσεις καλά ορισμένες

Λύση

$\rightarrow$

$f(t,y) = -e^y$ φθίνουσα συνάρτηση

$\Rightarrow$ Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [0,1]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$$

Όπως είδαμε στην θεωρία οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες (χωρίς περιορισμό στο h).

• Άσκηση 2.17

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$

Μέθοδος του μέσου

Ν.Δ.Ο προσεγγίσεις καλά ορισμένες

Λύση

$(*)$ $y^{n+1} = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $x^* = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένο

Τότε

$$y^{n+1} = 2x^* - y^n$$

Με άγνωστο το x^* γράφουμε την $(*)$ στην μορφή:

$$2x^* - y^n = y^n + hf\left(t^n + \frac{h}{2}, x^*\right)$$

ή

$$x^* = y^n + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, x^*\right)$$

Ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, x\right)$$

• Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα έχει το πολύ μια ρίζα (μια φορά μηδενίζεται μόνο άρα μοναδικότητα της x^*)

Ύπαρξη ρίζας: Για $x \geq 0$ έχουμε

$$f\left(t^n + \frac{h}{2}, x\right) \leq f\left(t^n + \frac{h}{2}, 0\right)$$

$\Rightarrow g(x) \geq x - y^n - \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, 0\right) \to \infty$ για $x \to \infty$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές.

Για $x \le 0$ έχουμε $f(t^n+\frac{h}{2}, x) \ge f(t^n+\frac{h}{2}, 0)$

οπότε,

$$-\frac{h}{2} f(t^n+\frac{h}{2}, x) \le -\frac{h}{2} (t^n+\frac{h}{2}, 0)$$

Άρα, $g(x) \le x - y^n - \frac{h}{2} f(t^n+\frac{h}{2}, 0) \to -\infty$ για $x \to -\infty$

Επομένως η g παίρνει και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει ρίζα της g.

• Άσκηση 2.18

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

$f'(x) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Μέθοδος του τραπεζίου
Ν.Δ.Ο οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Λύση

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(y^n) + f(y^{n+1})]$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(x)$

Η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει το πολύ μια ρίζα

Για $x \ge 0 : f(x) \le f(0) \Rightarrow -\frac{h}{2} f(x) \ge -\frac{h}{2} f(0)$,
ωσαύτως

$$g(x) \ge x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \to \infty, \quad x \to \infty$$

Επομένως η g παίρνει και θετικές τιμές
Αντίστοιχα για $x\to+\infty$ έχουμε $g(x)\to-\infty$
οπότε παίρνει και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει λύση.

Άσκηση 2.19

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + y(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$f(t,y) = y(t) - y^3$ φθίνουσα συνάρτηση του y

Όπως στην προηγούμενη Άσκηση, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.