$\lambda = \alpha + i\beta \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$y(t) = y_1(t) + i y_2(t) \quad , y_1$ και $y_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$y'(t) = \lambda y(t) \Leftrightarrow y_1'(t) + i y_2'(t) = (\alpha + i\beta)(y_1(t) + i y_2(t))$$
$$= (\alpha y_1(t) - \beta y_2(t)) + i(\alpha y_2(t) + \beta y_1(t))$$

άρα

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ y_2'(t) &= \alpha y_2(t) + \beta y_1(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha y_1(t) - \beta_2(t) \\ \alpha y_2(t) + \beta y_1(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Ερώτηση Πότε είναι ο A αρνητικά ημιορισμένος;

Έχουμε $(Ax, x) = \left( \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$

$$= \left( \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (\alpha x_1 - \beta x_2) x_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2) x_2$$
$$= \alpha x_1^2 - \beta x_1 x_2 + \beta x_1 x_2 + \alpha x_2^2$$
$$= \alpha \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\geq 0} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 0$$

14/10/2014

Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής

1. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις
2. Εξισώσεις του Bernoulli

(*) $y'(t) = p(t) y(t) + q(t) [y(t)]^{\sigma}, \ \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0, \sigma \neq 1$

Παρατήρηση

- Για $\sigma = 0$ ή $\sigma = 1$ η Δ.Ε. είναι γραμμική
- Για $\sigma > 0$, η $y(t) = 0, \forall t \in [\alpha, b]$ είναι λύση

Θέτουμε $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$

Τότε $u'(t) = (1-\sigma) [y(t)]^{-\sigma} \cdot y'(t)$

οπότε η (*) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{1-\sigma} \cdot [y(t)]^{\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t) \cdot [y(t)]^{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \cdot \frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}} + q(t)$$

$$\frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}} = [y(t)]^{1-\sigma} = u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \cdot u(t) + q(t) \Rightarrow u'(t) = (1-\sigma) p(t) u(t) + (1-\sigma) q(t)$$

$\Rightarrow$ (17)

Αυτή η Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς τη συνάρτηση $u$. Μπορούμε να τη λύσουμε. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη σχέση $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη λύση $y(t)$.

Προσοχή: Για την $y(t)$ που θα βρούμε πρέπει να ορίζονται οι συναρτήσεις $[y(t)]^{1-\sigma}$ και $[y(t)]^{\sigma}$

Παράδειγμα

$$y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, \quad a \leq t \leq b$$

$\boxed{\sigma = 2}$ $\quad y=0$ λύση τετριμένη

Θέτω $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma} \Leftrightarrow u(t) = \dfrac{1}{y(t)}$

απαίτηση $y(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$

Έχουμε: $u'(t) = -\dfrac{1}{[y(t)]^2} \cdot y'(t)$

Άρα η αρχική Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$-[y(t)]^2 u'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \Rightarrow$$

$$-u'(t) = -\frac{y(t)}{[y(t)]^2} + 1 \Rightarrow$$

$$-u'(t) = -\underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{=u(t)} + 1 \Rightarrow -u'(t) = -u(t) + 1 \Rightarrow u'(t) - u(t) = -1$$

$$\Rightarrow e^{-t} u'(t) - e^{-t} \cdot u(t) = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow (e^{-t} u(t))' = e^{-t} \Rightarrow e^{-t} u(t) = e^{-t} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = c \cdot e^{t} + 1}$$

Επομένως $y(t) = \dfrac{1}{ce^{t}+1}, \quad a \leq t \leq b$

Για να έχει νόημα αυτή η λύση πρέπει $ce^{t} + 1 \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Αφού η $ce^{t}+1$ είναι μονότονη είναι διάφορη του μηδενός στο $[a,b]$ αν και μόνο αν παίρνει στα άκρα $a$ και $b$ είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές συγχρόνως.

## Εξισώσεις του Riccati

$\oplus \quad y'(t) = r(t) + p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^2 \quad , a \leq t \leq b$

Υπόθεση: Έστω $y_\varepsilon$ μια λύση της $\oplus$

Θέτουμε: ① $y(t) = y_\varepsilon(t) + \dfrac{1}{z(t)} \quad , \quad a \leq t \leq b$

Τότε ② $y'(t) = y'_\varepsilon(t) - \dfrac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t)$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις ① και ② στην $\oplus$ και παίρνουμε

$$y'_\varepsilon(t) = \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = r(t) + p(t)\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t)\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right]^2$$

Άρα

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{ y'_\varepsilon(t) - r(t) - p(t)\cdot y_\varepsilon(t) - q(t)\cdot[y_\varepsilon(t)]^2 \right\}}_{=0 \text{ αφού η } y_\varepsilon \text{ είναι λύση της } \oplus}$$

$$-\frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \frac{p(t)}{z(t)} + q(t)\, 2 y_\varepsilon(t) \frac{1}{z(t)} + q(t) \cdot \frac{1}{[z(t)]^2}$$

πολλαπλασιάζουμε με $[z(t)]^2$ και $\Rightarrow$ αλλάζουμε πρόσημα

$$\Rightarrow z'(t) = \underbrace{-p(t)\cdot z(t) - 2y_\varepsilon(t) q(t) z(t)}_{=\; -[p(t) + 2q(t)y_\varepsilon(t)]z(t)} - q(t)$$

είναι γραμμική Δ.Ε. ως προς z.

## Παράδειγμα

$y'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y(t)}{t} \cdot [y(t)]^2, \quad 1 \leq t \leq 2$

$y_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{t}$ Ειδική λύση

$y(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{z(t)}$

$\Rightarrow y'(t) = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t)$

αντικαθιστώντας στην αρχική Δ.Ε παίρνουμε

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right) - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow -\cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{z'(t)}{[z(t)]^2} = \cancel{\frac{1}{t^2}} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t\cdot z(t)} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{2}{t\cdot z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{z'(t)}{[z(t)]^2} = -\frac{3}{t\,z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Rightarrow z'(t) = \frac{3}{t}\cdot z(t) + 1 \quad \text{γραμμική Δ.Ε. ως προς } z$$

$$e^{\varphi(t)} z'(t) - \frac{3}{t} e^{\varphi(t)} z(t) = e^{\varphi(t)}$$

Επιλέγουμε μια $\varphi$ έτσι ώστε $\varphi'(t) = -\frac{3}{t}$, π.χ. $\varphi(t) = -3\log t$

και έχουμε $e^{\varphi(t)} \cdot z'(t) = e^{\varphi(t)}$, $e^{\varphi(t)} = e^{-3\log t} = e^{-\log t^3} = e^{\log \frac{1}{t^3}} = \frac{1}{t^3}$

οπότε $\left(\frac{1}{t^3}\cdot z'(t)\right)' = \frac{1}{t^3}$

Άρα $\frac{1}{t^3}\cdot z(t) = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c$

$$\Rightarrow z(t) = ct^3 - \frac{t}{2}, \quad t\in[a,b]$$

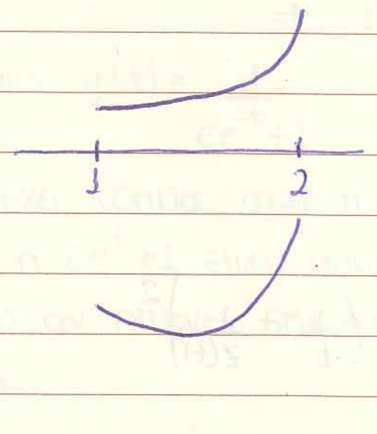
Γενική λύση $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(ct^2 - \frac{1}{2})}$, $t\in[1,2]$

Για να είναι λύση πρέπει και αρκεί η $\varphi(t) = ct^2 - \frac{1}{2}$ να μην μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$

Η $\varphi$ είναι μονότονη στο $[1,2]$

1η περίπτωση $c \le 0$ Τότε $\varphi$ παίρνει στο $[1,2]$ αρνητικές τιμές

2η περίπτωση $c > 0$ Τότε $\varphi$ αύξουσα

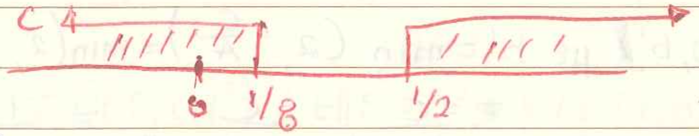


οπότε και $\varphi(2) > 0$

α) $\varphi(1) > 0$ Τότε $\varphi(1) > 0 \iff c - \frac{1}{2} > 0 \iff c > \frac{1}{2}$

οπότε και $\varphi(1) < 0$

β) $\varphi(2) < 0$ $\varphi(2) < 0 \iff 4c - \frac{1}{2} < 0 \iff c < \frac{1}{8}$




Συμπέρασμα $c < \frac{1}{8}$ ή $c > \frac{1}{2}$

## 4. Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

$$y'(t) = \frac{g(t)}{f(y(t))}$$

Έστω I ένα διάστημα. Γράφουμε τη Δ.Ε στη μορφή

$$f(y(t))\, y'(t) = g(t)$$

Έστω $\alpha \in I$. Τότε ολοκληρώνοντας από $\alpha$ έως $t$, έχουμε

$$\int_\alpha^t f(y(s))\, y'(s)\, ds = \int_\alpha^t g(s)\, ds$$

Αλλάζουμε μεταβλητές θέτοντας $\tau = y(s)$ και παίρνουμε

$$\int_{y(\alpha)}^{y(t)} f(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^t g(s)\, ds$$

$d\tau = y'(s)\,ds$

Έστω F και G παράγουσες (δηλαδή $F' = f$ και $G' = g$) των f και g

Τότε $F(y(t)) - F(y(\alpha)) = G(t) - G(\alpha)$

$$\Rightarrow F(y(t)) = G(t) + \underbrace{F(y(\alpha)) - G(\alpha)}_{c}$$

$\Rightarrow \boxed{F(y(t)) = G(t) + c}$ αυτή η σχέση μας δίνει τις λύσεις σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή. Αν μπορούμε να την επιλύσουμε ως προς $y(t)$, τότε βρίσκουμε τη λύση σε άμεση μορφή.

16/10/2014

$$\begin{cases} y' = y^2 g & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2
(τοπική συνθήκη Lipschitz)

$c>0$

$[1-c, 1+c]$

$[0, b']$ με $b' := \min\left(2, \frac{c}{A}\right) = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right)$

$= \frac{c}{(1+c)^2} = \frac{c}{1+2c+c^2} = \frac{1}{2+\left(c+\frac{1}{c}\right)}$

$A = \max f(t,y) = (1+c)^2$

$0 \le t \le 2, \quad 1-c \le y \le 1+c$

Το κλάσμα παίρνει τη μέγιστη τιμή του αν το $c + \frac{1}{c}$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του για $c=1$.

Ισχυρισμός: $c + \frac{1}{c} \ge 2$ ισχύει ως ισότητα

$c^2 - 2c + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (c-1)^2 \ge 0 \quad \boxed{c \ge 1}$

άρα η μέγιστη τιμή του $b'$ είναι $b' = \frac{1}{4}$

$[0, \frac{1}{4}]$

Άσκηση 1.8

$F: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $\|\cdot\|$ ευκλείδια νόρμα

$\exists L>0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

(*) $\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L \|x - \tilde{x}\|$

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Ν.Δ.Ο. $\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : $y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$

$(y'(t) - z'(t), y(t) - z(t)) = (f(t, y(t)) - f(t, z(t)), y(t) - z(t))$

$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))$

$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$



$\Rightarrow$

Άρα $\underbrace{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))}_{\shortparallel} = (f(t), y(t)) - f(t, z(t)), \varepsilon(t))$

$$(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq \|f(t,y(t)) - f(t, z(t))\| \cdot \|\varepsilon(t)\|$$

$$\circledast \leq L\|y(t) - z(t)\| \cdot \|\varepsilon(t)\| \leftarrow CS \qquad \text{TIP}: |(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

άρα $\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq L\|\varepsilon(t)\|^2 \quad \forall t \in [a,b]$, $\|\varepsilon(t)\|^2 = \phi(t)$

$$\varphi'(t) - 2L\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow (e^{-2Lt}\varphi(t))' \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a) \Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\varphi(a)$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \leq e^{2L(t-a)}\|\varepsilon(a)\|^2$$

$$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-a)}\|y_0 - z_0\|$$

$$\left(\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} \|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(b-a)}\|y_0 - z_0\|\right)$$

Άσκηση 1.9

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \leq t \leq b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$F: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\forall t \in [a,b]\ \forall y_2, y_\varepsilon \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1) - F(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq V(y_1 - y_\varepsilon)^2$$

και με σταθερά και χωρίς σταθερά

N.Δ.Ο. $|y(t) - z(t)| \leq e^{V(t-a)}|y_0 - z_0|$

απόδειξη Θέτω $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

Τότε $\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$

$$\varepsilon'(t)\,\varepsilon(t) = [f(t,y(t)) - f(t, z(t))] \cdot \overbrace{[y(t) - z(t)]}^{\varepsilon(t)}$$

$$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' = \qquad \leq V\underbrace{[y(t) - z(t)]^2}_{(\varepsilon(t))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \leq V(\varepsilon(t))^2$$

$$\ldots \quad (\varepsilon(t))^2 \leq e^{2V(t-a)}(\varepsilon(a))^2$$

$$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \leq e^{V(t-a)}|y_0 - z_0|$$

## Άσκηση 1.12 (Ανισότητα του Gronwall)
σε ολοκληρωμένη μορφή

$\varphi : [0, t] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \geq 0$

Αν $\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_{\alpha}^{t} \varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [0, T]$

N.Δ.Ο. $\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T]$

$\psi(t) = (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T]$ με $\varepsilon > 0$

(*) Τότε $\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\,ds \quad \forall t \in [0, T]$

απόδειξη Υποθέτουμε προς το παρών ότι ισχύει η (*)

Ισχυρισμός $\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) < \psi(t)$

απόδειξη

Για $t = 0$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0) \leq \alpha \\ \psi(0) = \alpha + \varepsilon \end{array}\right\} \varphi(0) < \psi(0)$$

Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο $t_0$

$\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ και

$\varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [0, t_0)$

Τότε θα έχουμε
$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &\leq \alpha + \beta \int_0^{t_0} \varphi(s)\,ds \\ &< \alpha + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds \\ &< \underbrace{\alpha + \varepsilon + \beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds}_{= \psi(t_0)} \end{aligned}$$

Άρα τέτοιο $t_0$ δεν υπάρχει οπότε δε συναντώνται τα γραφήματα πουθενά $\forall t \in [0, T]$

Συνεπώς $\varphi(t) < \psi(t)$

- $\varphi(t) < \psi(t) \Rightarrow \varphi(t) < (\alpha + \varepsilon) e^{\beta t} \quad \forall \varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0$
$\alpha < b + \varepsilon$
$\Rightarrow \alpha < b$

$\varphi(t) \leq \alpha e^{\beta t} \quad \forall t \in [0, T]$

απόδειξη της ⊛

$$a+\varepsilon+b\int_0^t \psi(s)ds = a+\varepsilon+b(b+\varepsilon)\int_0^t e^{Bs}ds$$

$$= a+\varepsilon+(a+\varepsilon)\int_0^t e^{Bs}\,b\,ds$$

$$= a+\varepsilon+(a+\varepsilon)(e^{Bt}-1) \Rightarrow$$

$$= (a+\varepsilon)e^{Bt} = \psi(t)$$

## 4. Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

παράδειγμα

$$e^{y(t)}\cdot y'(t) = t+t^3$$

$$\left(\Leftrightarrow y'(t) = \frac{t+t^3}{e^{y(t)}}\right)$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο και έχουμε

$$\int_a^t e^{y(s)}\cdot y'(s)ds = \int_a^t (s+s^3)ds$$

~~Με $\tau = y(s)$ έχουμε~~

Με $\tau = g(s)$ έχουμε

$$\int_{y(a)}^{y(t)} e^{\tau}d\tau = \int_a^t (s+s^3)ds \Rightarrow e^{y(t)} - e^{y(a)} = \frac{s^2}{2}\Big|_{s=a}^{s=t} + \frac{s^4}{4}\Big|_{s=a}^{s=4}$$

$$= \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{2^a}{2} - \frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{4} + \underbrace{\left[e^{y(a)} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right]}_{C}$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \underbrace{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c}_{>0}$$

$$y(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c\right)$$

## 5. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Οι Δ.Ε της μορφής $y'(t) = y\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ λέγονται ομογενείς.

### Παρατηρήσεις

1. Ομογενής γραμμική ΔΕ. $y'(t) = p(t)y(t)$
2. $f(t,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού ν. αν $\forall \lambda, t, y \in \mathbb{R} : f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^{\nu} f(t,y)$

Έστω M και N δυο ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ν.

Ισχυρισμός: Η συνάρτηση $f(t,y) = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$ είναι ομογενής βαθμού μηδέν.

Έστω f μια ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού. Τότε

$$f(t,y) = f\left(\overset{\lambda}{t}\cdot 1, \overset{\lambda}{t}\cdot\frac{y}{t}\right) = t^{0} F\left(1, \frac{y}{t}\right) = g\left(\frac{y}{t}\right)$$

$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ θέτουμε $u(t) := \frac{y(t)}{t}$

Τότε: $y(t) = t u(t)$

$\Rightarrow y'(t) = t u'(t) + u(t)$

Επομένως η ⊕ γράφεται στη μορφή $t u'(t) + u(t) = g(u(t))$

$\Rightarrow \boxed{t u'(t) = g(u(t)) - u(t)}$ ⊛⊛

Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές

1η περίπτωση

Έστω $u^* \in \mathbb{R}$ τ.ω. $g(u^*) = u^*$

δηλαδή $u^*$ είναι σταθερό σημείο της g.

Η συνάρτηση $u(t) = u^*$ είναι λύση της ⊛⊛

Οι συναρτήσεις $y(t) = u^* t$ είναι λύσεις της αρχικής Δ.Ε. και λέγονται ιδιάζουσες λύσεις.

2η περίπτωση $g(u(t)) \neq u(t)$

Τότε $\frac{u'(t)}{g(u(t)) - u(t)} = \frac{1}{t}$

Σταθεροποιούμε ένα $\alpha \in \mathbb{R}$ και ολοκληρώνουμε από $\alpha$ μέχρι $t$ όποτε παίρνουμε $\quad$ $\alpha, t$ ομόσημα

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{y'(s)}{y(u(s))-u(s)}\, ds = \int_{\alpha}^{t} \frac{1}{s}\, ds$$

Με $\tau := u(s)$ έχουμε.

$$\int_{u(\alpha)}^{u(t)} \frac{1}{y(\tau)-\tau}\, d\tau = \log|t| - \log|\alpha|$$

Έστω $G$ μια παράγουσα της $\frac{1}{y(\tau)-\tau}$

Τότε $G(u(t)) - G(u(\alpha)) = \log|t| - \log|\alpha|$

ή $G(u(t)) = \log|t| + \underbrace{G(\alpha) - \log|\alpha|}_{=c}$

Αυτή η σχέση μας δίνει τη $u(t)$ σε πεπλεγμένη μορφή.
Αν μπορούμε να τη λύσουμε βρίσκουμε τη $u(t)$ και τότε οι λύσεις της αρχικής ΔΕ είναι $y(t) = t\, u'(t)$

21/10/2014

## 5. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

$$y'(t) = g\left(\underbrace{\frac{y(t)}{t}}_{u(t)}\right)$$

Παράδειγμα

$$y'(t) = \frac{[y(t)]^2 + 2ty(t)}{t^2}$$

Τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού δύο.

Επομένως η δοθείσα Δ.Ε. είναι ομογενής. Θέτουμε $u(t) = \frac{y(t)}{t}$ και έχουμε

$y(t) = tu(t) \Rightarrow$

$y'(t) = u(t) + t \cdot u'(t)$ Άρα

$$u(t) + tu'(t) = \underbrace{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2}_{[u(t)]^2} + 2\underbrace{\frac{y(t)}{t}}_{u(t)}$$

Ιδιάζουσες λύσεις: $u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -1 \end{cases}$

- $y(t) = 0$
- $y(t) = -t$

Έστω τώρα ότι $u(t) \neq 0$ και $u(t) \neq -1$ για κάθε $t$. Τότε η ⊛ γράφεται στη μορφή

$$\frac{u'(s)}{u(s)[u(s)+1]} = \frac{1}{s}, \quad s \neq 0$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $a$ και ολοκληρώνουμε από το $a$ μέχρι το $t$, οπότε παίρνουμε

$$\int_a^t \frac{u'(s)}{u(s)[u(s)+1]} ds = \int_a^t \frac{1}{s} ds$$

ή με $\tau := u(s)$

$$\int_{u(a)}^{u(t)} \frac{1}{\tau(\tau-1)} d\tau = \log|t| - \log|a|$$

Τώρα $\frac{1}{\tau(\tau-1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1}$ οπότε

$$\underbrace{\int_{u(a)}^{u(t)} \frac{1}{\tau}\,d\tau}_{\log|u(t)|-\log|u(a)|} - \underbrace{\int_{u(a)}^{u(s)} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau}_{\log|u(t)+1| + \log|u(a)+1|} = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log|u(t)| - \log|u(t)+1| = \log|t| + \underbrace{[\log|u(a)| - \log|u(a)+1| - \log|a|]}_{\log|c| \quad c\neq 0}$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{u(t)}{u(t)+1}\right| = \log|c\cdot t|$$

$$\Rightarrow \frac{u(t)}{u(t)+1} = c\cdot t.$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{ct}{1-ct}$$

Άρα $\boxed{y(t) = \dfrac{c\cdot t^2}{1-ct}}$, $c\neq 0$, $t\neq \frac{1}{c}$

## 6. Πλήρεις (ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις

(1) $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$

Η (1) λέγεται πλήρης αν υπάρχει συνάρτηση $f(t,y)$ ς.ω.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(t,y)$

Υπόθεση: Η (1) είναι πλήρης και ξέρουμε μια $f$ που ικανοποιεί την (2)

Ισχυρισμός: Οι λύσεις $y(t)$ δίνονται από τη σχέση $f(t,y(t)) = c$, $c\in\mathbb{R}$

Πράγματι έχουμε

$$\frac{d}{dt} f(t,y(t)) \overset{\text{από (2)}}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))}_{M(t,y(t))} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))}_{N(t,y(t))}\cdot y'(t)$$

$M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) = 0$ από (1)

Ερώτημα: Πως ελέγχουμε αν η (1) είναι πλήρης, και στην περίπτωση που είναι πλήρης πως προσδιορίζουμε μια συνάρτηση $f$ που ικανοποιεί την (2);

Ισχυρισμός Αν οι συναρτήσεις $M$ και $N$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες τότε η (1) είναι πλήρης αν και μόνο αν

(3) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

- Έστω ότι η (1) είναι πλήρης. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f$ που ικανοποιεί τη (2). Άρα

$$M(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t,y)$$

$$N(t,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Αντίστροφα: Αν οι $M$ και $N$ ικανοποιούν την (3), θα αποδείξουμε ότι η (1) είναι πλήρης, βρίσκοντας μάλιστα μια συνάρτηση $f$ που ικανοποιεί την (2).

Αναζητούμε $f$ της μορφής

(4) $f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y)$ με άγνωστη τη συνάρτηση $g$.

Για την $f$ της μορφής (4) έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$ δηλαδή ικανοποιούν την πρώτη σχέση της (2).

Παραγωγίζοντας την (4) ως προς $y$ παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \int M_y(t,y)\,dt + g'(y)$$

οπότε αφού θέλουμε $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ – η δεύτερη σχέση της (2) θα έχουμε

$$N(t,y) = \int \underset{= N_t}{M_y}(t,y)\,dt + g'(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(y) = \underbrace{N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt}_{}}$$

⇓ συνάρτηση του $y$ μόνο!

Άρα $g(y) = \int [N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt]\,dy + \underset{\uparrow \text{σταθερά}}{c}$

Άρα η ζητούμενη $f$ (που ικανοποιεί την (2)) είναι

$$f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \underbrace{\int [N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt]\,dy + c}_{g(y)}$$

Παράδειγμα $\quad y'(t) = -\dfrac{e^{y(t)}}{t e^{y(t)} + 2y(t)}$

Άρα $M(t,y) = e^y$, $N(t,y) = te^y + 2y$

Έχουμε

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = e^y \text{ οπότε } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

άρα η ΔΕ είναι πλήρης

Ζητείται μια συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y \text{ και } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = te^y + 2y}$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y \Rightarrow f(t,y) = te^y + g(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = te^y + g'(y)}$$

Από τις δύο σχέσεις $\boxed{\phantom{x}}$ έπεται ότι $\cancel{te^y} + g'(y) = \cancel{te^y} + 2y$

$$\Rightarrow g'(y) = 2y$$

$$\Rightarrow \boxed{g(y) = y^2 + c}$$

Άρα $F(t,y) = te^{y} + y^{2} + c$

Επομένως, οι λύσεις $y(t)$ δίνονται από τη σχέση

$$F(t,y(t)) = G \quad \text{ή} \quad te^{y(t)} + [y(t)]^{2} + c = \tilde{G} \quad \text{με } \tilde{G} \in \mathbb{R}.$$

• Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις

Ζητούμενο: Έστω ότι η Δ.Ε $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ δεν είναι πλήρης.

Υπάρχει συνάρτηση $\mu(t,y)$ τ.ω. η Δ.Ε.

(5) $$y'(t) = -\frac{M(t,y(t)) \cdot \mu(t,y(t))}{N(t,y(t)) \cdot \mu(t,y(t))}$$ να είναι πλήρης.

Κάθε τέτοια συνάρτηση $\mu$, αν υπάρχει λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας.

Η (5) είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

ή

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial t}.$$

ή

$$N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

ή

(6) $$\frac{1}{\mu}\left[N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Η επίλυση της (6) είναι πιο δύσκολο πρόβλημα από την επίλυση της αρχικής Δ.Ε. !

Ειδικές περιπτώσεις: Πότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$ ή $\mu = \mu(y)$;

1η Περίπτωση : $\mu=\mu(t)$

Τότε η (6) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{\mu(t)}\cdot N\frac{d\mu}{dt}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}$$

ή

$$\frac{1}{\mu(t)}\cdot\frac{d\mu}{dt}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

Τέτοιος ολοκληρωτικός παράγοντας υπάρχει αν και μόνο αν η $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ είναι συνάρτηση μόνο του $t$.

Τότε έχουμε $\mu'(t)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}\cdot\mu(t)$

$$\Rightarrow \mu(t)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}dt}$$

2η περίπτωση: $M=\mu(y)$

Τότε η (6) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}$$

Τέτοιο $\mu$ υπάρχει αν και μόνο αν η $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}$ είναι συνάρτηση μόνο του $y$. Όπως προηγουμένως βρίσκουμε.

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}dy}$$

23/10/2014

Ασκήσεις (από τις σημειώσεις στην σελίδα)

## Άσκηση 1.3

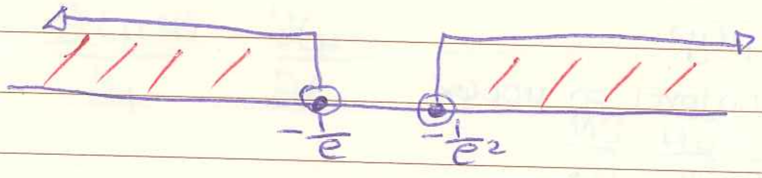
$$(+)\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. είναι εξίσωση του Bernoulli και έχει λύσεις $y(t)=0$ και

παράδειγμα 1.3

$$⊛ \quad y(t) = \frac{1}{ce^2+1} \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

α) Οι συναρτήσεις ⊛ αποτελούν λύσεις της Δ.Ε. στο $[1,2]$, αν και μόνο αν είτε $c < -\frac{1}{e}$ είτε $c > -\frac{1}{e^2}$



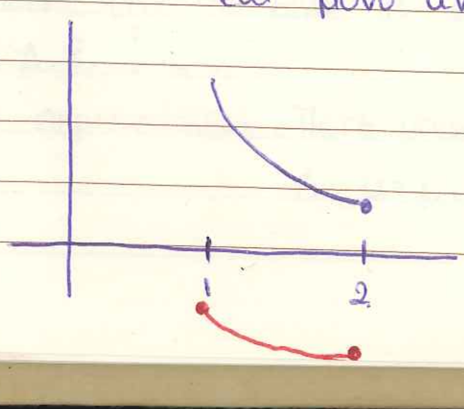

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = ce^t + 1$, $t \in [1,2]$

Τότε οι ⊛ είναι λύσεις, αν και μόνο αν $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in [1,2]$

1η περίπτωση : $c \geq 0$ Τότε η φ είναι θετική (και αύξουσα) οπότε ⊛ μας δίνει λύσεις

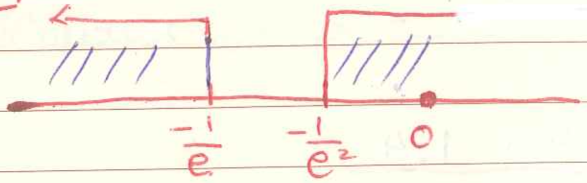
2η περίπτωση : $c < 0$ Τότε η φ είναι φθίνουσα

Άρα η φ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$, αν και μόνο αν είτε $\varphi(2) > 0$ είτε το $\varphi(1) < 0$



• $\varphi(2)>0 \iff c\cdot e^{2}+1>0 \iff \boxed{c>-\frac{1}{e^{2}}}$

• $\varphi(1)<0 \iff c\cdot e+1<0 \iff \boxed{c<\frac{-1}{e}}$




β) Για $y_0=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$ το πρόβλημα (+) δεν έχει λύση. Ακριβέστερα

$y(t)\to\infty$ για $t\nearrow 3/2$.

Απόδειξη: Προφανώς η $y(t)=0$ δεν είναι λύση, γιατί δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.
Η $y(t)$ που δίνεται στην ⊛ ικανοποιεί την αρχική τιμή, αν και μόνο αν.

$$y(1)=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \iff \frac{1}{ce+1}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \iff$$

$$ce\sqrt{e}+\cancel{\sqrt{e}}=\cancel{\sqrt{e}}-1 \iff c=\frac{-1}{e\sqrt{e}}$$

Επομένως $$y(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{e\sqrt{e}}\cdot e^{t}}=\frac{1}{1-e^{t-\frac{3}{2}}}\to\infty$$
καθώς $t\nearrow 3/2$.

γ) Ποια είναι η λύση για $y_0=-1$.

Απόδειξη: $y(1)=-1 \iff \frac{1}{ce+1}=-1 \iff ce+1=-1 \iff c=\frac{-2}{e}$

Άρα. $y(t)=\frac{1}{1-\frac{2}{e}\cdot e^{t}}=\frac{1}{1-2e^{t-1}}$

$\Rightarrow$

Ελέγχω αν ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός

Έχω $e^{t-1} \geq 1 \iff -2e^{t-1} \leq -2$

$\iff 1-2e^{t-1} \leq -1$

$\iff 1-2e^{t-1} \neq 0$ για κάθε $t \in [1,2]$

## Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Να προσδιορίσουμε το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα $I$ (με $0 \in I$) στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.

Λύση: Δ.Ε. Bernoulli με $\sigma = 2$.

Η $y(t)=0$ είναι λύση της Δ.Ε. αλλά δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.

Θέτουμε $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma} = \dfrac{1}{y(t)}$

Έχουμε:

$$u'(t) = -\frac{1}{[y(t)]^2} \cdot y'(t) \quad \text{οπότε}$$

$$-[y(t)]^2 u'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \iff$$

$$-u'(t) = \underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{=u(t)} - 1 \iff$$

$$u'(t) + u(t) = 1 \iff$$

$$(e^t u(t))' = e^t \iff$$

$$e^t u(t) = e^t + c \iff$$

$$u(t) = 1 + ce^{-t}$$

Άρα $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{1+ce^{-t}}}$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$y(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+c} = 2 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$

Άρα η λύση του ΠΑΤ (προβλήματος αρχικών τιμών) είναι

⊛⊛ $y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}$

Τώρα $1 - \frac{1}{2}e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = 2 \Leftrightarrow$
$-t = \log 2 \Leftrightarrow \boxed{t = -\log 2}$

Επομένως η $y(t)$ της ⊛⊛ είναι λύση της Δ.Ε. στα διαστήματα $(-\infty, -\log 2)$ και $(-\log 2, \infty)$
Επειδή θέλουμε το 0 να ανήκει στο διάστημα που η $y$ είναι λύση της Δ.Ε. συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο διάστημα $I$ είναι: $I = (-\log 2, \infty)$

Δ.Ε. που ανάγονται σε πλήρεις

$y'(t) = -\frac{M(t, y(t))}{N(t, y(t))}$

α) $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow$ Η Δ.Ε. πλήρης

β) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ ανεξ. του $y \rightsquigarrow$ υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$,

⊛ $\boxed{\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}}$

ii) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{M}$ ανεξ. του t. ⇝ υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$,

$$\boxed{\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} \cdot dy}}$$

Παράδειγμα

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2 y(t) - t}$$

$M(t,y) = y$
$N(t,y) = t^2 y - 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= 2ty - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \text{η Δ.Ε. δεν είναι πλήρης}$$

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{M}(t,y) = \frac{2 - 2ty}{y} = \frac{2}{y} - 2t$$ όχι ανεξάρτητο του t. ⇒

ΔΕΝ υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}(t,y) = \frac{2 - 2ty}{t^2 y - t} = \frac{2(1-ty)}{t(ty-1)} = -\frac{2}{t}$$

Είναι ανεξάρτητο του y. ⇒ υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$

Σύμφωνα με την ✱ $\mu(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = e^{-2\int \frac{1}{t}dt}$ $\int \frac{1}{t}dt = \log|t| \Rightarrow$

$$\mu(t) = e^{\log\frac{1}{|t|^2}} = \frac{1}{t^2}.$$

Πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρονομαστή στο δεξιό μέλος επί $\frac{1}{t^2}$ και η αρχική Δ.Ε. γράφεται στη μορφή:

$$y'(t) = \frac{\frac{y(t)}{t^2}}{\frac{t^2 y(t) - t}{t^2}} = \frac{\frac{y(t)}{t^2}}{y(t) - \frac{1}{t}}$$ πλήρης.

$$\boxed{\text{Ζητείται } f(t,y) \text{ τ.ω. } \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2} \text{ και } \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = y - \frac{1}{t}}^{(1)}}$$

Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2} \Rightarrow f(t,y) = \int \frac{y}{t^2}dt + g(y) = \frac{-y}{t} + g(y)$

Παραγωγίζοντας ως προς $y$ παίρνουμε.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1}{t} + g'(y)$$

Συνδυάζοντας με την (1) έχουμε

$$-\cancel{\frac{1}{t}} + g'(y) = y - \cancel{\frac{1}{t}} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$$

Άρα η ζητούμενη f. είναι:

$$f(t,y) = \frac{-y}{t} + \frac{1}{2}y^2 + c$$

Οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$-\frac{y(t)}{t} + \frac{[y(t)]^2}{2} + c = 0 \quad , \text{ με } c \in \mathbb{R}.$$

## • Γραμμικά Συστήματα Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές

Γενικό πρόβλημά μας:

Δεδομένα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχής

διανυσματική συνάρτηση

$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Ζητούμενα $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

• Το ομογενές σύστημα

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Παρατήρηση Αν η αρχική τιμή δίνεται σε ένα σημείο $a$, τότε με την αλλαγή μεταβλητής $t = a + c$, το πρόβλημα ανάγεται σε αντίστοιχο της μορφής $(*)$

$y'(t) = ay(t), \quad t \in \mathbb{R}$

$y(0) = y^{(0)}$

Λύση $y(t) = e^{at} \cdot y^{(0)}$

Ερώτηση Πότε είναι συναρτήσεις της μορφής

$y(t) = e^{\lambda t} \cdot y^{(0)}$, με $\lambda \in \mathbb{C}$ λύσεις του $(*)$

• Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται για οποιοδήποτε $\lambda$

• $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot y^{(0)}$

Άρα $y'(t) = Ay(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \cdot y^{(0)} = A(e^{\lambda t} y^{(0)})$

$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} y^{(0)} = e^{\lambda t} A y^{(0)} \Leftrightarrow \boxed{Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}}$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $y^{(0)} \neq 0$.
(Διαφορετικά η λύση του ⊛ είναι $y(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

$y^{(0)} \neq 0$
$Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}$
Άρα: το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $A$. και το $y^{(0)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

29/10/2014

Υπόθεση: Το $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του $A$.

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του $A$ και $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, \ i=1, \dots, m$.

Αν ⊛⊛ $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)}$, με $c_i \in \mathbb{C}$, $i=1,\dots,m$ τότε η λύση $y(t)$ του ⊛ γράφεται στη μορφή

⊕ $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$

Θ.Δ.Ο. η $y(t)$ που δίνεται στην ⊕ ικανοποιεί τόσο την αρχική συνθήκη όσο και το σύστημα Δ.Ε. στην ⊛, δηλαδή ότι είναι όντως λύση του.

Αρχική συνθήκη $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)} \overset{⊛⊛}{=} y^{(0)}$ ✓

↑ ⊕ με $t=0$

ΣΥΣΤΗΜΑ Δ.Ε. $y'(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot \lambda_1 x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \lambda_m x^{(m)}$

↑ ⊕

$Ay(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{A x^{(1)}}_{=\lambda_1 x^{(1)}} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \underbrace{A x^{(m)}}_{=\lambda_m x^{(m)}}$

Συμπέρασμα: $y'(t) = Ay(t)$ ✓

Υπόθεση: Ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{C}^n$

Υπενθύμιση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\lambda^*$ μια ιδιοτιμή του. Αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda^*$ λέγεται η πολλαπλότητα του $\lambda^*$ ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ του A

Γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda^*$ λέγεται το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς την ιδιοτιμή $\lambda^*$

Ισχύει πάντοτε:
$1 \le$ Γεωμετρική πολλαπλότητα $\le$ Αλγεβρική πολλαπλότητα $\le n$

Συνέχεια στην υπόθεση: Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η αλγεβρική πολλαπλότητα είναι ίδια με την γεωμετρική για κάθε ιδιοτιμή

Ειδικές περιπτώσεις: Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες απλές, δηλαδή ο A έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές

Ο A είναι συμμετρικός δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$, $i = j = 1, \dots, n$.
Τότε τα ιδιοανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$. Επομένως η $y^{(0)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ δηλαδή $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \dots + c\ x^{( )}$. (Λύνοντας αυτό το σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους προσδιορίζουμε τα $c_1, \dots, c_n$)

Σύμφωνα με όσα είδαμε προηγουμένως η λύση $y(t)$ του (*) είναι τότε
$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x_r^{(m)}$.

Γενική περίπτωση (Δεν υποθέτουμε ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A.

$$\begin{cases} y'(t) = a y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^{at} y_0$.

Ερώτηση: Γράφεται η λύση $y(t)$ του ⊛ στη μορφή
$y(t)=e^{tA}y^{(0)}, t\in\mathbb{R}$; Τι σημαίνει αυτό;

$\alpha\in\mathbb{C},\ e^{\alpha}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\dots$

Ορισμός: Για $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ ορίζουμε $e^A=I_n+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\dots$

Ιδιότητες

$e^0=I_n$

$(e^{tA})'=Ae^{tA}$

$e^Ae^B=e^{A+B} \Leftrightarrow AB=BA$

Απάντηση: ΝΑΙ

Αρχική Συνθήκη $y(0)=e^{0}\ =e^{0}y^{(0)}=I_ny^{(0)}=y^{(0)}$ ✓

Σύστημα Δ.Ε $y'(t)=(e^{tA}y^{(0)})'=(e^{tA})'\cdot y^{(0)}=A\underbrace{e^{tA}y^{(0)}}_{=y(t)}=Ay(t)$ ✓

Ουσιαστικό ερώτημα: Πώς υπολογίζουμε το $e^{tA}y^{(0)}$ (ή το $e^{tA}x$ με $x\in\mathbb{C}^n$);

Μη ομογενές σύστημα ΔΕ:

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t)+f(t), & t\in\mathbb{R}\\ y(0)=y^{(0)} \end{cases}$$

Μέθοδος μεταβολής των σταθερών: Προσπαθώ να βρω λύσεις της μορφής $y(t)=e^{tA}u(t),\ t\in\mathbb{R}$ με κατάλληλο $u$.

Αρχική συνθήκη: $y(0)=y^{(0)}\Leftrightarrow e^{0A}\cdot u(0)=y^{(0)}\Leftrightarrow \boxed{u(0)=y^{(0)}}$

Σύστημα Δ.Ε. $y'(t)=(e^{tA}u(t))'=(e^{tA})'u(t)+e^{tA}u'(t)$

$=A\underbrace{e^{tA}u(t)}_{=y(t)}+e^{tA}u'(t)=Ay(t)+e^{tA}u'(t)$

Συμπέρασμα: Αυτή η $y$ ικανοποιεί το σύστημα ΔΕ $y'(t)=Ay(t)+f(t)$ αν και μόνο αν $e^{tA}u'(t)=f(t)$

$e^{sA}u'(s)=f(s) \Leftrightarrow u'(s)=f(s)e^{-sA} \Rightarrow \int_0^t u'(s)\,ds=\int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds \Leftrightarrow$

$u(t)-\underset{y^{(0)}}{\underset{\parallel}{u(0)}}=\int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds \Rightarrow \boxed{u(t)=y^{(0)}+\int_0^t e^{-sA}f(s)\,ds}$

Άρα

$$y(t)=e^{tA}u(t)=e^{tA}y^{(0)}+\int_0^t e^{(t-s)A}f(s)\,ds$$

Η λύση του

$$\begin{cases} y'(t)=Ay(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(a)=y^{(0)} \end{cases} \quad \text{είναι} \quad y(t)=e^{(t-a)A}y^{(0)},\ t\in\mathbb{R}$$

Έστω $x\in\mathbb{C}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n,n}$. Πως υπολογίζουμε το $e^{tA}x$;

1η περίπτωση Το $x$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda$. Τότε

$$e^{tA}x=e^{\lambda t I_n}e^{t(A-\lambda I_n)}x=e^{\lambda t}I_n\, e^{t(A-\lambda I_n)}x= \\ =e^{\lambda t}\,e^{t(A-\lambda I_n)}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax=\lambda x \quad (1) \\ &e^{\lambda t I_n}= \\ &=I_n+\lambda t I_n+\tfrac{1}{2!}(\lambda t I_n)^2+\dots \\ &=I_n+\lambda t I_n+\tfrac{1}{2!}(\lambda t)^2 I_n+\dots \\ &=I_n\underbrace{(1+\lambda t+\tfrac{1}{2!}(\lambda t)^2+\dots)}_{e^{\lambda t}} \\ &=I_n e^{\lambda t} \end{aligned}}$$

Τώρα

$$e^{t(A-\lambda I_n)}x=I_n x+t\underbrace{(A-\lambda I_n)x}_{=0\ (1)}+\frac{1}{2!}t^2\underbrace{(A-\lambda I_n)^2x}_{=0\ (1)}+\dots$$

$$=x \qquad \text{Άρα } \underline{e^{tA}x=e^{\lambda t}x}$$

2η περίπτωση Το $x$ τ.ω. $(A-\lambda I_n)^m x=0$ για κάποιο $m\geq 1$.

Τότε $e^{tA}x=e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I_n)}x$

και

$$e^{t(A-\lambda I_n)}x=x+t(A-\lambda I_n)x+\frac{1}{2!}t^2(A-\lambda I_n)^2x+\dots+\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1}x+ \\ +\frac{1}{m!}t^m\underbrace{(A-\lambda I_n)^m x}_{=0}+\underbrace{\dots}_{0}$$

Άρα $e^{tA}x=e^{\lambda t}\{x+t(A-\lambda I_n)x+\dots+\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1}x\}$

Μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα $x\in\mathbb{C}^n$ του $(A-\lambda I_n)^m x=0$ λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$ ως προς την ιδιοτιμή $\lambda$.

Για κάθε πίνακα $A$ υπάρχει βάση $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$.

(44) Πώς βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα;

30/10/2014

## Άσκηση 1.5

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \ 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε. είναι εξίσωση του Ric

Η γενική λύση της είναι

$$\circledast \quad y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - t/2}, \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

(Παράδειγμα 1.4 η λύση της)

a) $\boxed{y_0 = -1}$ ΝΔΟ το πρόβλημα αρχικών τιμών δεν έχει λύση

Ακριβέστερα $y(t) \to \infty$ καθώς $t \nearrow \sqrt{2}$

Σύμφωνα με την $\circledast$ έχουμε

$$y(1) = -1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - 1/2} = -1 \Leftrightarrow \boxed{c = 1/4}$$

Άρα σύμφωνα με την $\circledast$, η λύση είναι

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t\underbrace{(t^2-2)}} \to -\infty \quad t \nearrow \sqrt{2}$$

1 — $\sqrt{2}$ — 2

$$t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

Η μόνη λύση y είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1, \sqrt{2})$ και τείνει στο $-\infty$ καθώς το t αυξάνει προς το $\sqrt{2}$. Άρα δεν υπάρχει λύση σε όλο το διάστημα $[1, 2]$.

β) $y_0 = 3$ Ποια είναι η λύση;

$$y(1) = 3 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3 - t/2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t/2\,\underbrace{(2t^2-1)}_{\ge 1}}$

Άσκηση 1.6 $\quad y'(t) = \dfrac{1+[y(t)]^2}{2t\,y(t)}$ $\quad$ Λύση σε πεπλεγμένη μορφή

Λύση

$$y'(t) = \frac{1+[y(t)]^2}{2t\,y(t)} \iff \frac{2y(t)\cdot y'(t)}{1+[y(t)]^2} = \frac{1}{t}.$$

Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών

$$\frac{2y(s)y'(s)}{1+[y(s)]^2} = \frac{1}{s} \Rightarrow 2\int_a^t \frac{y(s)\cdot y'(s)}{1+[y(s)]^2}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\cdot ds$$

(α και t ορόσημα)

$$\tau := [y(s)]^2 \rightsquigarrow d\tau = 2y(s)\cdot y'(s)\,ds$$

$$\iff \int_{[y(a)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\cdot d\tau = \log|\tau| - \log|a|$$

$$\iff \log\{[y(t)]^2+1\} - \log\{[y(a)]^2+1\} = \log|\tau| - \log|a|$$

$$\iff \log\{[y(t)]^2+1\} = \log|\tau| + \log\{[y(a)]^2+1\} - \log|a| \quad = \log|c|$$

$$\iff \log\{[y(t)]^2+1\} = \log|\tau\cdot c| \iff$$

$$[y(t)]^2 + 1 = |ct| \iff [y(t)]^2 = \underbrace{|ct| - 1}_{\geq 0}$$

$$\iff y(t) = \pm\sqrt{|ct|-1}$$

## Άσκηση 1.7  $y'(t) = \dfrac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$

Λύση

$$\{[y(t)]^3 - y(t)\}\, y'(t) = 2t-1$$

$$\{[y(s)]^3 - y(s)\}\, y'(s) = 2s-1 \Leftrightarrow$$

$$\int_\alpha^t \{[y(s)]^3 - y(s)\}\, y'(s)\, ds = \int_\alpha^t (2s-1)\, ds.$$

$\tau := y(s)$

Άρα $\displaystyle\int_{y(\alpha)}^{y(t)} (\tau^3 - \tau)\, d\tau = (t^2 - \alpha^2) - (t-\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\{[y(t)]^4 - [y(\alpha)]^4\} - \frac{1}{2}\{[y(t)]^2 - [y(\alpha)]^2\} = (t^2 - t) - (\alpha^2 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = (t^2 - t) + \boxed{\frac{1}{4}[y(\alpha)]^4 - \frac{1}{2}[y(\alpha)]^2 - (\alpha^2 - \alpha)} = c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = (t^2 - t) + c.$$

Η λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε

$[y(t)]^2 - y(t) \neq 0$ δηλαδή $y(t) \neq 0$ και $y(t) \neq \pm 1$ για κάθε $t$.

$e^{tA} y^{(0)}$;

**1η περίπτωση** Η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του πίνακα A συμπίπτουν. Τότε υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A.

**2η περίπτωση** Η γεωμετρική πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής του A είναι μικρότερη από την αλγεβρική της πολλαπλότητα

**Ισχυρισμός** Υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A.

**Απόδειξη** Έστω m η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής $\lambda$ του A με γεωμετρική πολλαπλότητα μικρότερη του m.
Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι:

α) Υπάρχουν m γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή $\lambda$, δηλαδή λύσεις του γραμμικού συστήματος $(A-\lambda I_n)^m x = 0$

β) Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

**Συμπέρασμα** Αφού το άθροισμα των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων όλων των ιδιοτιμών του A είναι n (ίσος και ο βαθμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A), υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A. Αφού $\dim \mathbb{C}^n = n$, τα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$

Παρασκευή 14/11 ώρα 12:00 απορίες.

Ερώτηση: Πώς υπολογίζουμε $m$ γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα $A$ ως προς την ιδιοτιμή του $\lambda$ αλγεβρικής πολλαπλότητας $m$;

1ος τρόπος: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I_n)^m x = 0$.

2ος τρόπος: (ευκολότερος)

1ο βήμα: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I_n)x=0$ και προσδιορίζουμε τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του $A$ ως προς την ιδιοτιμή $\lambda$, όσα η γεωμετρική πολλαπλότητα (αυτός είναι ο αριθμός της γεωμετρικής πολλαπλότητας). Αν βρήκαμε $m$ τέτοια διανύσματα σταματάμε εδώ. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

2ο βήμα: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I_n)^2 x = 0$ και προσδιορίζουμε όσο περισσότερα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μπορούμε τα οποία μαζί με αυτά που βρήκαμε στο 1ο βήμα να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το πλήθος τους είναι τουλάχιστον κατά ένα μεγαλύτερο του πλήθους των διανυσμάτων που βρήκαμε στο πρώτο βήμα. Αν βρήκαμε $m$ διανύσματα σταματάμε

3ο βήμα: Λύνουμε το $(A-\lambda I_n)^3 x = 0$... Απαιτούνται (το πολύ) $\ell$ βήματα, όπου $\ell$ η διαφορά της αλγεβρικής πολλαπλότητας (δηλ. του $m$) μείον τη γεωμετρική πολλαπλότητα.

$$(*)\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

- Έστω $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A (Υπάρχει πάντα!!)
  Τότε η αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται στη μορφή
  $$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$$
  Τότε η λύση $y(t) = e^{tA} y^{(0)}$ του $(*)$ γράφεται στη μορφή
  $$y(t) = c_1 e^{tA} x^{(1)} + c_2 e^{tA} x^{(2)} + \dots + c_n e^{tA} x^{(n)}.$$

Είδαμε ήδη με ποιον τρόπο υπολογίζουμε τα $e^{tA} x^{(i)}$, όπου $x^{(i)}$ (γενικευμένο) ιδιοδιάνυσμα του A οπότε ξέρουμε πώς να βρούμε την $y(t)$

Οι $\varphi^{(i)}(t) := e^{tA} x^{(i)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $y'(t) = Ay(t)$, $t\in\mathbb{R}$ αφού τα $x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όταν τα $x^{(i)}$ είναι (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις $\varphi^{(i)}(t)$

**Παράδειγμα** Γενική λύση του $y'(t) = Ay(t)$, $t\in\mathbb{R}$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
$$= \dots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6.$$

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 3$
$\lambda_3 = -2$

Οι ιδιοτιμές του A είναι διαφορετικές μεταξύ τους, συνεπώς υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A

$\lambda_1 = 1$ Θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$(A - \lambda_1 I_3) u = 0 \iff$

* γράφω απ' την διαγώνιο το $\lambda_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \left.\begin{aligned} -u_2 + 4u_3 &= 0 \\ 3u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_1 + u_2 - 2u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &1^{\eta} \\ &2^{\eta} \\ &3^{\eta} \end{aligned}$$

$2^{η} - 3^{η}$ : $u_1 + u_3 = 0 \iff \boxed{u_1 = -u_3}$

$1^{η}$ : $\boxed{u_2 = 4u_3}$

Για $u_3 = 1$ (οτιδήποτε διάφορο του μηδενός) το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αυτό μας δίνει τη λύση $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} u = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ του $y'(t) = Ay(t)$

β) $\lambda_2 = 3 \rightsquigarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση: $\varphi^{(2)}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

γ) $\lambda_3 = -2 \rightsquigarrow u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση: $\varphi^{(3)}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Γενική λύση: $y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t)$

$= c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{με } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

4/11/2014

Άσκηση 1.8

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2ty(t)} \quad \text{ομογενής}$$

α) Γενική λύση

Θέτουμε $u(t) := \frac{y(t)}{t}$ και έχουμε

$y(t) = tu(t) \Rightarrow y'(t) = tu'(t) + u(t)$ οπότε

$$tu'(t) + u(t) = \frac{3\cancel{t^2}[u(t)]^2 + \cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}u(t)} \Rightarrow tu'(t) + u(t) = \frac{3}{2}u(t) + \frac{1}{2u(t)}$$

Άρα

$$\Rightarrow tu'(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2u(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(t)}{\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2u(t)}} = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(t)}{\frac{[u'(t)]^2+1}{2u(t)}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2u(t)u'(t)}{[u(t)]^2+1} = \frac{1}{t}$$

Άρα $\frac{2u(s)u'(s)}{[u(s)]^2+1} = \frac{1}{s}$ για να ολοκληρώσουμε

$$\Rightarrow \int_a^t \frac{2u(s)u'(s)}{[u(s)]^2+1}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$ για να έχει νόημα πρέπει α και t ομόσημα

$$\Rightarrow \int_{[u(a)]^2}^{[u(t)]^2} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$\tau := [u(s)]^2$

$d\tau = 2u(s) \cdot u'(s)$

Επομένως $\Rightarrow \log\{[u(t)]^2+1\} - \log\{[u(a)]^2+1\} = \log|t| - \log|a|$

$$\Rightarrow \log\{[u(t)]^2+1\} = \log|t| + \underbrace{\log\{[u(a)]^2+1\} - \log|a|}_{=\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log\{[u(t)]^2+1\} = \log|ct|$$

$$\Rightarrow [u(t)]^2+1 = ct \Rightarrow [u(t)]^2 = \underbrace{ct-1}_{\geq 0}$$ πρέπει να είναι

$$\Rightarrow \frac{[y(t)]^2}{t^2} = ct-1 \Rightarrow [y(t)]^2 = t^2(ct-1) \quad ⊛$$

β) ειδική λύση όταν $y(1)=1$;

Τότε αντικαθιστώντας στην ⊛ έχουμε.

$$1 = c-1 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

Άρα

$$[y(t)]^2 = t^2(\underbrace{2t-1}_{\geq 0}), \quad t \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \pm t\sqrt{2t-1}}$$ Με πρόσημο (−) παίρνουμε $y(1)=-1$ απορρίπτεται

Άρα $y(t) = t\sqrt{2t-1}$, $t \geq \frac{1}{2}$.

## Άσκηση 1.9

$$y'(t) = \frac{-2t + y(t)}{t + 2y(t)} \qquad \text{(πλήρης)}$$

Να βρούμε τη γενική λύση;

$M(t,y) = 2t + y \quad , \quad N(t,y) = t + 2y$

Προφανώς $\underbrace{\dfrac{\partial M}{\partial y}}_{\shortparallel\, 1} = \underbrace{\dfrac{\partial N}{\partial t}}_{\shortparallel\, 1}$ άρα η Δ.Ε. είναι όντως πλήρης.

Ζητείται $f$ τ.ω. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = M$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t + y \Rightarrow \boxed{f(t,y) = t^2 + y \cdot t + g(y)}$$

οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t + g'(y)$$

Αλλά πρέπει να ισχύει $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t + 2y$.

οπότε πρέπει $\cancel{t} + g'(y) = \cancel{t} + 2y \Rightarrow \boxed{g(y) = y^2}$ δεν λαμβάνω υπόψην τις σταθερές

Συμπέρασμα: $\boxed{f(t,y) = t^2 + yt + y^2.}$

Επομένως οι λύσεις $y(t)$ δίνονται απ' την σχέση $f(t, y(t)) = c$ με $c$ σταθερά δηλαδή

$$t^2 + t\,y(t) + [y(t)]^2 = c.$$

Επαλήθευση $\quad \dfrac{d}{dt}\left(t^2 + t\,y(t) + [y(t)]^2\right) = 0 \iff$

$$2t + y(t) + t\,y'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad y'(t)\,[\; + 2y(t)] = -2t - y(t)$

$$\Leftrightarrow \quad y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$

## Άσκηση 1.10

$$y'(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{t\,y(t)} \quad \text{(ανάγεται σε πλήρη)}$$

$M(t,y) = t + y^2$ , $N(t,y) = t \cdot y$

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)}_{=2y} \neq \underbrace{\frac{\partial N}{\partial y}(t,y)}_{=y} \quad \text{άρα όχι πλήρης.}$$

Τώρα

$$\frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right] = \dots = \frac{y}{ty} = \frac{1}{t}$$

ανεξάρτητο του $y$.

Συμπέρασμα: Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right] dt}$$

$$= e^{\int \frac{1}{t}\,dt} \underset{t>0}{=} e^{\log t} = t.$$

Γράφουμε την αρχική Δ.Ε. στην μορφή $y'(t) = -\dfrac{t^2 + t\,[y(t)]^2}{t^2 \cdot y(t)}$

(πολλαπλασιάσαμε δηλαδή αριθμητή και παρονομαστή με $\mu(t) = t$)

$\tilde{M}(t,y) = t^2 + ty^2$, $\tilde{N}(t,y) = t^2 y$

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(t,y)}_{=2y} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}(t,y)}_{=2y}$$

Ζητείται $f$ τ.ω. $\frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{M}$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = t^2 + ty^2 \Rightarrow f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2 + g(y)$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \boxed{t^2 y + g'(y)}$$

Επομένως αφού θέλουμε $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \tilde{N}(t,y) = t^2 y$, θα έχουμε

$$\cancel{t^2 y} + g'(y) = \cancel{t^2 y}$$

οπότε $g'(y) = 0$ π.χ. $g(y) = 0$

Συμπέρασμα: $f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2$ Οι λύσεις $y(t)$ της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις $\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2 = c$ με $c \in \mathbb{R}$

Επαλήθευση:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2\right) = 0 \Leftrightarrow t^2 + t[y(t)]^2 + \frac{t^2}{2}\cdot 2[y(t)]\cdot y'(t) = 0$$

$$\underset{t \neq 0}{\Leftrightarrow} t + [y(t)]^2 + t y(t) y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{t \cdot y(t)}$$

## Παράδειγμα

$y'(t) = Ay(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## Γενική λύση

$$y(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{με } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα αρχικών τιμών με $y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Άρα

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad -c_1 e^{2} + c_2 e^{6} - c_3 e^{-4} = 1 \\ &(2)\quad 4c_1 e^{2} + 2c_2 e^{6} + c_3 e^{-4} = 2 \\ &(3)\quad c_1 e^{2} + c_2 e^{6} + c_3 e^{-4} = 3 \end{aligned}\right\}$$

$(1) + (3)$ : $2c_2 e^{6} = 4 \iff c_2 e^{6} = 2. \iff \boxed{c_2 = 2 \cdot e^{-6}}$

Άρα η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση δίνουν:

$(4)\quad -c_1 e^{2} - c_3 e^{-4} = 1 - c_2 e^{6} = -1$

$(5)\quad 4c_1 e^{2} + c_3 e^{-4} = 2 - 2c_2 e^{6} = -2$

Έπεται ότι ... $\boxed{c_1 = -e^{-2}}$ και $\boxed{c_3 = 2e^{4}}$

Παράδειγμα

$y'(t) = Ay(t)\ ,\ t\in\mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2$ (απλή)
$\lambda_2 = 1$ (διπλή)

α) $\lambda_1 = 2$ : $(A-\lambda_1 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A-2I_3)u = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = 1 \end{matrix}$$

(είναι αυθαίρετο, μπορούμε να το βάλουμε ότι θέλουμε εκτός από μηδέν)

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ειδική λύση $\varphi^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

β) $\lambda_2 = 1$

$$(A-\lambda_2 I_3)u = 0 \Leftrightarrow (A-I_3)u = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} u_2 = u_3 = 0 \\ u_1 = 1 \end{matrix}$$

(αυθαίρετο)

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Γεωμετρική πολλαπλότητα $= 1$.

 Ειδική λύση $\varphi^{(2)}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ζητάμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα: $(A-\lambda_2 I_3)^2 u = 0$

και $(A-\lambda_2 I_3)u \neq 0$

$$(A-\lambda_2 I_3)^2 = (A - I_3)^2 = \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$u_3 = 0$

$u_1$ και $u_2$ αυθαίρετα.

π.χ. $\boxed{u_1 = 0 \text{ και } u_2 = 1}$ $\quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi^{(3)}(t) = e^t\left[u + t(A-I_3)u\right] =$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Γενική λύση : $y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t)$

$$= c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \\ c_1 e^{2t} \end{pmatrix}$$ με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Μέχρι εδώ για την 1η πρόοδο.