14/10/24

ΣΔΕ ειδικής μορφής

1. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

2. Εξισώσεις τύπου Bernoulli

(*) $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma} \qquad a \leq t \leq b$

$\sigma \in \mathbb{R},\ \sigma \neq 0,\ \sigma \neq 1$

Παρατηρήσεις:

- Για $\sigma = 0$ ή $\sigma = 1$ η Δ.Ε είναι γραμμική
- Για $\sigma > 0$, η $y(t) = 0$ $\forall t \in [a,b]$ είναι λύση

Θέτουμε $\boxed{v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}}$

Τότε $v'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma} y'(t)$

οπότε η (*) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{1}{[y(t)]^{\sigma}} v'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma} \xRightarrow{\text{διαιρώ } [y(t)]^{\sigma}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} v'(t) = p(t) \underbrace{\underbrace{\frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}}}_{[y(t)]^{1-\sigma}}}_{v(t)} + q(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} v'(t) = p(t)v(t) + q(t)$$

$$\xRightarrow{\text{επί } (1-\sigma)} v'(t) = (1-\sigma)p(t)v(t) + (1-\sigma)q(t)$$

Αυτή η ΔΕ είναι γραμμική ως προς τη συνάρτηση v. Μπορούμε να τη λύσουμε. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην $v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ βρίσκουμε την τη ζητούμενη λύση $y(t)$

Προσοχή: Για την y που θα βρούμε πρέπει να ορίζονται οι συναρτήσεις $[y(t)]^{1-\sigma}$ και $[y(t)]^{\sigma}$

• Παράδειγμα

$$y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \quad , \quad a \le t \le b$$

είναι bernoulli

• $(\sigma = 2)$ • $y=0$ είναι λύση

Θέτω $v(t) := [y(t)]^{1-\sigma} = [y(t)]^{1-2} = [y(t)]^{-1} = \dfrac{1}{y(t)}$

$\boxed{\text{Απαίτηση: } y(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]}$

Έχουμε: $v'(t) = -\dfrac{1}{[y(t)]^2} \cdot y'(t)$

άρα η αρχική Δ.Ε γράφεται στη μορφή

$$-[y(t)]^2 v'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \quad \overset{\text{διαιρώ } [y(t)]^2}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow -v'(t) = -\underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{v(t)} + 1$$

$$\Rightarrow v'(t) - v(t) = -1$$

$$\overset{\text{επί } e^{-t}}{\Rightarrow} e^{-t}v'(t) - e^{-t}v(t) = e^{-t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{-t}v(t)\right)' = +e^{-t}$$

$$\overset{\text{ολοκληρώνω}}{\Rightarrow} e^{-t}v(t) = e^{-t} + c$$

$$\overset{\text{πολ/ζω } e^{t}}{\Rightarrow} \boxed{v(t) = c \cdot e^{t} + 1}$$

Επομένως

$$y(t) = \frac{1}{ce^{t}+1} \quad , \quad a \le t \le b$$

★ Μένει να ελέγξω την απαίτηση

Για να έχει νόημα αυτή η λύση πρέπει

$$ce^{t} + 1 \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$

(είναι μονότονη αν αύξουσα → θετική
φθίνουσα → αρνητική)

Άρα η $ce^{t}+1$ είναι μονότονη, είναι διάφορη του μηδενός στο $[a,b]$ αν και μόνο αν παίρνει στα άκρα a και b είτε θετικές, είτε αρνητικές τιμές (ταυτόχρονα).

3. Εξισώσεις του Riccati

$$(+)\quad y'(t) = r(t) + p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^2 \quad , \quad a \le t \le b$$

Υπόθεση: Έστω y_ε μια λύση της $(+)$.

y_ε είναι μια ειδική λύση.

Θέτουμε: $(1)\ y(t) = y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)} \quad , \quad a \le t \le b$

(ψάχνω την $z(t)$ να βρω)

Τότε:

$$(2)\ y'(t) = y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t)$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (1) και (2) στην $(+)$, και παίρνουμε

$$y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = r(t) + p(t)\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t)\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right]^2 \Rightarrow$$

Άρα:

$$\Rightarrow \overbrace{\left\{y_\varepsilon'(t) - r(t) - p(t)y_\varepsilon(t) - q(t)[y_\varepsilon(t)]^2\right\}}^{=0 \text{ αφού } y_\varepsilon \text{ είναι λύση της } (+)}$$

υπόθεση το ξέρω

$$-\frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \frac{p(t)}{z(t)} + q(t)\,2y_\varepsilon(t)\frac{1}{z(t)} + \frac{q(t)}{[z(t)]^2} \Rightarrow$$

αλλάζω πρόσημα πολ/ζω $[z(t)]^2$

$$\Rightarrow z'(t) = \underbrace{-p(t)z(t) - q(t)\,2y_\varepsilon(t)z(t)}_{-[p(t)+2q(t)y_\varepsilon(t)]z(t)} - q(t) \Rightarrow$$

Αυτή είναι γραμμική ΔΕ z ....

ξέρω να λύνω τη γραμμική και πρέπει $z(t) \neq 0$.

25

Παράδειγμα

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2$$

$\boxed{y_\varepsilon(t) = \frac{1}{t}}$ ειδική λύση

Θέτω:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}}$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική Δ.Ε παίρνουμε:

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right) - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-\frac{1}{t^2}} - \frac{z'(t)}{[z(t)]^2} = \cancel{\frac{1}{t^2}} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t z(t)} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{2}{t z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{z'(t)}{[z(t)]^2} = -\frac{3}{t z(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}$$

$$\overset{\pi/\zeta\omega\ [z(t)]^2}{\Leftrightarrow} \boxed{z'(t) = \frac{3}{t} z(t) + 1}$$

Γραμμική Δ.Ε ως προς z

π/ζω $e^{q(t)}$:

$$e^{q(t)} z'(t) - \frac{3}{t} e^{q(t)} \cdot z(t) = e^{q(t)} \Rightarrow$$

Επιλέγουμε μια q έτσι ώστε

$$q'(t) = -\frac{3}{t} \Rightarrow \boxed{q(t) = -3\log t}$$ και έχουμε

$$\left(e^{q(t)} z'(t)\right)' = e^{q(t)}$$

Αλλα: $e^{q(t)} = e^{-3\log t} = e^{-\log t^3} = e^{\log \frac{1}{t^3}} = \frac{1}{t^3}$

Τότε: $\left(\frac{1}{t^3} z(t)\right)' = \frac{1}{t^3}$

Άρα: $\frac{1}{t^3} z(t) = \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + C$

$$\overset{\pi/\zeta\omega\ t^3}{\Rightarrow} z(t) = ct^3 - \frac{t}{2}, \quad a \le t \le b$$

Επομένως η γενική λύση είναι:

$$y(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t\left(ct^2-\frac{1}{2}\right)} \qquad \forall\, t\in[1,2]$$

Για να είναι αυτό λύση πρέπει και αρκεί η συνάρτηση

$$\varphi(t)=ct^2-\frac{1}{2}$$

να μην μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$

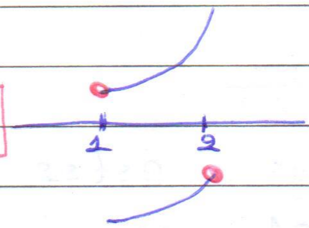
• Η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ (αρκεί να παίρνει ομόσημες τιμές στα άκρα)

1η περίπτωση: $\boxed{c\leq 0}$

Τότε η φ παίρνει στο $[1,2]$ αρνητικές τιμές (αποδεκτό)

2η περίπτωση: $\boxed{c>0}$

Τότε η φ είναι αύξουσα

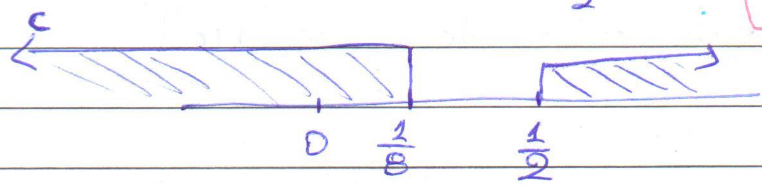


α) $\boxed{\varphi(1)>0}$ τότε $\varphi(1)>0 \Leftrightarrow c-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \boxed{c>\frac{1}{2}}$

$(\varphi(2)>0)$

β) $\boxed{\varphi(2)<0}$ (οπότε και $\varphi(1)<0$)

τότε $\varphi(2)<0 \Leftrightarrow 4c-\frac{1}{2}<0 \Leftrightarrow \boxed{c<\frac{1}{8}}$



Συμπέρασμα $c<\frac{1}{8}$ ή $c>\frac{1}{2}$

---

4. Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές.

$$y'(t)=\frac{g(t)}{f(y(t))}$$

Έστω I ένα διάστημα. Γράφουμε τη Δ.Ε στη μορφή

$$f(y(t))\,y'(t)=g(t)$$

Έστω $\alpha\in I$. Τότε ολοκληρώνοντας από α έως t, έχουμε

$$\int_\alpha^t f(y(s))\,y'(s)\,ds=\int_\alpha^t g(s)\,ds$$

Αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $z=y(s)$ και παίρνουμε

$$\int_{y(\alpha)}^{y(t)} f(z)\,dz=\int_\alpha^t g(s)\,ds \qquad \text{όπου } dz=y'(s)\,ds$$

Έστω F και G παράγουσες των f και g
(δηλαδή $F' = f$ και $G' = g$)

Τότε

$$F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(a)$$

$$\Rightarrow F(y(t)) = G(t) + \underbrace{F(y(a)) - G(a)}_{= c} \text{ είναι τιμές σε ένα σημείο } a.$$

$$\Rightarrow \boxed{F(y(t)) = G(t) + c}$$

• Αυτή η σχέση μας δίνει τις λύσεις σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή. Αν μπορούμε να την επιλύσουμε ως προς $y(t)$, τότε βρίσκουμε τη λύση σε άμεση μορφή.

—

16/10/24

Άσκηση 14

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Να εφαρμόσουμε το θεώρημα 1.2 (τοπική συνθήκη Lipschitz)
Παίρνουμε $c > 0$ θα το εφαρμόσουμε στο διάστημα $[1-c, 1+c]$

Λύση

$f(t,y) = y^2$

$$A = \max_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 1-c \le y \le 1+c}} f(t,y) = (1+c)^2$$

(από το 2 άκρο την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή)

$$[0, b'] \text{ με } b' = \min\left(2, \frac{c}{A}\right) = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right) \overset{\frac{c}{(1+c)^2} < 2}{=} \frac{c}{(1+c)^2} =$$

$$= \frac{c}{1 + 2c + c^2} \overset{\div c}{=} \frac{1}{2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)}$$

Θέλω αυτό να το μεγιστοποιήσω.
Το κλάσμα παίρνει τη μέγιστη τιμή του όταν το $c + \frac{1}{c}$ πάρει την ελάχιστη τιμή του.

Ισχυρισμός $c + \frac{1}{c} \ge 2$ (για $c = 1$ ισχύει ως ισότητα)

$$\Rightarrow c + \frac{1}{c} - 2 \ge 0$$

$$\Rightarrow (c-1)^2 \ge 0 \text{ ισχύει}$$

Άρα: την μέγιστη τιμή του b' είναι: $b' = \frac{1}{4}$ (για $c = 1$)

Υπαρξη και μοναδικότητα $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

Άσκηση 18

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής

$\|\cdot\|$ νόρμα Ευκλείδεια.

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ $(*)$ $\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$

Θεωρούμε 2 προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & \alpha \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Cauchy-Schwartz (CS) $|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & \alpha \leq t \leq b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

(Ίσως προκύπτει από την ισοδυναμία των νορμών)

Ν.Δ.Ο $\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-\alpha)} \|y_0 - z_0\|$

Λύση

Αφαιρώ κατά μέλη:

$$y'(t) - z'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \Rightarrow$$

εσωτ. γινόμενο $\Rightarrow$ $\underbrace{(y'(t) - z'(t), y(t) - z(t))}_{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))} = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \underbrace{y(t) - z(t)}_{\varepsilon(t)})$

όπου $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$

$$\Rightarrow (\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t))$$

(το έχω δείξει) $\rightarrow$ $\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)'$ $\overset{CS}{\leq} \|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\| \cdot \|\varepsilon(t)\|$

$\overset{(*)}{\leq} L \underbrace{\|y(t) - z(t)\|}_{\varepsilon(t)} \|\varepsilon(t)\| \leq L\|\varepsilon(t)^2\|$

Άρα

$$\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq L \underbrace{\|\varepsilon(t)\|^2}_{\varphi(t)} \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) - 2L\varphi(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow (e^{-2Lt}\varphi(t))' \leq 0 \quad \text{είναι φθίνουσα.}$$

$$\Rightarrow e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\varphi(a)$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \leq e^{2L(t-a)}\|\varepsilon(a)\|^2 \rightarrow \|y(a) - z(a)\| = \|y_0 - z_0\|$$

διώχνω τετράγωνα $\Rightarrow$ $\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-a)}\|y_0 - z_0\|$

$$\left(\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} \|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(b-a)}\|y_0 - z_0\| \right)$$

Αν δεν έχω Ε. νόρμα αλλά κάποια άλλη πάλι ισχύει αλλά θέλει κάποια σταθερά.

Άσκηση 1.9

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

αν $v=0$ έχουμε την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και

$\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ \ [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \le v(y_1 - y_2)^2$

Ν.Δ.Ο. :

$$|y(t) - z(t)| \le e^{v(t-a)} |y_0 - z_0|$$

Λύση

$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$

Τότε

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\varepsilon'(t)\varepsilon(t)}_{\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)'} = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot \overbrace{[y(t) - z(t)]}^{\varepsilon(t)}}_{\le v[y(t)-z(t)]^2}$$

$$v\underbrace{[y(t)-z(t)]^2}_{(\varepsilon(t))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le v(\varepsilon(t))^2$$

(άσκ 1.8)

$\Rightarrow \ldots$

$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \le e^{2v(t-a)} (\varepsilon(a))^2$

ρίζα τετράγωνο $\Rightarrow |\varepsilon(t)| \le e^{v(t-a)} |\varepsilon(a)|$

$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \le e^{v(t-a)} |y_0 - z_0|$

Άσκηση 1.22 (Ανισότητα του Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή)

$\varphi: [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $a, b \in \mathbb{R}$ με $b \ge 0$

Αν ισχύει ότι $\varphi(t) \le a + b \cdot \int_0^t \varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]$

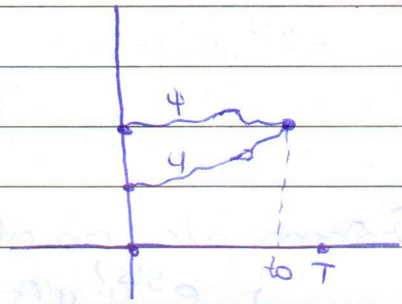
Ν.Δ.Ο :

$$\varphi(t) \le a \cdot e^{bt} \quad \text{όπου} \quad \forall t \in [0,T]$$

Υπόδειξη

$\psi(t) = (a+\varepsilon)e^{bt} \quad \forall t \in [0,T] \quad$ με $\varepsilon > 0$

Τότε: (*) $\psi(t) = a+\varepsilon + b\int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t\in[0,T]$



Λύση

Υποθέτουμε προς το παρόν ότι ισχύει η (*)

Ισχυρισμός: $\forall t\in[0,T] \quad \varphi(t) \le \psi(t)$

Απόδειξη ισχυρισμού:

Για $t=0$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(0) \le a \\ \psi(0) = a+\varepsilon\end{array}\right\} \varphi(0) \le \psi(0)$$

Έστω t_0 ο μικρότερος θετικός αριθμός τ.ω.

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0) \text{ και}$$

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t\in[0,t_0)$$

Τότε θα έχουμε:

$$\varphi(t_0) \le a + b\cdot\int^{t_0} \varphi(s)ds$$

$$\le a + b\int_0^{t_0} \psi(s)ds$$

$$\le a+\varepsilon + b\int_0^{t_0} \psi(s)ds \Big\} = \psi(t_0)$$

Άρα τέτοιο t_0 δεν υπάρχει συνεπώς ισχύει

$$\varphi(t) \le \psi(t) \quad \forall t\in[0,T]$$

Έχω ότι:

$$\varphi(t) < \psi(t) \Rightarrow$$

$$\varphi(t) < (a+\varepsilon)e^{bt} \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \le a e^{bt} \quad \forall t\in[0,T]$$

$a \le b+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$

$\Rightarrow a \le b$

Απόδειξη της (*)

$$a+\varepsilon+b\int_0^t \psi(s)ds = a+\varepsilon+b(a+\varepsilon)\int_0^t e^{bs} ds$$

$$= a+\varepsilon + (a+\varepsilon)\int^t e^{bs}\, b\, ds$$

$$= \cancel{a+\varepsilon} + (a+\varepsilon)\cdot\{e^{bt} - \underbrace{\cancel{1}}_{e^0})$$

$$= a+b\cdot e^{bt} = \psi(t)$$

4) Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Παράδειγμα:

$$e^{y(t)}\, y'(t) = t + t^3$$

$$\left(\Leftrightarrow y'(t) = \frac{t+t^3}{e^{y(t)}} \right)$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\int_{a}^{t} e^{y(s)}\, y'(s)\, ds = \int_{a}^{t} (s + s^3)\, ds$$

Με $z = y(s)$ έχουμε:

$$\int_{y(a)}^{y(t)} e^{z}\, dz = \int_{a}^{t} (s+s^3)\, ds$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} - e^{y(a)} = \frac{s^2}{2}\Big|_{s=a}^{s=t} + \frac{s^4}{4}\Big|_{s=a}^{s=t}$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \underbrace{\left[e^{y(a)} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right]}_{c}$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow y(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c \right)$$ υπό την προϋπόθεση ότι ο log ορίζεται και ορίζεται για θετικά.

5. Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Οι ΔΕ της μορφής

$$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t} \right)$$

λέγονται ομογενείς

Παρατηρήσεις

1. Ομογενής γραμμική ΔΕ $y'(t)=p(t)y(t)$

2. $f(t,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού ν, αν ισχύει ότι
$\forall \lambda, t, y \in \mathbb{R}$ $\quad f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^{\nu} f(t,y)$

3. Έστω M και N δύο ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ν.
Ισχυρισμός: Η συνάρτηση

$$f(t,y)=\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$$

είναι ομογενής βαθμού μηδέν

Έστω f ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού. Τότε:

$$f(t,y) = f\Big(\underset{\lambda}{t}\cdot 1,\ \underset{\lambda}{t}\cdot \frac{y}{t}\Big)$$

$$= \underset{=1}{t^0}\, \underbrace{f\Big(1, \frac{y}{t}\Big)}_{=g\left(\frac{y}{t}\right)}$$

Θέλω να λύσω την: $y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$

Θέτω

$(*)\quad v(t) = \frac{y(t)}{t}$

Τότε

$$y(t) = t v(t)$$

$$\overset{\text{παραγωγ.}}{\Rightarrow} y'(t) = t v'(t) + v(t)$$

Επομένως η $(*)$ γράφεται στη μορφή:

$$t v'(t) + v(t) = g(v(t))$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \boxed{t v'(t) = g(v(t)) - v(t)}$$ ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

33

1η περίπτωση: Έστω $v^* \in \mathbb{R}$ τ.ω $g(v^*) = v^*$ δηλαδή v^* είναι σταθερό σημείο της g. Η συνάρτηση $v(t) = v^*$ είναι λύση της (**). Οι συναρτήσεις:

$$y(t) = v^* t$$

είναι λύσεις της αρχικής Δ.Ε και λέγονται ιδιάζουσες λύσεις.

2η περίπτωση: $g(v(t)) \neq v(t)$ Τότε:

$$\frac{v'(t)}{g(v(t)) - v(t)} = \frac{1}{t} \quad (\text{εξ. με χωριζ. μεταβλητές})$$

Σταθεροποιούμε ένα $a \in \mathbb{R}$ και ολοκληρώνουμε από a μέχρι t, οπότε παίρνουμε:

$$\int_a^t \frac{v(s)}{g(v(s)) - v(s)} \, ds = \int_a^t \frac{1}{s} \, ds$$

Για να υπάρχει αυτό πρέπει a, t ομόσημα (μακριά από το 0)

Με $\tau = v(s)$ έχουμε:

$$\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{g(\tau) - \tau} \, d\tau = \log|t| - \log|a|$$

Έστω G μια παράγουσα της $\frac{1}{g(\tau) - \tau}$

Τότε:

$$G(v(t)) - G(v(a)) = \log|t| - \log|a|$$

ή

$$G(v(t)) = \log|t| + \underbrace{G(v(a)) - \log|a|}_{c}$$

- Αυτή η σχέση μας δίνει την $v(t)$ σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να τη λύσουμε βρίσκουμε την $v(t)$, και τότε οι λύσεις της αρχικής Δ.Ε είναι:

$$\boxed{y(t) = t \cdot v(t)}$$

21/10/14

5 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

$$y'(t) = g\Big(\underbrace{\frac{y(t)}{t}}_{u(t)}\Big)$$

• **Παράδειγμα**

$$y'(t) = \frac{[y(t)]^2 + 2ty(t)}{t^2}$$

Τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής στο δεξί μέλος είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 2.
Επομένως, η δοθείσα Δ.Ε είναι ομογενής. Θέτουμε $v(t) := \frac{y(t)}{t}$ και έχουμε:

$$y(t) = t\cdot v(t) \overset{\text{παραγωγος}}{\Longrightarrow}$$
$$y'(t) = v(t) + tv'(t)$$

Άρα έχω

$$v(t) + tv'(t) = \underbrace{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2}_{v(t)^2} + 2\underbrace{\frac{y(t)}{t}}_{v(t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) + tv'(t) = [v(t)]^2 + v(t)} \quad (*)$$

Ιδιάζουσες λύσεις: $v^2 + v = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ή $v = -1$

- $y(t) = 0$
- $y(t) \overset{(-1)}{=} -t$

Έστω τώρα ότι $v(t) \neq 0$ και $v(t) \neq -1$, (τώρα θα βρω τις μη ιδιάζουσες λύσεις)
Τότε η (*) γράφεται στη μορφή:

$$\frac{v'(s)}{v(s)\cdot[v(s)+1]} = \frac{1}{s} \quad s \neq 0 \quad \text{(εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών)}$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο α και ολοκληρώνουμε από το α μέχρι το t οπότε παίρνουμε:

$$\int_a^t \frac{v'(s)}{v(s)[v(s)+1]}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

ή με $\tau = v(s)$

$$\int_{v(a)}^{v(s)} \frac{1}{\tau(\tau+1)}\,d\tau = \log|t| - \log|a|.$$

→

Τώρα $\frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1}$, οπότε

$$\underbrace{\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau}\,d\tau}_{\log|v(t)| - \log|v(a)|} - \underbrace{\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau}_{\log|v(t)+1| - \log|v(a)+1|} = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log|v(t)| - \log|v(t)+1| = \log|t| + \underbrace{[\log|v(a)| - \log|v(a)+1| - \log|a|]}_{\log|c|}$$

(επειδή έχω παντού log)

$$\Rightarrow \log\left|\frac{v(t)}{v(t)+1}\right| = \log|c\cdot t|$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{v(t)+1} = c\cdot t$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{c\cdot t}{1-ct} \quad \text{(κάνει άλλες πράξεις)}$$

αντικατάσταση

$$\Rightarrow y(t) = \frac{ct^2}{1-ct} \qquad c\neq 0 \text{ και } t\neq \frac{1}{c}$$

6. Πλήρεις (ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις

(1) $y'(t) = \dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$

Η (1) λέγεται πλήρης, αν υπάρχει συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(t,y)$

Υπόθεση Η (1) είναι πλήρης και ξέρουμε μια f που ικανοποιεί την (2)

Ισχυρισμός Οι λύσεις $y(t)$ δίνονται από τη σχέση

$f(t,y(t)) = c$, $c\in\mathbb{R}$ (αρκεί η παράγωγος της ως προς $t = 0$)

Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{d}{dt} f(t,y(t)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))}_{M(t,y(t))} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))}_{N(t,y(t))} \cdot y'(t)$$

$$= M(t,y(t)) + N(t,y(t)) \cdot y'(t) \underset{(1)}{=} 0$$

• Ερώτημα: Πως ελέγχουμε αν η (1) είναι πλήρης, και στην περίπτωση που είναι πλήρης πως προσδιορίζουμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (2)?

• Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις M και N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες η (1) είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$(3) \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}}$$

• Έστω ότι η (1) είναι πλήρης. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση f που να ικανοποιεί την (2). Άρα:

$$\left.\begin{aligned} M(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) &\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t,y) \\ N(t,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) &\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t,y) \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Όμως η f είναι λεία είναι ίσα γι' αυτό και το ζητούμενο

• Αντίστροφα: Αν οι M και N ικανοποιούν την (3), θα αποδείξουμε ότι η (1) είναι πλήρης, βρίσκοντας μάλιστα μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (2)

Αναζητούμε f της μορφής

$$(4) \quad f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y)$$

με άγνωστη τη συνάρτηση g

Για τις f της μορφής (4) έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y),$$

δηλαδή ικανοποιούν την πρώτη σχέση της (2)

Παραγωγίζοντας την (4) ως προς y, παίρνουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \int M_y(t,y)\,dt + g'(y)$$

αφού θέλουμε $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ - η δεύτερη σχέση της (2), θα έχουμε

$$N(t,y)=\int M_y(t,y)\,dt+g'(y)$$
$$\overset{"}{N_t}$$

$$\Rightarrow g'(y)=\underbrace{N(t,y)-\int N_t(t,y)\,dt}_{\text{ανεξαρτητο το } y \text{ λαο!}}$$

Άρα:

$$g(y)=\int\left[N(t,y)-\int N_t(t,y)\,dt\right]dy+\underset{\uparrow \text{ σταθερα}}{C}$$

Άρα η ζητούμενη f (που ικανοποιεί την (2)) είναι:

$$f(t,y)=\int M(t,y)\,dt+\underbrace{\int\left[N(t,y)-\int N_t(t,y)\,dt\right]dy+C}_{g(y)}$$

- Παράδειγμα: Θεωρούμε την εξής εξίσωση:

$$y'(t)=\frac{e^{y(t)}}{te^{y(t)}+2y(t)}$$

- Άρα:

$$M(t,y)=e^y \quad , N(t,y)=te^y+2y$$

- Έχουμε:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^y \quad , \frac{\partial N}{\partial t}=e^y \quad , \text{οπότε } \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t} \quad \text{άρα η ΔΕ είναι πλήρης}$$

Ζητείται μια συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=e^y \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=te^y+2y}$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=e^y \Rightarrow f(t,y)=te^y+g(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=te^y+g'(y)}$$

Από τις δύο σχέσεις $\boxed{}$ έπεται ότι

$$\cancel{te^y}+g'(y)=\cancel{te^y}+2y$$
$$\Rightarrow g'(y)=2y$$

$$\Rightarrow g(y)=y^2+c$$

→

- Άρα $f(t,y) = te^{y} + y^2 + c$
- Επομένως, οι λύσεις $y(t)$ δίνονται από την σχέση

$$f(t, y(t)) = C_1$$

ή

$$te^{y(t)} + [y(t)]^2 + C = C'$$

με C μια σταθερά.

• Διαφορικές Εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις.

Ζητούμενο: Έστω ότι η Δ.Ε. $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ δεν

είναι πλήρης. Υπάρχει συνάρτηση $\mu(t,y)$ τ.ώ η Δ.Ε.

(6) $$y'(t) = -\frac{M(t,y(t)) \cdot \mu(t,y)}{N(t,y(t)) \cdot \mu(t,y)}$$

να είναι πλήρης?

Κάθε τέτοια συνάρτηση μ λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας, αν υπάρχει.

Η (6) είναι πλήρης, αν και μόνο αν

$$\frac{\theta(\mu M)}{\theta y}(t,y) = \frac{\theta(\mu N)}{\theta t}(t,y)$$

ή

$$\frac{\theta(\mu)}{\theta y} M + \frac{\theta M}{\theta y} \cdot \mu = \frac{\theta(\mu)}{\theta t} \cdot N + \frac{\theta(N)}{\theta t} \mu$$

$$\Rightarrow N\frac{\theta\mu}{\theta t} - M\frac{\theta\mu}{\theta y} = \mu\left(\frac{\theta M}{\theta y} - \frac{\theta N}{\theta t}\right)$$

$$\overset{\text{διαιρώ με } \mu}{\Longrightarrow} \frac{1}{\mu}\left[N\frac{\theta\mu}{\theta t} - M\frac{\theta\mu}{\theta y}\right] = \frac{\theta M}{\theta y} - \frac{\theta N}{\theta t} \quad (7)$$

Η επίλυση της (7) είναι πιο δύσκολο πρόβλημα από την επίλυση της αρχικής Δ.Ε! (ψάχνουμε να βρούμε ειδικές περιπτώσεις)

Ειδικές περιπτώσεις: Πότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t)$ ή $\mu=\mu(y)$;

1η Περίπτωση: $\mu=\mu(t)$

Τότε η (7) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{\mu(t)} N \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

ή

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

• Τέτοιος ολοκληρωτικός παράγοντας υπάρχει αν και μόνο αν η

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ είναι συνάρτηση μόνο του t.

Τότε έχουμε

$$\mu'(t) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \mu(t)$$

είναι γραμμική και διαχωρίσιμη $\Rightarrow$ $\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}$

2η περίπτωση: $\mu=\mu(y)$

Τότε η (7) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{d\mu(y)}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$$

Τέτοιο μ υπάρχει αν και μόνο αν η $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$

είναι συνάρτηση μόνο του y. Όπως προηγουμένως βρίσκουμε

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} dy}$$

23/10/14

Ασκήσεις (από τις σημειώσεις στην ιστοσελίδα)

> Άσκηση 1.3

$$(+)\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, & 1 \le t \le 2, \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

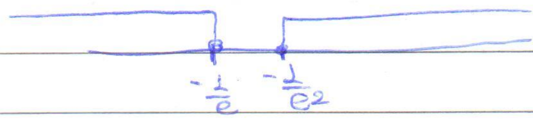
Λύση

α) Η ΔΕ είναι εξίσωση Bernoulli και έχει λύσεις:

$y(t) = 0$ και (Παράδειγμα 1.3)

⊛ $y(t) = \dfrac{1}{ce^t+1}$ με μια $c \in \mathbb{R}$

α) Οι συναρτήσεις ⊛ αποτελούν λύσεις της ΔΕ στο $[1,2]$ αν και μόνο αν είτε $\boxed{c < -\frac{1}{e}}$ είτε $\boxed{c > -\frac{1}{e^2}}$



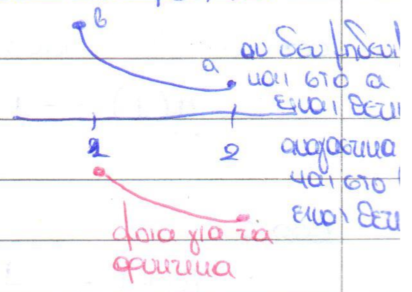
(δεν συμπεριλαμβάνεται το άκρο)

Απόδειξη: Θεωρούμε:

$$\varphi(t) = ce^t + 1, \quad t \in [1,2]$$

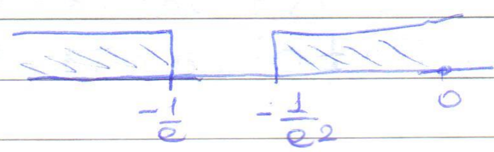
Τότε οι ⊛ είναι λύσεις, αν και μόνο αν $\varphi(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [1,2]$

- $1^η$ περίπτωση $c \ge 0$. Τότε η φ είναι θετική (και αύξουσα), οπότε η ⊛ μας δίνει λύσεις.
- $2^η$ περίπτωση $c < 0$. Τότε η φ είναι φθίνουσα. Άρα η φ δεν μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$, αν και μόνο αν είτε $\varphi(2) > 0$ είτε $\varphi(1) < 0$



$$\varphi(2) > 0 \iff ce^2 + 1 > 0$$
$$\iff c > -\frac{1}{e^2}$$

$$\varphi(1) < 0 \iff ce^1 + 1 < 0$$
$$\iff c < -\frac{1}{e}$$



αυτές είναι οι 2 περιπτώσεις

β) Για $y_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$, το πρόβλημα (+) δεν λύνει. Ακριβέστερα,

$y(t) \to \infty$ για $t \nearrow \frac{3}{2}$ (το t αυξάνει προς το $\frac{3}{2}$)

Απόδειξη

Προφανώς η $y(t)=0$ δεν είναι λύση, γιατί δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.
Η $y(t)$ που δίνεται στην ⊛ ικανοποιεί την αρχική τιμή, αν:

$$y(1) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow$$

$$ce\sqrt{e} + \sqrt{e} = \sqrt{e} - 1 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

Επομένως,

$$y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e\sqrt{e}}e^t}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{1 - e^{t-\frac{3}{2}}}_{\to \infty \text{ καθώς } t \nearrow \frac{3}{2}}}$$

(αν $t < \frac{3}{2}$ παίρνει αρνητικές τιμές, αν πλησιάζει το $\frac{3}{2}$ φτάνει στο 1)

γ) Ποια είναι η λύση για αρχική τιμή $y_0 = -1$.

Απόδειξη

Προφανώς η $y(t)=0$ δεν είναι λύση, γιατί δεν ικανοποιεί την την αρχική τιμή. Η $y(t)$ που δίνεται στην ⊛ ικανοποιεί την αρχική τιμή, αν:

$$y(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1} = -1 \Leftrightarrow ce+1 = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{e}$$

Άρα:

$$y(t) = \frac{1}{1 - \frac{2}{e}e^t} = \frac{1}{1 - 2e^{t-1}}$$

$$e^{t-1} \geq 1 \Leftrightarrow -2e^{t-1} \leq -2 \Leftrightarrow 1 - 2e^{t-1} \leq -1$$

$$\boxed{1 - 2e^{t-1} \neq 0} \text{ για } t \in [1, 2].$$

Ασκηση 1.4

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί το μεγαλύτερο δυνατό διάστημα I ($I \subseteq \mathbb{R}$) στο οποίο το πρόβλημα έχει λύση.

Λύση

• Έχουμε: Δ.Ε Bernoulli με $\sigma = 2$. Η $y(t) = 0$ είναι λύση της Δ.Ε αλλά δεν ικανοποιεί την αρχική τιμή.

Θέτουμε: $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma} = \dfrac{1}{y(t)}$

Έχουμε: $u'(t) = -\dfrac{1}{[y(t)]^2}\, y'(t)$

οπότε

$$[y(t)]^2 u'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \overset{\text{διαιρώ } [y(t)]^2}{\iff}$$

$$\Rightarrow u'(t) = \underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{u(t)} - 1 \iff$$

$\Rightarrow u'(t) = u(t) - 1$ είναι γραμμική Δ.Ε

$\iff (e^t u(t))' = e^t$ $\iff$ πολλαπλασιάζω το e^t και ξεχνώ τον παράγοντα

$e^t u(t) = e^t + c \iff$

$u(t) = 1 + ce^t$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{1 + ce^{-t}}$$

Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη:

$$y(0) = 2 \iff \frac{1}{1+c} = 2 \iff c = -\frac{1}{2}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι

$$(**) \quad y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

Τώρα

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{t}} = 0 \iff e^{-t} = 2 \iff \log e^{-t} = \log 2 \iff -t = \log 2$$

$$\iff \boxed{t = -\log 2}$$

→

Επομένως, η $y(t)$ της (**) είναι λύση της Δ.Ε στα διαστήματα $(-\infty, -\log 2)$ και $(-\log 2, \infty)$.
Επειδή θέλουμε το 0 να ανήκει στο διάστημα που η y είναι λύση της Δ.Ε συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο διάστημα I είναι

$$I = (-\log 2, \infty)$$

/Θεωρία/

Δ.Ε που ανάγονται σε πλήρεις (ακριβείς)

$$y'(t) = \frac{M(t, y(t))}{N(t, y(t))}$$

α) $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \rightsquigarrow$ Η Δ.Ε είναι πλήρης

β) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ ανεξάρτητο του $y \rightsquigarrow$

υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$

(*) $\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} dt}$

γ) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ ανεξάρτητο του $t \rightsquigarrow$ υπάρχει ολοκληρωτικός

παράγοντας $\mu = \mu(y)$,

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} dy}$$

• Παράδειγμα:

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{t^2 y(t) - t}$$

$M(t, y) = y$

$N(t, y) = t^2 y - t$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= 2ty - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \text{η Δ.Ε δεν είναι πλήρης.}$$

(Άρα θα ψάξω για ολοκληρωτικό παράγοντα)

- $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}{M} = \dfrac{2-2ty}{y} = \dfrac{2}{y} - 2t$ → όχι ανεξάρτητο του t

Άρα δεν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(y)$.

- $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}{N} = \dfrac{2-2ty}{t^2y - t} = \dfrac{2(1-ty)}{t(ty-1)} = -\dfrac{2}{t}$ ανεξάρτητο του y

Άρα υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$

Σύμφωνα με την (*):

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{2}{t}dt} = e^{-2\int \frac{1}{t}dt} = e^{\log\frac{1}{|t|^2}} = \frac{1}{t^2}$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή στο δεξιό μέλος με $1/t^2$ και η αρχική ΔΕ γράφεται στην μορφή:

$$y'(t) = \frac{\frac{y(t)}{t^2}}{y(t) - \frac{1}{t}} \quad \text{(αυτή τώρα είναι πλήρης)}$$

Ζητείται $f(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = y - \frac{1}{t}} \ (1)$$

Έχουμε (παίρνω τη 1η σχέση και ολοκληρώνω ως προς t)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2} \Rightarrow f(t,y) = \int \frac{y}{t^2}dt + g(y) = -\frac{y}{t} + g(y)$$

Παραγωγίζοντας ως προς y παίρνω:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1}{t} + g'(y)$$

Συνδυάζοντας με την (1) έχουμε

$$y - \cancel{\frac{1}{t}} = \cancel{-\frac{1}{t}} + g'(y) \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$$

Άρα η συνάρτηση f είναι

$$f(t,y) = \frac{y}{t} + \frac{1}{2}y^2 + c$$

Οι λύσεις της ΔΕ δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη

→

Σχέση:

$$-\frac{y(t)}{t} + \frac{[y(t)]^2}{2} + c = 0$$
με $c \in \mathbb{R}$

Γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές

• Γενικό πρόβλημα μας:

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση

$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$(*) \begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

• Το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Αν η αρχική τιμή δίνεται σ' ένα σημείο a, τότε με την αλλαγή μεταβλητής $t = a + s$ το πρόβλημα ανάγεται σε αντίστοιχο της μορφής (*)

(Βαθμωτή περίπτωση)

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Η λύση είναι $y(t) = e^{at} y^{(0)}$

Ερώτηση: Πότε είναι συναρτήσεις της μορφής:

$$y(t) = e^{\lambda t} y^{(0)} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{C}$$

λύσεις του (*);

Απάντηση:

• Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται, για οποιοδήποτε λ.

• $y'(t) = \lambda e^{\lambda t} y^{(0)}$

Άρα: $y'(t) = Ay(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} y^{(0)} = A\left(e^{\lambda t} y^{(0)}\right)$

$\Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} y^{(0)} = e^{\lambda t} A y^{(0)} \Leftrightarrow \boxed{Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}}$

Χ.Π.Τ.Γ υποθέτουμε ότι $y^{(0)} \neq 0$ (διαφορετικά η λύση του ⊛ είναι $y(t)=0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$)

$y^{(0)} \neq 0$

$Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}$

Άρα: το λ είναι ιδιοτιμή του A και το $y^{(0)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

29/10/24

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}, \ y^{(0)} \in \mathbb{C}^n$

• Υποθέτουμε $y^{(0)} \neq 0$

Η λύση $y(t)$ του ⊛ είναι της μορφής:

$$y(t) = e^{\lambda t} y^{(0)}, \ t \in \mathbb{R}$$

με $\lambda \in \mathbb{C}$, αν και μόνο αν

$$Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)},$$

δηλαδή αν το λ είναι ιδιοτιμή του A και το $y^{(0)}$ είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

• Υπόθεση: Το $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του A.

• Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του A και $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή:

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, \ i = 1, \dots, m.$$

• Αν

(⊛⊛) $y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)}$, (γραμμικός συνδυασμός)

με $c_i \in \mathbb{C}, \ i = 1, \dots, m$, τότε η λύση $y(t)$ του ⊛ γράφεται στην μορφή

(+) $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$

Θα αποδείξαμε ότι η $y(t)$ που δίνεται στη (+) ικανοποιεί τόσο την αρχική συνθήκη όσο και το σύστημα ΔΕ στην (+), δηλαδή ότι είναι αυτής λύση.

Αρχική συνθήκη:

$$y(0) \underset{\substack{\uparrow\\ (+) \text{ για } t=0}}{=} c_1 x^{(1)} + \dots + c_m x^{(m)} \underset{\substack{\uparrow\\ (**)}}{=} y(0) \ \checkmark (\text{ικανοποιείται})$$

Σύστημα ΔΕ

$$y'(t) \underset{\substack{\uparrow\\ (+)}}{=} c_1 e^{\lambda_1 t} \lambda_1 x^{(1)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \lambda_m x^{(m)}$$

$$Ay(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{A x^{(1)}}_{\lambda_1 x^{(1)}} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \underbrace{A x^{(m)}}_{\lambda_m x^{(m)}}$$

Συμπέρασμα

$$y'(t) = Ay(t)$$

Υπόθεση: Ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$. (Αυτό σημαίνει αν η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A είναι ίδιες.

Ειδικές περιπτώσεις: 1) Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες απλές, δηλαδή ο A έχει n διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές.

2) Ο A είναι συμμετρικός δηλαδή

$a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$

Θυμάμαι: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και λ^* μια ιδιοτιμή του

- Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ^* λέγεται η πολλαπλότητα του λ^* ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ του A.
- Γεωμετρική πολλαπλότητα της λ^* λέγεται το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς την ιδιοτιμή λ^*

Ισχύει πάντα ότι:

$1 \leq$ γεωμετρικής πολλαπλότητας
$\leq$ αλγεβρικής πολλαπλότητας
$\leq n$

συνέχεια

(Συνέχεια υπόθεσης)

Τότε τα διανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$. Επομένως, η $y^{(0)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x^{(1)}, \dots x^{(n)}$, δηλαδή:

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα n εξισώσεων και n αγνώστων προσδιορίζουμε τα $c_1, \dots, c_n$.

Σύμφωνα με όσα είδαμε προηγουμένως, η λύση $y(t)$ του (*) είναι τότε:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x^{(n)}.$$

(Τελειώσαμε με τη προϋπόθεση ότι έχουμε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα)

Γενική περίπτωση (Δεν υποθέτουμε ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A.)

$$\begin{cases} y'(t) = a y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Λύση

$$y(t) = e^{at} y_0.$$

• Ερώτηση: Γράφεται η λύση $y(t)$ του (*) στην μορφή:

$$y(t) = e^{tA} y(0), \quad t \in \mathbb{R} \quad ?$$

τι σημαίνει αυτό;

▸ Απάντηση:

$a \in \mathbb{C}$

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

• Ορισμός:

Για $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορίζουμε

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

• Ιδιότητες

- $e^0 = I_n$
- $(e^{tA})' = A e^{tA}$
- $e^A e^B = e^{A+B} \iff AB = BA$

Απάντηση: Ναι

Αρχική συνθήκη:

$$y(0) = e^{0A} y^{(0)} = e^{0} y^{(0)} = I_n y^{(0)} = y^{(0)}$$

Σύστημα Δ.Ε.

$$y'(t) = \left(e^{tA} y^{(0)}\right)' = \left(e^{tA}\right)' y^{(0)} = A e^{tA} y^{(0)} = Ay(t) \quad \checkmark$$

Ουσιαστικό ερώτημα

Πως υπολογίζουμε το $e^{tA} y^{(0)}$ (ή το $e^{tA} x$ με $x \in \mathbb{C}$)

• Μη ομογενές σύστημα Δ.Ε.:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Μέθοδος της μεταβολής των σταθερών: Προσπαθούμε να βρω λύσεις της μορφής:

$$y(t) = e^{tA} u(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

με κατάλληλο u.

Αρχική συνθήκη:

$$y(0) = y^{(0)} \Leftrightarrow e^{0A} u(0) = y^{(0)} \Leftrightarrow \boxed{u(0) = y^{(0)}}$$

Επίσης:

$$y'(t) = \left(e^{tA} u(t)\right)' = \left(e^{tA}\right)' u(t) + e^{tA} u'(t)$$

$$= \underbrace{A e^{tA} u(t)}_{y(t)} + e^{tA} u'(t)$$

$$= Ay(t) + e^{tA} u'(t)$$

Συμπέρασμα: Αυτή η y ικανοποιεί το Σ.Δ.Ε. $y'(t) = Ay(t) + f(t)$, αν και μόνο αν

$$\boxed{e^{tA} u'(t) = f(t)}$$

• $e^{sA} u'(s) = f(s) \Longleftrightarrow$

$$u'(s) = e^{-sA} f(s) \overset{\text{ολοκληρώνω}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\int_0^t u'(s)\,ds = \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds \Leftrightarrow$$

$$u(t) - \underbrace{u(0)}_{y^{(0)}} = \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{u(t) = y^{(0)} + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds}$$

Άρα η λύση του αρχικού προβλήματος είναι:

$$y(t) = e^{tA} u(t) = e^{tA} y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds .$$

▸ Η λύση του προβλήματος $\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$ είναι

$$y(t) = e^{(t-a)A} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Έστω $x \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Πως υπολογίζουμε το $e^{tA}x$;
(Διακρίνουμε περιπτώσεις)

- 1η περίπτωση: Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

• Τότε:

$$e^{tA}x = e^{\lambda t I_n} e^{t(A-\lambda I_n)} x$$

$$= e^{\lambda t} I_n e^{t(A-\lambda I_n)} x$$

γιατί είναι ο ταυτοτικός

$$= e^{\lambda t} \boxed{e^{t(A-\lambda I_n)} x}$$

το ερώτημα είναι να βρω αυτό τι είναι.

$$e^{\lambda t I_n} = I_n + \lambda t I_n + \frac{1}{2!}(\lambda t I_n)^2 + \dots$$

$$= I_n + \lambda t I_n + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 I_n + \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots\right)}_{e^{\lambda t}} I_n$$

$$= e^{\lambda t} I_n$$

• Τώρα:

$$e^{t(A-\lambda I_n)} x = I_n \cdot x + \overbrace{t(A-\lambda I_n)x}^{0} + \underbrace{\frac{1}{2!} t^2 (A-\lambda I_n)^2 x + \dots}_{0}$$

$$= 0$$

(διότι $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)x = 0$

• Άρα

$$e^{tA}x = e^{\lambda t} x$$

- 2η Περίπτωση: Το x τέτοιο ώστε $(A-\lambda I_n)^m x = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Τότε: $e^{tA}x = e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I_n)} x$

και $e^{t(A-\lambda I_n)} x = x + t(A-\lambda I_n)x + \frac{1}{2!} t^2 (A-\lambda I_n)^2 x + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{(m-1)} (A-\lambda I_n)^{(m-1)} x$

$$+ \underbrace{\frac{1}{m!} t^m (A-\lambda I_n)^m x}_{0} + \underbrace{\dots}_{0}$$

→

Άρα: $e^{tA}x = e^{\lambda t}\cdot\{x + t(A-\lambda I_n)x + \dots + \frac{1}{(m-1)!}t^{(m-1)}(A-\lambda I_n)^{m-1}x\}$

(αυτό τώρα υπολογίζεται).

• Τα μη μηδενικά διανύσματα $x\in\mathbb{C}^n$ τ.ω

$$(A-\lambda I_n)^m x = 0$$

λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ.

• Για κάθε πίνακα A υπάρχει βάση $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από (ιδιοδιανύσματα) και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.

- Πώς βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα?

▸ **Άσκηση 1.5** — 30/10/2014

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, & 1\le t\le 2, \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε είναι εξίσωση του Riccati.

Η γενική λύση της είναι: (*) $y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}}$ με $c\in\mathbb{R}$ (παράδειγμα 1.4)

α) Αν $y_0 = -1$ Ν.Δ.Ο το πρόβλημα αρχικών τιμών θα έχει λύση.
Ακριβέστερα: $y(t)\to -\infty$ καθώς $t\uparrow\sqrt{2}$

Λύση

Σύμφωνα με την (*) έχουμε ότι:

$$y(1) = y_0 = -1 \iff$$

$$\iff 1 + \frac{1}{c-\frac{1}{2}} = -1 \iff$$

$$\iff \dots$$

$$\iff \boxed{c = 1/4}$$

Άρα, σύμφωνα με την *, η λύση είναι (εκεί που υπάρχει),

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{4}t(t^2-2)} \to -\infty \quad t\uparrow\sqrt{2}$$

1 — $\sqrt{2}$ — 2

$t^2 - 2 = 0 \iff t = \pm\sqrt{2}$ γιατί θέλουμε στο $[1,2]$

Άρα λύση υπάρχει στο $[1,\sqrt{2})$

Η λύση y είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1, \sqrt{2})$ και τείνει στο $-\infty$ καθώς το t αυξάνει προς το $\sqrt{2}$. Άρα, δεν υπάρχει λύση σε όλο το διάστημα $[1,2]$

β) Αν $y_0 = 3$. Ποια είναι η λύση;

Λύση

$$y(1) = y_0 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, η λύση μου είναι:

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{t}{2}\underbrace{(2t^2-1)}_{\geq 1}}$$

Αυτή είναι η λύση και είναι καλά ορισμένη σ'όλο το διάστημα.

Άσκηση 1.6)

$$y'(t) = \frac{1+[y(t)]^2}{2ty(t)}$$ θέλουμε τη λύση σε πεπλεγμένη μορφή. (είναι χωριζομένων μεταβλητών)

Λύση

$$y'(t) = \frac{1+[y(t)]^2}{2ty(t)} \Leftrightarrow \frac{2y(t)y'(t)}{1+[y(t)]^2} = \frac{1}{t}$$

ΔΕ χωριζόμενων μεταβλητών.
(Γράφουμε την ΔΕ ξανά αλλά με s αντί t)

$$\frac{2y(s)y'(s)}{1+[y(s)]^2} = \frac{1}{s}$$ ολοκληρώνω

$$\Rightarrow 2\int_a^t \frac{y(s)y'(s)}{1+[y(s)]^2}\,ds = \int_\alpha^t \frac{1}{s}\,ds \quad (\alpha \text{ και } t \text{ αυθαίρετα})$$

θέτω $z := [y(s)]^2$ (γιατί μας βολεύει) $\rightsquigarrow dz = 2y(s)y'(s)ds$

$$\Rightarrow \int_{[y(a)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+z}\,dz = \log|t| - \log|\alpha|$$

$$\Rightarrow \log[[y(t)]^2+1] - \log[[y(a)]^2+1] = \log|t| - \log|\alpha|$$

$\rightarrow$

$$\Leftrightarrow \log\left[[y(t)]^2+1\right] = \log|t| + \underbrace{\log\left[[y(a)]^2+1\right] - \log|\alpha|}_{\log|c|}$$

$$\Leftrightarrow \log\left[[y(t)]^2+1\right] = \underbrace{\log|t| + \log|c|}_{\log|ct|}$$

$$\Leftrightarrow [y(t)]^2+1 = |ct|$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2 = \underbrace{|ct|-1}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{|ct|-1}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 1.7}}$

$$y'(t) = \frac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$$

Λύση

$$\{[y(t)]^3 - y(t)\}\, y'(t) = 2t-1$$

δηλαδή

$$\{[y(s)]^3 - y(s)\}\, y'(s) = 2s-1 \xRightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^t \{[y(s)]^3 - y(s)\}\, y'(s)\, ds = \int_\alpha^t (2s-1)\, ds$$

Θέτω $\tau = y(s) \rightsquigarrow d\tau = y'(s)ds$

$$\int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3-\tau)\, d\tau = (t^2-a^2)-(t-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left\{[y(t)]^4 - [y(a)]^4\right\} - \frac{1}{2}\left\{[y(t)]^2 - [y(a)]^2\right\} = (t^2-a^2)-(t-a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = (t^2-t) + \underbrace{\frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(a)]^2 - (a^2-a)}_{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = (t^2-t) + c$$

Η λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε
$[y(t)]^3 - y(t) \neq 0$ δηλαδή $y(t)\neq 0$ και $y(t) \neq \pm 1$ για κάθε t.

Θεωρια (συνεχεια)

$e^{tA} y^{(0)}$,

1η περιπτωση: Η γεωμετρικη και η αλγεβρικη πολλαπλοτητα καθε ιδιοτιμης του πινακα A ειναι ιδιες. Τοτε υπαρχει βαση του $\mathbb{C}^n$ αποτελουμενη απο διανυσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A.

2η περιπτωση: Η γεωμετρικη πολλαπλοτητα καποιας ιδιοτιμης του A ειναι μικροτερη απο την αλγεβρικη της πολλαπλοτητα.

Ισχυρισμος: Υπαρχει βαση του $\mathbb{C}^n$ αποτελουμενη απο γενικευμενα ιδιοδιανυσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A.

Αποδειξη (ισχυρισμου)

Εστω m, η αλγεβρικη πολλαπλοτητα μιας ιδιοτιμης λ του A με γεωμετρικη πολλαπλοτητα μικροτερη του m.

Ειναι γνωστο απο την Γραμμικη Αλγεβρα οτι:

a) Υπαρχουν m γραμμικα ανεξαρτητα ιδιοδιανυσματα του A ως προς την ιδιοτιμη λ, δηλαδη λυσεις του γραμμικου συστηματος:

$$(A-\lambda I_n)^m x = 0$$

b) Γενικευμενα ιδιοδιανυσματα ως προς διαφορετικες ιδιοτιμες ειναι γραμμικα ανεξαρτητα.

Συμπερασμα:

Αφου το αθροισμα των αλγεβρικων πολλαπλοτητων ολων των ιδιοτιμων του A ειναι n (οσος και ο βαθμος του χαρακτηριστικου πολυωνυμου του A), υπαρχουν n γραμμικα ανεξαρτητα γενικευμενα ιδιοδιανυσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του A. Αφου $\dim \mathbb{C}^n = n$, τα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελουν βαση του $\mathbb{C}^n$

Ερωτηση: Πως υπολογιζουμε m γραμμικα ανεξαρτητα γενικευμενα ιδιοδιανυσματα ενος πινακα A ως προς την ιδιοτιμη του λ αλγεβρικης πολλαπλοτητας m;

Απαντηση:

$\boxed{1^{\text{ος}} \text{ τροπος}}$: Λυνουμε το γραμμικο συστημα

$$(A-\lambda I_n)^m x = 0$$

$\boxed{2^{\text{ος}} \text{ τροπος}}$ (ευκολοτερος)

1ο βημα: Λυνουμε το συστημα

$$(A-\lambda I_n) x = 0$$

→

και προσδιορίζουμε τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ, όση η γεωμετρική πολλαπλότητα (αυτός είναι ο ορισμός της γεωμετρικής πολλαπλότητας).

• Αν βρήκαμε m τέτοια διανύσματα σταματάμε εδώ. Διαφορετικά, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

2ο βήμα: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα:

$$(A-\lambda I_n)^2 x = 0$$

και προσδιορίζουμε όσα περισσότερα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μπορούμε τα οποία μαζί με αυτά που βρήκαμε και στο 1ο βήμα να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Το πλήθος τους είναι τουλάχιστον κατά ένα μεγαλύτερο του πλήθους των διανυσμάτων που βρήκαμε στο πρώτο βήμα. Αν βρήκαμε πλέον συνολικά m διανύσματα σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

3ο βήμα: Λύνουμε το σύστημα:

$$(A-\lambda I_n)^3 x = 0$$

όπως και προηγουμένως.

⋮

Απαιτούνται (το πολύ) l βήματα, όπου l η διαφορά της αλγεβρικής πολλαπλότητας (δηλ. του m) μείον την γεωμετρική πολλαπλότητα.

$\boxed{\text{Ανακεφαλαίωση}}$

$$(*)\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

• Έστω $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A (Υπάρχει πάντα!!)

Τότε η αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται στην μορφή

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

Τοτε η λυση

$$y(t) = e^{tA} y^{(0)}$$

του (*) γραφεται στην μορφη

$$y(t) = c_1 e^{tA} x^{(1)} + c_2 e^{tA} x^{(2)} + \dots + c_n e^{tA} x^{(n)}$$

Είδαμε πλέον με ποιον τροπο υπολογίζουμε τα $e^{tA} x^{(i)}$, οπου $x^{(i)}$ (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A, οποτε ξέρουμε πως να βρούμε την $y(t)$.

Παρατηρηση: Οι $\varphi^{(i)}(t) := e^{tA} x^{(i)}$ είναι γραμμικα ανεξάρτητες λυσεις του $y'(t) = Ay(t)$, $t \in \mathbb{R}$ αφού τα $x^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ είναι γραμμικα ανεξάρτητα. Όταν τα $x^{(i)}$ είναι (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις $\varphi^{(i)}(t)$

(+) (συνέχεια στο τετράδιο 4/11/14)

• Παράδειγμα: Γενική λυση του $y'(t) = Ay(t)$, $t \in \mathbb{R}$, με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \dots$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$$

Ιδιοτιμές: $\boxed{\lambda_1 = 1}$ (για το αθροισμα των θετικων συντελεστων ειναι +7 και των αρνητικων −7)

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

Οι ιδιοτιμές του A είναι διαφορετικές μεταξύ τους, συνεπώς υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

a) $\boxed{\lambda_1 = 1}$. Θέλουμε να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$$(A - \lambda_1 I_3) v = 0 \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{cases} -v_2 + 4v_3 = 0 \\ 3v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases}$$

→

$2^{η} - 3^{η} \Rightarrow \quad v_1 + v_3 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{v_1 = -v_3}$

$1^{η} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = 4v_3}$

Για $v_3 = 1$ (αυθαίρετα), το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό μας δίνει τη λύση $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} v = e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ του

$y'(t) = Ay(t)$

β) για $\lambda_2 = 3 \quad \leadsto v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση: $\varphi^{(2)}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

γ) για $\lambda_3 = -2 \quad \leadsto v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση, $\varphi^{(3)}(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Γενική λύση:

$$y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t)$$

$$= c_1 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ +4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4c_1 e^{t} + 2c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

4/11/2024

Ασκηση 1.8

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\,y(t)} \quad \text{ομογενης}$$

α) Γενικη λυση

Λυση

Θετουμε $v(t) := \frac{y(t)}{t}$, και εχουμε

$$y(t) = t\,v(t) \Rightarrow y'(t) = t\,v'(t) + v(t)$$

οποτε,

$$t\,v'(t) + v(t) = \frac{3\cancel{t^2}[v(t)]^2 + \cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}v(t)}$$

$$\Rightarrow t\,v'(t) + v(t) = \frac{3}{2}v(t) + \frac{1}{2v(t)}$$

Αρα

$$t\,v'(t) = \frac{1}{2}v(t) + \frac{1}{2v(t)} \Rightarrow$$

$$\frac{v'(t)}{\frac{1}{2}v(t) + \frac{1}{2v(t)}} = \frac{1}{t}$$ παω το 2 στου $\Rightarrow$ αριθμητη

$$\Rightarrow \frac{v'(t)}{\frac{[v(t)]^2 + 1}{2v(t)}} = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{2v(t)v'(t)}{[v(t)]^2 + 1} = \frac{1}{t}$$

Αρα:

$$\frac{2v(s)v'(s)}{[v(s)]^2 + 1} = \frac{1}{s}$$ ολοκληρωνουμε απο ενα $\Rightarrow$ τυχαιο α εως t

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{t} \frac{2v(s)v'(s)}{[v(s)]^2+1}\,ds = \int_{\alpha}^{t} \frac{1}{s}\,ds \quad (\alpha \text{ και } t \text{ σταθερα})$$

Θετω $\tau := [v(s)]^2$ (μας βολευει)

$$d\tau = 2v(s)v'(s)$$

→

59

$$\Rightarrow \int_{[v(a)]^2}^{[v(t)]^2} \frac{1}{\tau+1}\, d\tau = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{[v(t)]^2+1\} - \log\{[v(a)]^2+1\} = \log|t| - \log|\alpha|$$

(αν έχω το a το λέω και τα βρίσκω αλλιώς τα αντικαθιστώ με μια σταθερά)

$$\Rightarrow \log\{[v(t)]^2+1\} = \log|t| + \underbrace{\log\{[v(a)]^2+1\} - \log|\alpha|}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log\{[v(t)]^2+1\} = \log|ct|$$

$$\Rightarrow [v(t)]^2+1 = ct$$

$$\Rightarrow [v(t)]^2 = ct-1$$

$$\Rightarrow \frac{[y(t)]^2}{t^2} = ct-1$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2 = t^2(ct-1) \quad (*)$$ Αυτό μου δίνει τη λύση σε πεπλεγμένη μορφή

b) Ειδική λύση $y(1)=1$ λύση

Τότε αντικαθιστώντας στην (*) έχουμε:

$$1 = c-1 \Rightarrow \boxed{c=2}$$

Άρα

$$[y(t)]^2 = t^2\underbrace{(2t-1)}_{\geq 0}$$ Έχει νόημα όταν $t \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y(t) = \pm t\sqrt{2t-1}$$

Με το πρόσημο (−) παίρνουμε

$y(1) = -1$ απορρίπτω

Άρα θέλω με το (+)

$$y(t) = t\sqrt{2t-1}, \quad t \geq \frac{1}{2}$$

Ασκηση 1.9

$$y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$

(πλήρης) απο εκφώνηση αλλα είναι και ομογενής.

α) Γενική λύση

Ελέγχω αν είναι πλήρης:

$$M(t,y) = 2t + y \quad , \quad N(t,y) = t + 2y$$

Πράγματι

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}}_{=1} = \underbrace{\frac{\partial N}{\partial t}}_{=1}$$

Άρα η ΔΕ είναι πλήρης.

Ζητείται τώρα f τ.ω

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t + y \xRightarrow{\text{ολοκληρώνω}} f(t,y) = t^2 + yt + g(y)$$

οπότε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = 0 + t + g'(y)$$

Αλλά πρέπει να ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y) = t + 2y$,

οπότε θα πρέπει:

$$\cancel{t} + g'(y) = \cancel{t} + 2y \Rightarrow$$

$$g(y) = y^2 + C$$

δεν λαμβάνω υπόψη την σταθερά

οπότε π.χ. $g(y) = y^2$

σημαίνει ότι δεν λαμβάνω υπόψη τις σταθερές.

Συμπέρασμα: $f(t,y) = t^2 + yt + y^2$

21

Επομένως οι λύσεις $y(t)$ δίνονται από την σχέση $f(t, y(t)) = c$ με c σταθερά, δηλαδή

$$t^2 + ty(t) + [y(t)]^2 = c$$

Επαλήθευση (εκτός ασκήσεως)

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 + ty(t) + [y(t)]^2\right) = 0 \iff$$

$$2t + y(t) + ty'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \iff$$

$$[t + 2y(t)]\,y'(t) = -2t - y(t) \implies$$

$$y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$ άρα σωστό.

$\boxed{\text{Άσκηση 1.10}}$

$$y'(t) = \frac{t + [y(t)]^2}{ty(t)}$$

Από εκφώνηση (ανάγεται σε πλήρη)

Γενική λύση

$M(t, y) = t + y^2$, $N(t, y) = ty$

$$2y = \frac{\partial M}{\partial y}(t, y) \neq \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = y$$

Άρα η Δ.Ε δεν είναι πλήρης.

Τώρα

$$\frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)\right] =$$

$$= \dots = \frac{y}{ty} = \frac{1}{t}$$

Ανεξάρτητο του y.

Συμπέρασμα: Υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]dt}$$

$$= e^{\int \frac{1}{t} dt} \underset{t>0}{=} e^{\log t} = t$$

Γράφουμε την αρχική Δ.Ε στην μορφή:

$$y'(t) = -\frac{t^2 + t[y(t)]^2}{t^2 y(t)}$$

Δηλαδή (πολλ/με αριθμητή και παρονομαστή με $\mu(t)=t$)

Θέτω

$\tilde{M}(t,y) = t^2 + ty^2$, $\tilde{N}(t,y) = t^2 y$

ελέγχω αν αυτή είναι πλήρης.

$$2ty = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}(t,y) = 2ty$$

Άρα είναι πλήρης.

Ζητείται μια συνάρτηση f τ.ω

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{M} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = t^2 + ty^2 \Rightarrow$$

$$f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2 + g(y)$$

Άρα

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \boxed{t^2 y + g'(y)}$$

Επομένως, αφού θέλουμε $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \tilde{N}(t,y) = \boxed{t^2 y}$,
θα έχουμε:

$$\cancel{t^2 y} + g'(y) = \cancel{t^2 y} \Rightarrow$$

Οπότε η παράγωγος $g'(y) = 0$, και παίρνω οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, π.χ $\boxed{g(y) = 0}$

Συμπέρασμα: $f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}y^2$

Οι λύσεις $y(t)$ της εξίσωσης δίνονται από τις σχέσεις
$$\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}[y(t)]^2=c \quad \text{με } c\in\mathbb{R}$$

Επαλήθευση:
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}[y(t)]^2\right)=0 \iff$$

$$t^2+t[y(t)]^2+\frac{t^2}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}[y(t)]y'(t)=0 \underset{t\neq 0}{\iff}$$

$$\iff t+[y(t)]^2+ty(t)y'(t)=0 \iff$$

$$y'(t)=\frac{t+[y(t)]^2}{ty(t)} \quad \text{σωστό ✓}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)
$$y'(t)=Ay(t), \quad t\in\mathbb{R}$$
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Γενική λύση
$$y(t)=\begin{pmatrix}-c_1e^{t}+c_2e^{3t}-c_3e^{-2t}\\ 4c_1e^{t}+2c_2e^{3t}+c_3e^{-2t}\\ c_1e^{t}+c_2e^{3t}+c_3e^{-2t}\end{pmatrix}$$

με $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

- Πρόβλημα αρχικών τιμών με $y(2)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Άρα:
$$\begin{cases}-c_1e^{2}+c_2e^{6}-c_3e^{-4}=1\\ 4c_1e^{2}+2c_2e^{6}+c_3e^{-4}=2\\ c_1e^{2}+c_2e^{6}+c_3e^{-4}=3\end{cases}$$

$\gamma_1+\gamma_2$: $\quad 2c_2e^{6}=4 \Rightarrow c_2e^{6}=2 \iff$
$$\boxed{c_2=2e^{-6}}$$

Άρα η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση δίνουν:

$$\left.\begin{array}{l} -c_1e^2 - c_3e^{-4} = 1 - \underbrace{c_2e^6}_{=2} = -1 \\ 4c_1e^2 + c_3e^{-4} = 2 - \underbrace{2c_2e^6}_{=4} = -2 \end{array}\right\} (+)$$

$\Rightarrow \ \dots \ \boxed{c_1 = -e^{-2}}$

$\boxed{c_3 = 2e^4}$

Παράδειγμα

$y'(t) = Ay(t) \quad , t \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(αν είναι άνω τριγωνικός οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία στη διαγώνιο)

Λύση

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ (απλή)

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ (διπλή)

Βρίσκω τα ιδιοδιανύσματα:

a) $\lambda_1 = 2$ $\quad (A - \lambda_1 I_3)v = 0 \Leftrightarrow$

$(A - 2I_3)v = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 = 0$$

v_3 είναι αυθαίρετο (εκτός 0)

π.χ. $\boxed{v_3 = 1}$

Άρα:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ειδική λύση:

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

β) $\lambda_2 = 1$ (αλγεβρική πολλαπλότητα $= 2$)

$$(A - \lambda_2 I_3)v = 0 \Leftrightarrow (A - I_3)v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = v_3 = 0} \quad \boxed{v_1 = 1}$$

Άρα

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (γεωμετρική πολλαπλότητα $= 1$)

Ειδική λύση

$$\varphi^{(2)}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα: $(A - \lambda_2 I_3)^2 v = 0$

και $(A - \lambda_2 I_3)v \neq 0$

$$(A - \lambda_2 I_3)^2 = (A - I_3)^2 = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$ v_1, v_2 αυθαίρετα

εκτός $v_1 = 1$ $v_2 = 0$

$\boxed{v_3 = 0}$

Άρα:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ π.χ. $\boxed{v_1 = 0}$, $\boxed{v_2 = 1}$

$$\varphi^{(3)}(t) = e^{t}\left[v + t(A - I_3)v\right] =$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + te^{t}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + te^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

Γενική λύση :

$$y(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + c_3\varphi^{(3)}(t) \Rightarrow$$

$$= c_1 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_2 e^{t} + c_3 t e^{t}\\ c_3 e^{t}\\ c_1 e^{2t}\end{pmatrix} \quad \forall\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$