$$= \begin{pmatrix} C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot t \cdot e^{t} \\ C_3 \cdot e^{t} \\ C_1 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} \text{ με } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

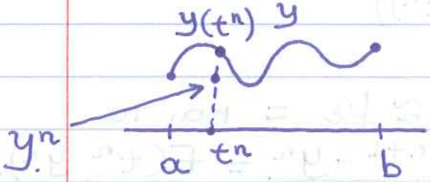
ΤΕΛΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ...

2. Η Μέθοδος του Euler:

⟸ $\boxed{06.11.14}$

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

⤳ Υπόθεση: το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.



δείκτες και όχι τετράγωνο.

Έστω $a = t^0 < t^1 < t^2 < \dots < t^N = b$.
ένας διαμερισμός του $[a, b]$ με κόμβους t^i, $i = 0, \dots, N$.

⤳ Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i ← δείκτης των τιμών $y(t^i)$ της λύσης στους κόμβους t^i, $i = 0, \dots, N$.

Συνήθως για ευκολία στον συμβολισμό θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό. Με $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ (βήμα του διαμερισμού), και $t^n := a + n \cdot h$, $n = 0, \dots, N$.

⤳ Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} := y^n + h \cdot f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

(Στην περίπτωση γενικού διαμερ. το βήμα της μεθόδου του Euler είναι:

$$y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) \cdot f(t^n, y^n).)$$

⇝ Υπολογιστικό κόστος ανά βήμα:

Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα.

⇝ Τρόποι κατασκευής της μεθόδου:

1. Αριθμητική Διαφόριση.

Θεωρούμε την Δ.Ε. στο σημείο t^n, $y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$.
Προσεγγίζουμε την $y'(t^n)$ με:

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\underbrace{t^{n+1} - t^n}_{\to h}}, \quad y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Άρα:

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$$

"S.O.S"

Αντικαθιστούμε σε αυτή τη σχέση το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^m)$ με y^m και παίρνουμε: $\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)$.

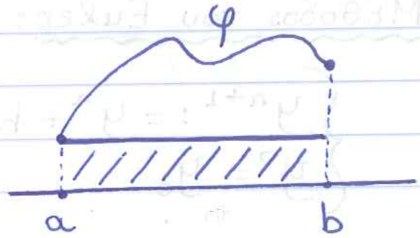
2. Με αριθμητική ολοκλήρωση.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

• Αριστερός τύπος του ορθογωνίου:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a) \cdot \varphi(a)$$



$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \overbrace{h}^{t^{n+1}-t^n} \cdot f(t^n, y(t^n))$$ (χρησιμοποιώντας τον αριστ. τύπο του ορθογωνίου.)

Αντικαθιστούμε .... όπως πριν.

3. Με ανάπτυγμα Taylor:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(\xi_n)$$

με ξ_n ενα κατάλληλο σημείο : $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$.

Άρα:

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot \underbrace{y'(t^n)}_{= f(t^n, y(t^n))} \longleftarrow \Delta.E.$$

δηλαδή:

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστώντας ....

~> Συνέπεια:

Η ποσότητα $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot f(t^n, y(t^n))$
(ή το αντιθετό της)
λέγεται:
- σφάλμα συνέπειας
- τοπικό σφάλμα μεθόδου.
- τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης.

Το δ^n, δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε, είναι όμως πολύ χρήσιμο για τη μελέτη της μεθόδου.

~> Πως προκύπτει το δ^n;

- Αντικαθιστώντας στην μεθόδο τα y^m με τα $y(t^m)$ δεν εχουμε μια ισότητα αλλά προκυπτεί το σφαλμα δ^n. Δηλ. το σφαλμα συνεπειας ειναι το μεγεθος της αποτυχίας τις ακριβείς λύσεις να ικανοποιεί τη μέθοδο!
- Ξεκινώντας απο την ακριβή τιμή $y(t^n)$ και κάνοντας ενα βήμα με τη μέθοδο του Euler βρίσκουμε την προσέγγιση $\tilde{y}^{n+1} := y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))$

$\leadsto$ Προφανώς $\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1}$.

- Πως συμπεριφέρεται το δ^n καθώς το $h \to 0$;
  Έχουμε:

$$\delta^n = \underbrace{y(t^{n+1})}_{\parallel} - y(t^n) - h \cdot y'(t^n).$$

$$= \left[y(\cancel{t^n}) + h \cdot y'(\cancel{t^n}) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n) \right] - y(\cancel{t^n}) - h \cdot y'(\cancel{t^n}).$$

Taylor.

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n) \Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{h^2}{2} \cdot \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$$

Το δ^n φθίνει για $h \to 0$ (τουλάχιστον) όπως το h^2.

$\leadsto$ Ευστάθεια:

$z^0 \in \mathbb{R}$

$$z^{n+1} := z^n + h \cdot f(t^n, z^n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

- Υπόθεση: Έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, δηλ:

$$\exists\, L \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Αφαιρώντας κατα μέλη έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \cdot \left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n) \right].$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \cdot \underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\leq L \cdot |y^n - z^n|}$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + L \cdot h) \cdot |y^n - z^n|. \quad (*)$$

- Ισχυρισμός: $|y^n - z^n| \leq (1 + L \cdot h)^n \cdot |y^0 - z^0|$, $n = 0, \dots, N$.

$\to$ Επαγωγή: $n=0$: $|y^0 - z^0| \leq |y^0 - z^0|$ ✓

$n \to n+1$: $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+L\cdot h)\cdot|y^n - z^n| \leq$ (*)

$\leq \underbrace{(1+L h)\cdot(1+L\cdot h)^n}_{=(1+L\cdot h)^{n+1}} \cdot |y^0 - z^0|$.

Υπόθεση επαγ.

Τώρα $\forall x \geq 0 \quad e^x \geq 1+x$.

Επεξήγηση πως προκύπτει το $e^x \geq 1+x$. (δεν χρειάζεται μέσα στην απόδειξη)

- $e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\geq 0} \geq 1+x$

- $\varphi(x) = e^x - (1+x)$
  $\varphi(0) = 0$.
  $\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0$ αύξουσα συνάρτηση.

Άρα: $(1+L\cdot h)^n \leq (e^{Lh})^n = e^{n\cdot L\cdot h} = e^{L(n\cdot h)} = e^{L(t^n - a)}$

Άρα: $|y^n - z^n| \leq e^{L(t^n - a)}\cdot|y^0 - z^0|$.

οπότε και:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq \underbrace{e^{L(b-a)}}_{\text{σταθερά ανεξ. των } h,\, n}\cdot|y^0 - z^0|.$$

~> **Λήμμα**: (Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος.)

Έστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, \dots \geq 0$, τ.ώ:

$d_{i+1} \leq (1+\delta)\cdot d_i + K, \quad i = 0, 1, 2, \dots$ (*).

Τότε ισχύει:

(**) $\quad d_n \leq d_0 \cdot e^{n\delta} + K\cdot \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

- **Απόδειξη**: για $n=0$ η (**) γράφεται στην μορφή
  $d_0 \leq d_0\cdot \underbrace{e^0}_{1} + K\cdot \underbrace{\frac{e^0 - 1}{\delta}}_{0} \iff d_0 \leq d_0$ ✓.

προφανώς ισχύει.

Έστω τώρα $n \geq 1$.

- <u>Ισχυρισμός:</u> $d_n \leq (1+\delta)^n \cdot d_0 + K \cdot [1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}]$.

→ <u>Επαγωγή:</u> <u>$n=1$:</u> $d_1 \leq (1+\delta)\cdot d_0 + K$
↳ ισχύει από ⊛.

<u>$n \to n+1$:</u> $d_{n+1} \overset{⊛}{\leq} (1+\delta)\cdot d_n + K$

$$\leq (1+\delta)\cdot\{(1+\delta)^n \cdot d_0 + K\cdot[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]\} + K$$

Επαγ. Υπόθεση

$$= (1+\delta)^{n+1}\cdot d_0 + K\cdot[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^n] \checkmark$$

Άρα: $d_n \leq (1+\delta)^n \cdot d_0 + K\cdot \underbrace{[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]}_{= \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta)-1} = \frac{(1+\delta)^n-1}{\delta}}$.

$$\Rightarrow d_n \leq \underbrace{(1+\delta)^n}_{\leq e^{n\delta}} \cdot d_0 + K\cdot \frac{\overbrace{(1+\delta)^n}^{\leq e^{n\delta}} - 1}{\delta} \leq$$

$$\leq e^{n\delta}\cdot d_0 + K\cdot \frac{e^{n\delta}-1}{\delta}.$$

⇝ <u>Εκτίμηση του σφάλματος:</u> (σύγκλιση).

Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια της μεθόδου.

- <u>Θεώρημα:</u> Έστω $f: [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συναρτ. που ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Έστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση. Αν $y^0, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα

$h = \frac{b-a}{N}$, τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος:

$$\max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \underbrace{\frac{M}{2\cdot L}\cdot[e^{L(b-a)}-1]}_{=C}\cdot h$$

με $M := \max\limits_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$.

~> <u>Απόδειξη:</u> $\Leftarrow$ $\boxed{11.11.14}$

Έχουμε: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n)) + \delta^n$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$

Θέτουμε $\varepsilon^i := y(t^i) - y^i$ (ολικό σφάλμα της μεθόδου ή προσέγγισης ή διακριτοποίησης)

Αφαιρώντας κατα μέλη, παίρνουμε:

$\underbrace{\varepsilon^{n+1}}_{y(t^{n+1}) - y^{n+1}} = \varepsilon^n + h \cdot [f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \delta^n$.

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + h \cdot \underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\leq L \cdot |y(t^n) - y^n| = L \cdot |\varepsilon^n|} + |\delta^n|$

Άρα:

$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + L \cdot h) \cdot |\varepsilon^n| + |\delta^n|$,

οπότε:

$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + \underbrace{L \cdot h}_{=\delta}) \cdot |\varepsilon^n| + \overbrace{\max\limits_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|}^{K \text{ στο βοηθητικό λήμμα.}}$

Επομένως σύμφωνα με το βοηθητικό λήμμα, ισχύει:

$|\varepsilon^n| \leq \cancel{e^{Lhn} \cdot |\underset{\uparrow \, 0}{\varepsilon^0}|} + \dfrac{e^{Lhn} - 1}{L \cdot h} \cdot \max\limits_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|$

$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \dfrac{e^{L(t^n - a)} - 1}{L \cdot \cancel{h}} \cdot \dfrac{h^{\cancel{2}}}{2} \cdot M \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{M}{2 \cdot L} \cdot (e^{L(\overset{\leq b}{t^n} - a)} - 1) \cdot h \Rightarrow \max\limits_{0 \leq n \leq N} |\varepsilon^n| \leq \dfrac{M}{2 \cdot L} \cdot [e^{L(b-a)} - 1] \cdot h$

~> <u>Αποτέλεσμα:</u>

$\max\limits_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \underset{\text{ανεξ. του } h.}{C} \cdot h$ (**).

Τάξη ακρίβειας της μεθόδου : $p \geq 1$.

⇝ Ερώτημα: Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του h στην εκτίμηση σφάλματος (∗∗) ;

(αν το $M = 0$, δηλ. $y \in \underbrace{\mathbb{P}_1}$, τότε το σφάλμα $y(t^n) - y^n$ είναι μηδέν !). ↳ πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

⇝ Απάντηση: Γενικά όχι ! (δηλ. $p < 1$)

• Παράδειγμα: $\begin{cases} y'(t) = 2 \cdot t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Λύση: $y(t) = t^2$ (επιλέχτηκε έτσι ώστε $y''(t) =$ σταθερή και $\neq 0$.)

• Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$, $t^n = n \cdot h$ για $n = 0, \ldots, N$

⇝ Μέθοδος Euler: $y^{n+1} = y^n + h \cdot 2 t^n$

Άρα: $y^{n+1} = y^n + 2 \cdot n \cdot h^2$ για $n = 0, \ldots, N-1$.

• Ισχυρισμός: $y^n = y^0 + 2 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n-1)] \cdot h^2$, $n = 0, \ldots, N$

→ Επαγωγή: $n = 0$: $y^0 = y^0$ ✓

$n \to n+1$: $y^{n+1} = y^n + 2 \cdot n \cdot h^2$

υπόθεση επαγ.

$$= y^0 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + (n-1)) \cdot h^2 + 2 \cdot n \cdot h^2$$

$$= y^0 + 2 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n-1) + n] \cdot h^2$$

Επομένως: $y^n = \cancel{y^0}^{\,0} + 2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + \ldots + (n-1))}_{= \frac{(n-1) \cdot n}{2}} \cdot h^2 =$ (αριθμητική πρόοδος)

$$= (n-1) \cdot n \cdot h^2.$$

για $n=N$, έχουμε $y^N = (N-1)\cdot N\cdot h^2 = (N-1)\cdot \overbrace{N\cdot h}^{=1}\cdot h$

$= (N-1)\cdot h = \underbrace{N\cdot h}_{=1} - h = 1-h$

επομένως: $\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{y(t^N)} - y^N = 1-(1-h) = h$, οπότε:

$|y(t^N) - y^N| = h$ ιδιαίτερα: $\max\limits_{0\leq n\leq N} |y(t^n)-y^n| \geq \overset{c>0.}{c}\, h$

- Τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler: $p=1$

  ($\underset{\substack{\uparrow \\ \text{εκτίμηση σφάλμ.}}}{p\geq 1}$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{παράδειγμα}}}{p\leq 1}$)

- Το τοπικό σφάλμα είναι τάξης $p+1=2$.

⤳ Ερώτημα: Τι αλλάζει στην περίπτωση Π.Α.Τ για συστήματα Σ.Δ.Ε; (βέβαια η απόλυτη τιμή θα αντικατασταθεί με κάποιο νόρμα.)

⤳ Απάντηση: αλλάζει μόνο η παράσταση του σφάλματος συνέπειας.

- Σφάλμα συνέπειας:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot \overbrace{f(t^n, y(t^n))}^{=y'(t^n).}$$

$$\Rightarrow \delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot y'(t^n)$$

→ Βαθμωτή περίπτωση: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(\xi_n)$ (*)

με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

Άρα: $\delta^n = \frac{h^2}{2}\cdot y''(\xi_n)$.

→ Διανυσματική περίπτωση: $y:[a,b]\to \mathbb{R}^m$, $m>1$.

Τότε το ανάπτυγμα Taylor στη μορφή (*) δεν ισχύει!
Για κάθε συνιστώσα i του y έχουμε:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h\cdot y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2}\cdot y_i''(\xi_{ni})$$

Επομένως: στη διαν. περ. έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2}\cdot \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\delta^n = \frac{h^2}{2}\cdot \begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n1}) \\ y_2''(\xi_{n2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{nm}) \end{pmatrix}$$

για τη νόρμα μεγίστου έχουμε ότι: $(\|\cdot\|_\infty)$

$$\|\delta^n\|_\infty \leq \frac{h^2}{2}\cdot M \quad \text{με } M := \max_{a\leq t\leq b} \|y''(t)\|_\infty$$

για μια τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$ χρησιμοποιούμε πρώτα την ισοδυναμία των $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_\infty$, οπότε έχουμε:

$$\exists C_1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\| \leq C_1 \cdot \|x\|_\infty$$

Επομένως έχουμε:

$$\|\delta^n\| \leq C_1\cdot\|\delta^n\|_\infty \leq C_1\cdot\frac{M}{2}\cdot h^2$$

με $M := \max\limits_{a\leq t\leq b} \|y''(t)\|_\infty$

⇝ <u>Εναλλακτικός τρόπος</u>: Τύπος του Taylor με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή.

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\cdot y''(t)\,dt$$

Σε αυτή τη μορφή ισχύει <u>και</u> για διανυσματικές συναρτήσεις. Επομένως:

$$\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\cdot y''(t)\,dt, \text{ οπότε:}$$

$$\|\delta^n\| \leq \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\cdot \|y''(t)\|\,dt$$

$$\leq \left(\max_{a\leq t\leq b} \|y''(t)\|\right)\cdot \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\,dt}_{=\frac{h^2}{2}}$$
$$\overset{\|}{M}$$

~> Περιοχή Ευστάθειας:

(Α - ευστάθεια, Β - ευστάθεια)

Μια μέθοδος που μας δίνει το y^{n+1} χρησιμοποιώντας την προσέγγιση y^n (αλλά όχι την $y^{n-1}, \dots$) λέγεται μονοβηματική.

- Ορισμός: (Β - ευστάθεια)

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Β - ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής με f που να ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,
$\forall t\in[a,b],\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ [f(t,x)-f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}]\leq 0.$
με αρχικές προσεγγίσεις y^0 και z^0 δίνει προσεγγίσεις y^n και z^n, αντίστοιχα τέτοιες ώστε η ακολουθία $\|y^n - z^n\|,\ n=0,\dots,N$, (με την $\|\cdot\|$ ευκλίδεια νόρμα) να είναι φθίνουσα, δλδ:
$\|y^{n+1}-z^{n+1}\|\leq \|y^n - z^n\|,\ n=0,\dots,N-1.$
(δηλ. η μέθοδος μιμείται την Δ.Ε. για λύσεις $y(t)$ και $z(t)$ της οποίας ισχύει ότι $\|y(t)-z(t)\|$ είναι φθίνουσα.)

- Όπως θα δούμε η μεθοδος του Euler δν είναι Β - ευσταθής. Εξασθενούμε λίγο την απαίτηση και εισάγουμε τη λεγόμενη Α-ευστάθεια. Αυτή αφορά την περίπτωση που η f είναι πολυώνυμο το πολύ $1^{ου}$ βαθμού ως προς y, $f(t,y)=\lambda\cdot y+\mu(t)$. Αρκεί να εξετάσουμε την συμπεριφορά των προσεγγίσεων για την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

- Ορισμός (Α - ευστάθεια):

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται Α - ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί στο πρώτο προβλ. δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda \cdot y, & t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$$, με $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \leq 0$ και τυχαίο βήμα h, δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η ακολουθία $|y^n|$ να είναι φθίνουσα $|y^{n+1}| \leq |y^n|$, $n=0,1,\dots$

(Δηλαδή η μέθοδος μιμείται την ιδιότητα της λύσης $y(t)$ που είναι ότι η $|y(t)|$ είναι φθίνουσα.)

- Ισχύουν τα εξής: B − ευστάθεια $\Rightarrow$ A − ευστάθεια $\not\Leftarrow$

$\boxed{13.11.14} \Rightarrow$

- Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι A − ευσταθής (οπότε δν είναι ούτε B − ευσταθής.)

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda \cdot y, & t \geq 0. \\ y(0)=1 \end{cases}$$ Λύση: $y(t) = e^{\lambda t}$.

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda \cdot y^n \Rightarrow y^{n+1} = (1+\lambda h) \cdot y^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}| = |1+\lambda \cdot h| \cdot |y^n|$$

για $y^n \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \leq 0$, δεν ισχύει γενικά ότι:

$|y^{n+1}| \leq |y^n|$ γιατί:

π.χ για $\lambda \cdot h = -3$ έχουμε ότι: $|y^{n+1}| = 2 \cdot \underbrace{|y^n|}_{\neq 0} > |y^n|$.

- Με τη συνάρτηση $r(z) = 1+z$ η μέθοδος Euler για το πρόβλημα (*) γράφεται στη μορφή:

$y^{n+1} = r(\lambda h) \cdot y^n$

$\hookrightarrow$ συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου.

- Ορισμός: (περιοχή ευστάθειας)

Εφαρμόζουμε μια μονοβηματική μέθοδο στο πρόβλημα δοκιμής (*) τότε η περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου αποτελείται από όλα τα σημεία z που είναι $z = \lambda \cdot h \in \mathbb{C}$

στο μιγαδικό επίπεδο με την ιδιότητα ότι για λ και h τ.ώ: $\lambda \cdot h = z$ η μέθοδος να δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω. η ακολουθία $|y^n|, n=0,1,\dots$ να είναι φθίνουσα δηλ.

$$|y^{n+1}| \leq |y^n|$$

Η τομή της S με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται διάστημα ευστάθειας της μεθόδου.

- <u>παρατήρηση</u>: Μια μέθοδος είναι A-ευσταθής, ανν το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο

$$\mathbb{C}^- := \{ z \in \mathbb{C} : Re z \leq 0 \}$$ περιέχεται στην περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου.

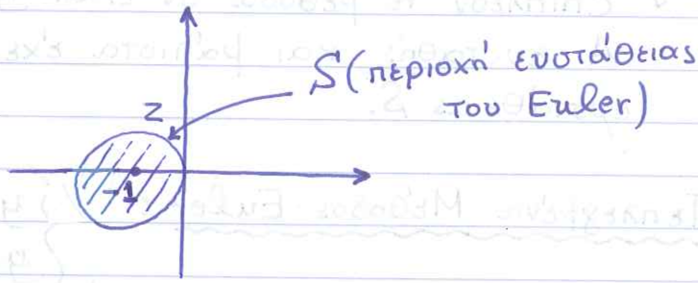
- <u>Μέθοδος Euler</u>: $y^{n+1} = r \cdot (\lambda \cdot h) \cdot y^n \Rightarrow$

$\Rightarrow |y^{n+1}| = |r(\lambda \cdot h)| \cdot |y^n|$, $r(z) = 1 + z$

Άρα:

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| \leq 1 \}$$

$1 + z = z - (-1)$



- <u>παρατήρηση</u>: σφάλμα συνέπειας της μεθόδου του Euler όταν την εφαρμόσουμε στο (*).

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot \lambda \cdot y(t^n) =$$

$$= y(t^{n+1}) - r \cdot (\lambda \cdot h) \cdot y(t^n) = e^{\lambda t^{n+1}} - r \cdot (\lambda \cdot h) \cdot e^{\lambda t^n}$$

$$= e^{\lambda t^n + \lambda h} - r(\lambda h) \cdot e^{\lambda t^n} = [e^{\lambda h} - r(\lambda h)] \cdot \underbrace{e^{\lambda t^n}}_{\neq 0}$$

$$= [\cancel{1} + \cancel{\lambda h} + \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot h^2 + O(h^3) - \cancel{1} - \cancel{\lambda h}] \cdot e^{\lambda t^n} = O(h^2)$$

Γενικά για μια μονοβηματική μέθοδο με συνάρτηση ευστάθειας r ισχύει:

τάξη της μεθόδου $= p \Rightarrow e^{z} - r(z) = O(z^{p+1})$ για $z \to 0$.
(το αντίστροφο είναι λάθος!!!)

⇝ Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα: (Μέθοδος του Euler)

- Πλεονεκτήματα: ✓ Η μέθοδος είναι άμεση (δεν χρειάζεται να λύσουμε εξισώσεις)
✓ Προγραμματίζετε πολύ εύκολα, και απαιτεί εναν μόνο υπολογισμό της f ανα βήμα.

- Μειονεκτήματα: ✓ Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ένα δηλ. πολύ χαμηλή, οπότε για να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε πολύ μικρό βήμα h. Αυτό αυξάνει πολύ το συνολικό κόστος κ' επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης.
✓ Επιπλέον η μέθοδος δν είναι Β-ευσταθής, ούτε καν Α-ευσταθής, και μάλιστα έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας S.

⇝ Πεπλεγμένη Μέθοδος Euler: $\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^{n} = a + n \cdot h$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^{n} + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N \\ y^{0} = y_0 \end{cases}$$

- Τρόποι κατασκευής:

1. Αριθμητική Ολοκλήρωση:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

Δεξιός τύπος του ορθογωνίου.

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\approx h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντακαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^n)$ με y^n και παίρνουμε:

$$y^{n+1} - y^n = h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

2. Αριθμητική διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Έχουμε:

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

οπότε: $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

Αντικαθιστούμε....

Ανάπτυγμα Taylor ως προς το σημείο t^{n+1}.

⇝ Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων:

Χωρίς υποθέσεις στην f και/ή στο βήμα h οι προσεγγίσεις δεν είναι γενικά καλά ορισμένες.

π.χ: εφαρμόζωντας την μεθόδο στο πρόβλημα δοκιμής (*), έχουμε:

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda \cdot y^{n+1} \Rightarrow (1 - \lambda h) \cdot y^{n+1} = y^n. \quad (+)$$

Έστω $\lambda > 0$ και $h = 1/\lambda$.

Τότε για $y^n \neq 0$, δεν υπάρχει λύση της σχέσης (+).

για $y^n = 0$ κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση της (+).

• 1^{η} περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

→ Ισχυρισμός: για αρκετά μικρό h έτσι ώστε $L\cdot h < 1$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

~> Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου:

$g(x) = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, x)$.

Τότε κάθε σταθερό σημείο της g αποτελεί λύση της εξίσωσης $y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$ και αντίστροφα.
Αρκεί και πρέπει να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.
Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x_1) - g(x_2) = h\cdot\left[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)\right] \Rightarrow$$

$$|g(x_1) - g(x_2)| = h\cdot\underbrace{|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|}_{\leq L\cdot|x_1 - x_2|}$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \overbrace{L\cdot h}^{<1}\cdot|x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow g$ συστολή οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

• 2^{η} περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$$\forall t\in[a,b]\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \left[f(t, x_1) - f(t, x_2)\right]\cdot(x_1 - x_2) \leq 0.$$

→ Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες, χωρίς περιορισμό στο βήμα h
Θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x - y^n - h\cdot f(t^{n+1}, x)$
κάθε ρίζα της g είναι λύση της $y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$ και αντίστροφα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

- Η g είναι συνεχής.

- <u>Μοναδικότητα ρίζας:</u> Η g είναι γνήσια αύξουσα οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

- <u>Ύπαρξη ρίζας:</u> για $x \le 0$ έχουμε:

$$h \cdot f(t^{n+1}, x) \ge h \cdot f(t^{n+1}, 0) \qquad (\text{φθίνουσα } f)$$

οπότε:

$$g(x) = x - y^n \underbrace{- h \cdot f(t^{n+1}, x)}_{\le -h \cdot f(t^{n+1}, 0)}$$

$$g(x) \le x \underbrace{- y^n - h \cdot f(t^{n+1}, 0)}\ \to -\infty, \ x \to -\infty$$

- <u>συμπέρασμα:</u> Η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

για $x > 0$ έχουμε: $f(t^{n+1}, x) \le f(t^{n+1}, 0)$
οπότε:

$$g(x) \ge x - y^n - h \cdot f(t^{n+1}, 0) \to \infty \text{ για } x \to \infty$$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές.
Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ, η συνάρτηση έχει (τουλάχιστον) μια ρίζα.

⇝ <u>Συνέπεια:</u> $\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot \underbrace{f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}_{= y'(t^{n+1})} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot y'(t^{n+1})$$

- <u>Taylor:</u> $y(t^n) = y(t^{n+1}) - h \cdot y'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n)$

Άρα: $\delta^n = -\frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi_n)$ με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

$$\Rightarrow \max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \cdot \underbrace{\max_{a \le t \le b} |y''(t)|}_{= M}$$

$\Rightarrow$ τάξη ακρίβειας : $p = 1$.

⇝ <u>Ευστάθεια</u>: $\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h \cdot f(t^{n+1}, z^{n+1}) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$

• <u>1η περίπτωση</u>: Η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz.

Έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \cdot \left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}) \right] \Rightarrow$$

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \cdot L \cdot |y^{n+1} - z^{n+1}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 - Lh)}_{>0} \cdot |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1 - Lh} \cdot |y^n - z^n|$$

→ <u>Ισχυρισμός</u>: για h τ.ω $Lh \leq 1/2$. ισχύει:

$$\frac{1}{1 - Lh} \leq 1 + 2 \cdot L \cdot h$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (1 - Lh)(1 + 2Lh) = 1 - Lh + 2Lh - 2L^2h^2$$
$$= 1 + Lh - 2L^2h^2$$
$$= 1 + Lh \cdot \underbrace{(1 - 2Lh)}_{\geq 0}$$

Άρα $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + 2Lh) \cdot |y^n - z^n|$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (1 + 2Lh)^n \cdot |y^0 - z^0|$$
$$\leq e^{2Lhn} \cdot |y^0 - z^0| = e^{2L(t^n - a)} \cdot |y^0 - z^0|$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq \underbrace{e^{2L(b-a)}}_{C \text{ ανεξ. του } h} \cdot |y^0 - z^0|$$

64.

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \ a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$ ⟸ $\boxed{18.11.14}$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$

$t^n := a + n\cdot h$, $n = 0, \dots, N$

⇝ Πεπλεγμένη Μέθοδο του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}), \ n = 0, \dots, N \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

⇝ Ευστάθεια:

- 2η περίπτωση: Η $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη σύνθηκη του Lipschitz, $\forall t \in [a,b]$, $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$, $(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$.

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h\cdot f(t^{n+1}, z^{n+1}), \ n = 0, \dots, N \\ z^0 \text{ δεδομένο} \end{cases}$$

Έχουμε: $y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\cdot\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \| y^{n+1} - z^{n+1} \|^2 = (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) + h\cdot\underbrace{\left(f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}), y^{n+1} - z^{n+1}\right)}_{\le 0}$$

εσωτ. γινομ. με την διαφορά $y^{n+1} - z^{n+1}$

$$\Rightarrow \| y^{n+1} - z^{n+1} \|^2 \le \underbrace{(y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})}$$

C.S. $\longrightarrow \le \| y^n - z^n \| \cdot \| y^{n+1} - z^{n+1} \|$

$$\Rightarrow \| y^{n+1} - z^{n+1} \| \le \| y^n - z^n \|$$

• συμπέρασμα: Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι B-ευσταθής (ιδιαίτερα, και A-ευσταθής)

Επίσης, από την (*) έπεται ότι: $\| y^n - z^n \| \leqslant \| y^0 - z^0 \|$
$n = 0, \dots, N$

⇝ Περιοχή ευστάθειας:

$$\oplus \begin{cases} y' = \lambda \cdot y, & t \geqslant 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$h > 0$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda \cdot y^{n+1} \Rightarrow$

$$\underbrace{(1 - \lambda \cdot h)}_{\neq 0.} \cdot y^{n+1} = y^n \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda \cdot h} \cdot y^n$$

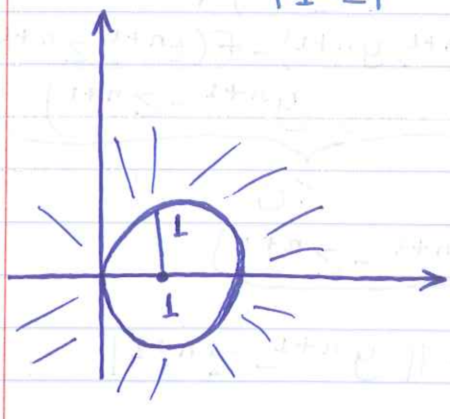
• Συνάρτηση ευστάθειας: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Τότε η μέθοδος γράφεται στη μορφή:

$y^{n+1} = r(\lambda \cdot h) \cdot y^n$

• Περιοχή Ευστάθειας: $S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leqslant 1 \} =$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \leqslant 1 \right\} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geqslant 1 \} \supset \mathbb{C}^-$$



⇝ Εκτίμηση σφάλματος : (σύγκλιση)

• **1η περίπτωση:** Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια, όπως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler, αποδεικνύουμε ότι, για h τ.ώ $Lh \leq 1/2$

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2 \cdot L} \cdot \left[e^{2L(b-a)} - 1 \right] \cdot h$$

με $M := \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$

• **2η περίπτωση:** Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (με $m = 1$).

Έχουμε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n$$

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{M}{2} \cdot h^2$$

Άρα: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$

Επομένως αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε, με $\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$,

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h \cdot \left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right] + \delta^n.$$

(εξίσωση σφάλματος.)

Πολλαπλασιάζοντας επί $y(t^{n+1}) - y^{n+1} = \varepsilon^{n+1}$ παίρνουμε:

$$(\varepsilon^{n+1})^2 = \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \overbrace{h \cdot \left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right] \cdot \varepsilon^{n+1}}^{\leq 0} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1}$$

$$\Rightarrow (\varepsilon^{n+1})^2 \leq \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1} \Rightarrow$$

$$\leq |\varepsilon^n| \cdot |\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n| \cdot |\varepsilon^{n+1}|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^{\cancel{2}} \leq (|\varepsilon^n| + |\delta^n|) \cdot \cancel{|\varepsilon^{n+1}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + |\delta^n|$$

$$\leq |\varepsilon^n| + \max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^i|$$

Άρα: $|\varepsilon^n| \leq \underbrace{|\varepsilon^0|}_{=0} + n \cdot \max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^i|$

$$\Rightarrow \max_{0\leq n\leq N} |\varepsilon^n| \leq N \cdot \max_{0\leq i\leq N-1} |\delta^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq n\leq N} |y(t^n) - y^n| \leq N \cdot \frac{M}{2} \cdot h^2$$

$$= (N\cdot h) \cdot \frac{M}{2} \cdot h = \frac{(b-a)\cdot M}{2} \cdot h$$

⇝ Άλλες χρήσιμες μέθοδοι χαμηλής τάξης ακρίβειας:

1. Μέθοδος του τραπεζίου:

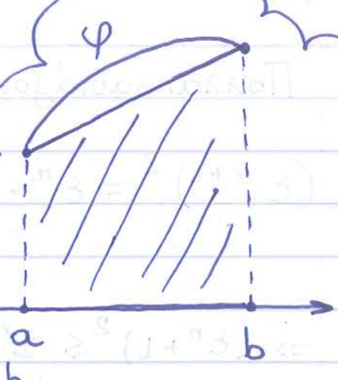
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right]$$

- Πεπλεγμένη μέθοδος
- Τάξη ακρίβειας $p = 2$

- Τρόποι Κατασκευής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow$$



$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot [\varphi(a) + \varphi(b)]$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) \approx \frac{h}{2} \cdot \left[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \right]$$

Αντικαθιστώντας το ≈ με = και τα $y(t^m)$ με y^m....

• Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής.

$$\begin{cases} y' = \lambda\cdot y, & t\geq 0, \ \lambda\in\mathbb{C} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\cdot\left[\lambda y^n + \lambda\cdot y^{n+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1-\frac{\lambda h}{2}\right)}_{\neq 0}\cdot y^{n+1} = \left(1+\frac{\lambda h}{2}\right)\cdot y^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1+\lambda h/2}{1-\frac{\lambda h}{2}}\cdot y^n$$

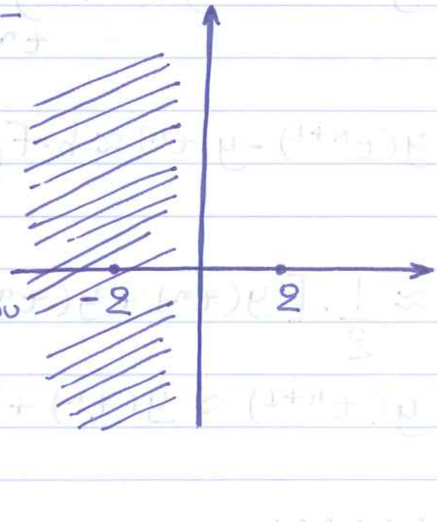
• Συνάρτηση ευστάθειας: $r(z) = \dfrac{1+z/2}{1-z/2}$

• Περιοχή ευστάθειας: $S = \{z\in\mathbb{C} : |r(z)|\leq 1\} =$

$$= \left\{z\in\mathbb{C} : \frac{|1+z/2|}{|1-z/2|}\leq 1\right\} = \left\{z\in\mathbb{C} : \frac{|z+2|}{|z-2|}\leq 1\right\} =$$

$$= \{z\in\mathbb{C} : \underbrace{|z+2|}_{= |z-(-2)|}\leq |z-2|\} = \mathbb{C}^-$$

(πραγματικό μέρος ≤ 0)



• Ισχυρισμός: Η μέθοδος του τραπεζίου δεν είναι Β-ευσταθής.

$y' = \lambda(t)\cdot y$, $t\geq 0$

$\lambda : [0,\infty)\to\mathbb{R}$

$\lambda(t)\leq 0$

Τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\cdot\left[\lambda(t^n)\cdot y^n + \lambda(t^{n+1})\cdot y^{n+1}\right]$$

(Αν έχω και αντίστοιχα z^n, τότε οι διαφορές $y^m - z^m$

ικανοποιούν την ίδια σχέση.)

Έστω h δεδομένο.
Επιλέγουμε το λ έτσι ώστε $h\cdot\lambda(t^n) = -8$ και $h\cdot\lambda(t^{n+1}) = -1$.
Τότε έχουμε:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{1}{2}\left(-8y^n - y^{n+1}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow y^{n+1} = -2\cdot y^n$$

$\Rightarrow |y^{n+1}| = 2\cdot|y^n|$

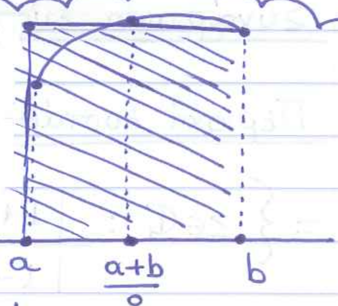
για $y^n \neq 0$ έχουμε: $|y^{n+1}| > |y^n|$

$\rightsquigarrow$ Η μέθοδος του μέσου:

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

- πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας $p=2$.

- Τρόπος κατασκευής:



$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\cdot\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Τύπος του μέσου.

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h\cdot f\Bigg(\underbrace{\frac{t^n+t^{n+1}}{2}}_{t^n+h/2}, y\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}\right)\Bigg) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\cdot\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right]$$

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\cdot\left[y(t^n) + y(t^{n+1})\right]\right).$$

. . . . . .

- Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι B-ευσταθής

Υπόθεση: $\forall t\in[a,b]\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x}) \leq 0.$$

Έχουμε: $y^{n+1} = y^n + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1})\right)$
$Z^{n+1} = Z^n + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\cdot(Z^n + Z^{n+1})\right)$ $\Big\}$ $\overset{(-)}{\Rightarrow}$

$$y^{n+1} - Z^{n+1} = y^n - Z^n + h\cdot\Big[f\big(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1})}_{=X}\big) - f\big(t^n + \frac{h}{2}, \underbrace{\frac{1}{2}\cdot(Z^n + Z^{n+1})}_{=\tilde{X}}\big)\Big]$$

Παίρνουμε το εσωτ. γιν. με $\frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}\cdot(Z^n + Z^{n+1}) = \frac{1}{2}\cdot(y^n - Z^n) + \frac{1}{2}\cdot(y^{n+1} - Z^{n+1})$

Έχουμε:

$$\left(y^{n+1} - Z^{n+1}, \frac{1}{2}\cdot(y^n - Z^n) + \frac{1}{2}\cdot(y^{n+1} - Z^{n+1})\right) =$$

$$= \left(y^n - Z^n, \frac{1}{2}\cdot(y^n - Z^n) + \frac{1}{2}\cdot(y^{n+1} - Z^{n+1})\right) + \frac{h}{2}\cdot\Big(\Big[f\big(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}\cdot(y^n + y^{n+1})\big) - f\big(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(Z^n + Z^{n+1})\big), \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}\cdot(Z^n + Z^{n+1})\Big]\Big) \quad \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(y^{n+1} - Z^{n+1}, \cancel{\frac{1}{2}}(y^n - Z^n) + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot(y^{n+1} - Z^{n+1})\right) \leq$$

$$\leq \left(y^n - Z^n, \cancel{\frac{1}{2}}\cdot(y^n - Z^n) + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot(y^{n+1} - Z^{n+1})\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(y^{n+1} - Z^{n+1}, y^n - Z^n)} + \|y^{n+1} - Z^{n+1}\|^2 \leq \|y^n - Z^n\|^2 + \cancel{(y^n - Z^n, y^{n+1} - Z^{n+1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - Z^{n+1}\|^{\cancel{2}} \leq \|y^n - Z^n\|^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - Z^{n+1}\| \leq \|y^n - Z^n\|.$$

• Η μέθοδος του μέσου είναι και Α-ευσταθής. Μάλιστα στην περίπτωση της $y' = \lambda \cdot y$ συμπίπτει με την μέθοδο του τραπεζίου. Επομένως, έχει περιοχή ευστάθειας $S = \mathbb{C}^-$.

ΤΕΛΟΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

3. Μέθοδοι των Runge-Kutta : ⇐ $\boxed{25.11.14}$

3.1. Προκαταρτικά: Συμβολισμός και παραδείγματα.

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω $q \in \mathbb{N}$. Έστω $\tau_1, \ldots, \tau_q \in \mathbb{R}$ (κατά κανόνα $0 \leq \tau_i \leq 1$), $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, \ldots, q$, και $b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$.

Για $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα που ακολουθούν με τους αντίστοιχους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

$$\int_0^1 \psi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} \underbrace{b_i}_{\text{βάρη}} \overbrace{\psi(\tau_i)}^{\text{κόμβοι.}}$$

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot \psi(\tau_j) \quad \text{για } i = 1, \ldots, q$$

Δηλαδή τα τ_i είναι κόμβοι σε όλους αυτούς τους τύπους ολοκλήρωσης, τα b_i είναι βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0,1]$ και τα a_{ij}, $j = 1, \ldots, q$, είναι τα βάρη στον τύπο ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, \tau_i]$.

Σε μορφή μητρώου:

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \ldots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \ldots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$