Υπολογιστικά Μαθηματικά

30/09/2014

1) Πρόβλημα αρχικών τιμών

Δεδομένα. $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση
$a, b \in \mathbb{R}$
$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής παραγωγίσιμη τ.ω.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , a \le t \le b \\ y(a) = y \end{cases}$$

Θέματα
1) Ύπαρξη λύσης
2) Μοναδικότητα λύσης
3) Ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση)
4) Γενίκευση για συστήματα Δ.Ε.

ΟΧΙ στο βιβλίο:
5) Επίλυση Δ.Ε. απλής μορφής
γραμμικές, Bernoulli, Ricatti με χωριζόμενες μεταβλητές
ομογενείς, πλήρεις, γραμμικά συστήματα ΣΔΕ

2) Η μέθοδος του Euler

Έστω $N \in \mathbb{N}$: θέτουμε $h = \frac{b-a}{N}$ και θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα h, δηλαδή με κόμβους δείκτης → $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Μέθοδος του Euler: Δίνει προσεγγίσεις y^n των τιμών $y(t^n)$ που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hF(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Θέματα. 1) Πως οδηγούμαστε στη μέθοδο;
2) Κόστος της μεθόδου ανά βήμα.
3) Ποιότητα των προσεγγίσεων;
4) Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα.
5) Πότε χρησιμοποιείται η μέθοδος και πότε χρειάζεται να καταφύγουμε σε άλλες μεθόδους.

3) Μέθοδος των Runge-Kutta

4) Πολυβηματικές μέθοδοι

5) Το πρόβλημα δύο σημείων.

Ύπαρξη και μοναδικότητα

• Γραμμικές Δ.Ε.

$F(t,y) = p(t)\cdot y + q(t)$ (η F πολυώνυμο το πολύ μέχρι 1ου βαθμού ως προς y με $p,t : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς) $(p,t) \in [a,b]$

$y'(t) = p(t)\,y(t) + q(t)$

SOS Γραμμική Δ.Ε. Αν $q=0$, η ΔΕ λέγεται ομογενής διαφορετικά λέγεται μη ομογενής

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t) & (a \le t \le b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση: $p(t)=0$, $a \le t \le b$

$$y'(s) = q(s) \Rightarrow \underbrace{\int_a^t y'(s)\,ds}_{y(t)-y(a)} = \int_a^t q(s)\,ds$$

$y(a) = y_0$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_a^t q(s)\,ds, \quad a \le t \le b$$

(2)

$$(e^{\varphi(x)})' = e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$$

2η περίπτωση: γενική

$$y'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t)$$

$$y'(s) - p(s)y(s) = q(s)$$

(*) { Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{-\int_a^s p(t)dt}$

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt} y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(t)dt} \cdot (y(s))' + \left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\right)' y(s)$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(t)dt}\right)' \overset{*}{=} e^{-\int_a^s p(t)dt} \Big(\underbrace{-\int_a^t p(t)dt}_{=-p(s)}\Big)'$$

$$\boxed{(*)\ e^{-\int_a^s p(t)dt} \cdot y'(s) - e^{-\int_a^s p(t)dt} p(s)y(s) = e^{-\int_a^s p(t)dt} q(s)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[e^{-\int_a^s p(t)d(t)} y'(s)\right]$$

Άρα: $\left(e^{-\int_a^s p(t)dt} y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(t) \cdot dt} q(s)$

Επομένως: $\boxed{\int_a^t \left(e^{-\int_a^t p(t)dt} y(s)\right)' ds} = \int_a^t e^{-\int_a^s p(t)dt} q(s)ds$

$$\Downarrow$$

$$e^{-\int_a^t p(t)dt} y(t) - y(a) \Rightarrow e^{-\int_a^s p(t)dt} q(t) = y_0 + \int_a^t e^{-\int_a^s p(t)dt} q(s)ds$$

$a \leq t \leq b$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\int_a^t p(t)dt}\left[y_0 + \int_a^t e^{-\int_a^s p(t)dt} q(s)dS\right]$$

$$y'(t) = p(t) + q(t)$$

Γραμμική ΔΕ.

02/10/2014

SOS Προβλήματα αρχικών τιμών

$f: [a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής

$y_0\in\mathbb{R}$

(*) $\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Ύπαρξη - Μοναδικότητα

• Γραμμική ΔΕ

$\begin{cases} y'(t)=p(t)y(t)+q(t), & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

$$y(t)=e^{\int_a^t p(s)ds}\left[y_0+\int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right],\quad a\le t\le b$$

Μη ύπαρξη λύσης

(*) Παράδειγμα $f(t,y)=y^2$

$\begin{cases} y'=y^2, & 0\le t\le 2 \\ y(0)=1 \end{cases}$

• y αύξουσα, ιδιαίτερα $y(t)>0$

$y'(s)=(y(s))^2 \Rightarrow$

$\dfrac{y'(s)}{(y(s))^2}=1 \Rightarrow$

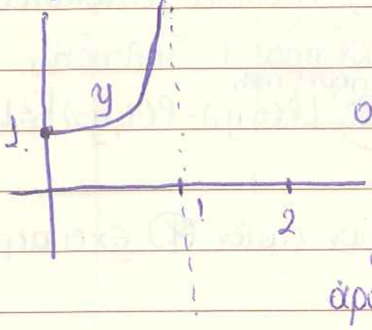
$$\boxed{\left(\frac{1}{y(s)}\right)'=((y(s))^{-1})'=-(y(s))^{-2}\cdot y'(s)=-\frac{y'(s)}{(y(s))^2}}$$

$-\left(\dfrac{1}{y(s)}\right)'=1 \Rightarrow$

$$-\int_0^t\left(\frac{1}{y(s)}\right)'ds=\underbrace{\int_0^t 1\,ds}_{t}$$

$$\boxed{\text{όπου}\quad \int_0^t\left(\frac{1}{y(s)}\right)'ds=\frac{1}{y(t)}-\frac{1}{y(0)}}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + 1 = t \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$



$0 \le t < 1$

$y(t) \to \infty$

για $t \to 1^-$ (από τα αριστερά)

άρα δεν υπάρχει λύση.

⊛ Δώστε ένα παράδειγμα αρχικών τιμών που δεν έχει λύση (για το παράδειγμα SOS)

<u>Παρατήρηση</u> Η $f(t,y) = y^2$ είναι όσο ομαλή θέλουμε. Άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

SOS <u>Μη Μοναδικότητα Λύσης</u>

<u>Δώστε ένα παράδειγμα που να'χει άπειρες λύσεις</u>

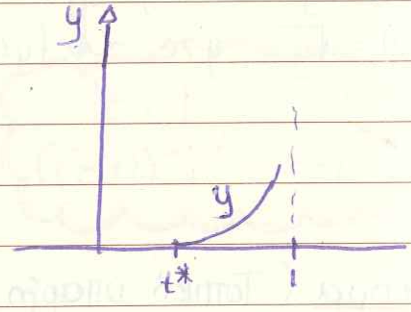
$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

μία λύση $y(t) = 0$, $0 \le t \le 1$.

έστω $t^* \in (0,1)$

Θα κατασκευάσουμε μία λύση:

με αυτές τις ιδιότητες $\begin{cases} y(t) = 0, & 0 \le t \le t^* \\ y(t) > 0, & t^* < t \le 1 \end{cases}$



$y'(s) = \sqrt{y(s)}, \quad t^* < s \le 1$

$\Rightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1$

$$\left(\sqrt{y(s)}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y(s)}} \cdot y'(s)$$

$\Rightarrow 2 \cdot \left(\sqrt{y(s)}\right)' = 1$

$\Rightarrow 2 \int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \underbrace{\int_{t^*}^{t} 1\, ds}_{t - t^*}$ $\boxed{\text{όπου } \int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)} = \sqrt{y(t)}}$

$\Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{1}{2}(t - t^*) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(t - t^*)^2, \quad t^* < t \le 1$

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t δηλαδή

ολική συνθήκη

Lipschitz

$\ast$ $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\exists L \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

(1) $\exists L \geq 0, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ \ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$
$\forall t \in [a,b]$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών $\circledast$ έχει ακριβώς μια λύση.

Υπόθεση: Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως προς y

Τότε

$f(t,y_1) - f(t,y_2) = f_y(t, \tilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)$

$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})| \cdot |y_1 - y_2|$

Η f ικανοποιεί την (1) αν και μόνον αν

$\forall t \in [a,b] \ \ \forall y \in \mathbb{R} \quad |f_y(t,y)| \leq L$

- $f(t,y) = y^2 \rightsquigarrow f_y(t,y) = 2y$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη
- $f(t,y) = \sqrt{y}$, $y > 0 \rightsquigarrow f_y(t,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \to \infty$ όταν $y \searrow 0$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη

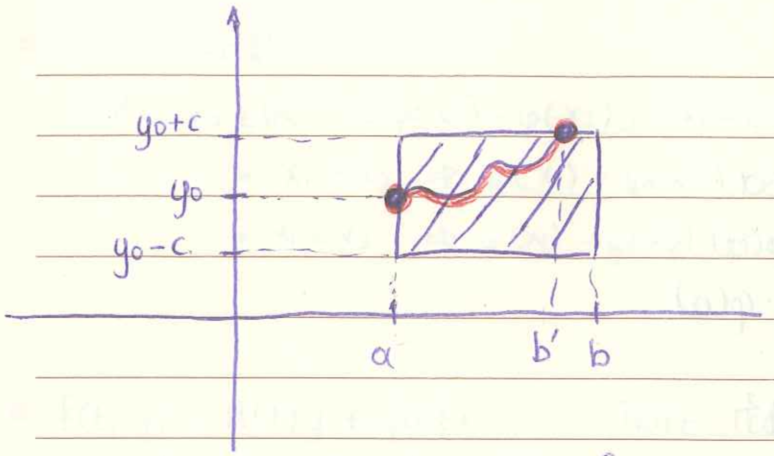
Θεώρημα (Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $c > 0$ και $f: [a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c] \to \mathbb{R}$ συνεχής η οποία ικανοποιεί τη τοπική συνθήκη του Lipschitz στο $[y_0 - c, y_0 + c]$ ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

$\exists L \geq 0 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c] \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών $\circledast$ λύνεται μονοσήμαντα, τουλάχιστον στο διάστημα $[a, b']$ όπου με

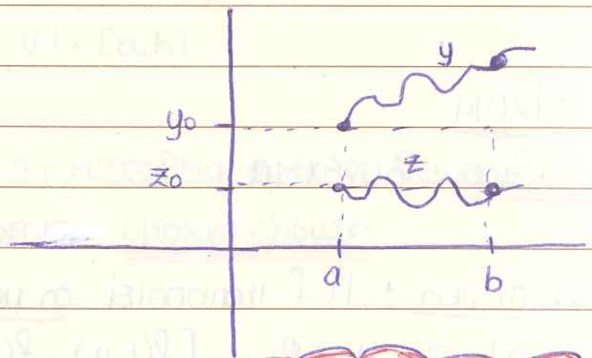
$A = \max\limits_{\substack{a \leq t \leq b \\ y_0 - c \leq y \leq y_0 + c}} |f(t,y)|$ έχουμε $b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right)$



Παρατήρηση: Η συνέχεια της f και μόνο εξασφαλίζει ύπαρξη λύσης σε ένα διάστημα $[a, c]$ με $c > a$ (όχι μοναδικότητα)

Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$|\varepsilon(t)|$ $\quad |y_0 - z_0|$

$((\varepsilon(t))^2)' = 2\varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t)$

$y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$

θέτω $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ Τότε

$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$

$\Rightarrow \varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t) = [f(t,y(t)) - f(t, z(t))]\,\varepsilon(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,\varepsilon(t)$

1η περίπτωση Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη του Lipschitz

Τότε

$$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le \underbrace{|f(t,y(t)) - f(t,z(t))|}_{\le L\cdot|\varepsilon(t)|}\cdot|\varepsilon(t)|$$

$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le L|\varepsilon(t)|^2$ θέτω $\varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$

$\frac{1}{2}\varphi'(t) \le L\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - 2L\varphi(t) \le 0$ $\Rightarrow$

$$e^{-2Lt}\,[\varphi'(t) - 2L\varphi(t)] \le 0$$
$$\Rightarrow (e^{-2Lt}\varphi(t))' \le 0$$
$\Rightarrow$ η $e^{-2Lt}\varphi(t)$ είναι φθίνουσα.

Ιδιαίτερα $e^{-2Lt}\varphi(t) \le e^{-2La}\cdot\varphi(a)$

$$\varphi(t) \le e^{2L(t-a)}\cdot\varphi(a)$$

Άρα $(\varepsilon(t))^2 \le e^{2L(t-a)}(\varepsilon(a))^2.$

$$|\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

ιδιαίτερα $\Rightarrow \max|\underbrace{\varepsilon(t)}_{y(t)-z(t)}| \le e^{L(b-a)}|\underbrace{\varepsilon(a)}_{y_0-z_0}|$, $a \le t \le b$

Χρήσιμη πρακτικά είναι αυτή η εκτίμηση για μικρά $L(b-a)$

7/10/2014

Ευστάθεια συνέχεια

(το εκτιμώ απ' την μία πλευρά)

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, δηλαδή $\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$: $[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1-y_2) \le 0$

σταθερό t.

Έχουμε απ' το προηγούμενο παράδειγμα

$$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,[y(t)-z(t)]}_{\le 0}$$

$\Rightarrow ((\varepsilon(t))^2)' \le 0 \Rightarrow (\varepsilon(t))^2$ φθίνουσα συνάρτηση

$\Rightarrow |\varepsilon(t)|$ φθίνουσα συνάρτηση

$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \le |\varepsilon(a)|$

$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \le |y_0 - z_0|$, $\forall t \in [a,b]$

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)](x_1 - x_2) \leq 0$

  - $x_1 > x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq 0 \Rightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$

  } η φ είναι φθίνουσα.

- $f(t,y) = A(t)y + \mu(t)$ Πότε ικανοποιεί αυτή η f τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz;

  Γραμμική Δ.Ε.

Έχουμε $f(t,y_1) - f(t,y_2) = A(t)(y_1 - y_2)$

$\Rightarrow [f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) = A(t)\underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{\geq 0}$

Απάντηση: Αν και μόνο αν $A(t) \leq 0$, $\forall t \in [a,b]$

Στην περίπτωση γραμμικής Δ.Ε. για την ευστάθεια αρκεί να θεωρήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση,

$$\begin{cases} y' = A(t)y, & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

αρκεί τότε να δείξουμε μια εκτίμηση της μορφής

$|y(t)| \leq \dots |y_0|$

$$\left.\begin{array}{ll} y'(t) = f(t, y(t)) & y'(t) = A(t)y(t) + \mu(t) \\ z'(t) = f(t, z(t)) & z'(t) = A(t)z(t) + \mu(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$y'(t) - z'(t) = A(t)[y(t) - z(t)]$

$\underbrace{[y(t) - z(t)]'}_{\tilde{y}(t)} = A(t)\underbrace{[y(t) - z(t)]}_{\tilde{y}(t)}$

$\tilde{y}'(t) = A(t)\tilde{y}(t)$

Ειδική περίπτωση $A(t) = A \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \geq 0 \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

(για $A>0$ πάει στο άπειρο)

$y(t) = y_0 e^{At}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΟΚΙΜΗΣ

Για $A \leq 0$, $|y(t)| = e^{-At} \leq e^{-A \cdot 0} = 1$, φθίνει φραγμένα.

Γενικότερο πρόβλημα $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda \leq 0 \Rightarrow |y(t)| \leq 1$$

Συστήματα Σ.Δ.Ε. $m \in \mathbb{N}$

Δεδομένα $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ζητούμενο $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

Θεώρημα (Υπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για συστήματα Δ.Ε.)
Έστω ότι η f συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$ δηλαδή
$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών ⊛ έχει ακριβώς μία λύση.

$\|\cdot\| \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ νόρμα:

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$
$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Γραμμικό σύστημα ΣΔΕ

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\,y(t) + g(t) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

$\boxed{A(t) \text{ πίνακας}}$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{n,m}$ και $g(t) \in \mathbb{R}^m \quad \forall t \in [a,b]$

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
Συστήματα ΔΕ Πρώτης τάξης

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για μια Δ.Ε. τάξης $m \geq 2$,

$$(*) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \leq t \leq b \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

SOS

Ισχυρισμός: Το πρόβλημα (*) ανάγεται σε αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης.

απόδειξη.

Θέτουμε

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$$

Τότε

$$z(a) = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y''(a) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$ γνωστά

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix} = F(t, z(t))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z'(t) = F(t, z(t)), \quad a \leq t \leq b \\ z(a) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{πρώτης τάξης} \end{array}}$$

Ευστάθεια

$1^{η}$ περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδια νόρμα

Τότε αν y και z οι λύσεις των

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \quad , \ a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t, z_0) \quad , \ a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

ισχύει η εκτίμηση ευστάθειας:

$$\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in [a, b]$$

και

$$\max_{a \le t \le b} \|y(t) - z(t)\| \le e^{L(b-a)} \|y_0 - z_0\|$$

9/10/2014

y'

$p, q \quad [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

Στη θεωρία

$y'(t) = q(t) \rightsquigarrow y'(t) - p(t) \cdot y(t) = q(t)$

Άσκηση 1.1

Ν.Δ.Ο. οι λύσεις της $y'(t) = p(t)y(t)$ (✱) είναι της μορφής

(⊕) $y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$ με C σταθερά του $t \in [a,b]$

• $y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds} \Rightarrow$

$$y'(t) = \underbrace{C e^{\int_a^t p(s)ds}}_{=y(t)} \underbrace{\left(\int_a^t p(s)ds\right)'}_{=p(t)}$$

Άρα $y'(t) = p(t)y(t) \quad \forall t \in [a,b]$

• Αντίστροφα. Κάθε λύση y της (✱) είναι της μορφής (⊕). Έστω y λύση της (✱). Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(t) = y(t) e^{-\int_a^t p(s)ds}$, $\forall t \in [a,b]$

Έχουμε

$$u'(t) = y'(t) e^{-\int_a^t p(s)ds} + y(t)\left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)'$$
$$= y'(t) e^{-\int_a^t p(s)ds} - y(t)\left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right) \cdot p(t)$$
$$= e^{-\int_a^t p(s)ds} \underbrace{\left(y'(t) - y(t)p(t)\right)}_{=0}$$

$=0$ γιατί η y ικανοποιεί την εξίσωση απ' την υπόθεση

$\Rightarrow u(t) = C \quad \forall t \in [a,b]$

Άρα

$C = y(t) e^{-\int_a^t p(s)ds} \Rightarrow y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$

Άσκηση 1.2 (Η μέθοδος της μεταβολής των σταθερών)

ΝΔΟ οι λύσεις της $y'(t)=p(t)y(t)+q(t)$ $\circledast\circledast$ είναι της μορφής

$\oplus\oplus$ $y(t)=e^{\int_a^t p(s)ds}\left[C_0+\int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right]$ με C_0 σταθερά

Λύση

1. Με παραγώγιση διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση y της $\oplus\oplus$ αποτελεί λύση της $\circledast\circledast$
2. Θα αποδείξουμε ότι κάθε λύση $\tilde{y}$ της $\circledast\circledast$ είναι της μορφής $\oplus\oplus$

Έστω $\tilde{y}$ μια τυχαία λύση της $\circledast\circledast$ και y μια λύση της μορφής $\oplus\oplus$. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $\tilde{y}-y$. Τότε έχουμε

$$\tilde{y}'(t)-y'(t)=p(t)\tilde{y}(t)+\cancel{q(t)}-[p(t)y(t)+\cancel{q(t)}]$$
$$=p(t)(\tilde{y}(t)-y(t))$$

Δηλαδή $\tilde{y}-y$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης

Ομογενή εξίσωση λέγεται αν $q(t)=0$

Επομένως σύμφωνα με την Άσκηση 1.1 έχουμε

$$\tilde{y}(t)-y(t)=C e^{\int_a^t p(s)ds}$$ οπότε
$$\tilde{y}(t)=y(t)+Ce^{\int_a^t p(s)ds}$$ Συμπέρασμα και η $\tilde{y}$ είναι της μορφής $\oplus\oplus$

3. Πώς οδηγούμαστε στην $\oplus\oplus$;

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λύσεις της μορφής

(+++) $y(t)=C(t)e^{\int_a^t p(s)ds}$ με κατάλληλη συνάρτηση $C(t)$

Έχουμε: Αν η (+++) είναι λύση της $\circledast\circledast$ τότε

$$p(t)y(t)+q(t)=y'(t)=C'(t)e^{\int_a^t p(s)ds}+\underbrace{C(t)e^{\int_a^t p(s)ds}}_{=y(t)}\cdot p(t)$$
$$=C'(t)e^{\int_a^t p(s)ds}+y(t)p(t)$$

Άρα $C'(t)e^{\int_a^t p(s)ds}=q(t) \Rightarrow C'(t)=q(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}$

$$\Rightarrow C(t)-C=\int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds$$
$$\Rightarrow C(t)=C_0+\int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds$$

Αντικαθιστώντας αυτή την $C(t)$ στη (+++) οδηγούμαστε στην $\oplus\oplus$

Συστήματα Σ.Δ.Ε

$f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ευστάθεια

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Τα προβλήματα έχουν ακριβώς μία λύση

Έστω $\|\cdot\|$ η Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$$\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$$

$$\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \le L\|y - \tilde{y}\|.$$

Τότε ισχύει $\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-a)}\|y_0 - z_0\|$

και $\max\limits_{a \le t \le b}\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(b-a)}\|y_0 - z_0\|$

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$$\forall t \in [a,b], \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$$

με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΟΚΙΜΗΣ άσκηση 1.10

Ισχυρισμός: Η διαφορά $\|y(t) - z(t)\|$ είναι φθίνουσα, ιδιαίτερα θα

$$\max_{a \le t \le b}\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ Τότε:

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Άρα

$$\boxed{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = (f(t, y(t)) - f(t, z(t)), \varepsilon(t))}$$

Τώρα

$$\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1(t)^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2\right)'$$

$$= \varepsilon_1(t) \cdot \varepsilon_1'(t) + \varepsilon_2(t) \cdot \varepsilon_2'(t) + \dots + \varepsilon_m(t) \cdot \varepsilon_m'(t) = (\varepsilon'(t), \varepsilon(t))$$

Επομένως

$$\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' = \left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)),\ \varepsilon(t)\right)$$
$$= \underbrace{\left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)),\ y(t) - z(t)\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' \leq 0 \Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \text{ φθίνουσα}$$
$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\| \text{ φθίνουσα}$$
$$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \text{ φθίνουσα}$$
$$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \leq \|\underset{y_0}{\underset{\|}{y(a)}} - \underset{z_0}{\underset{\|}{z(a)}}\|$$
$$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$
$$\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} \|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$

Πότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz στη γραμμική περίπτωση: $y'(t) = \underbrace{A(t)y(t) + g(t)}_{f(t,y(t))}$

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t)x + \cancel{g(t)} - [A(t)\tilde{x} + \cancel{g(t)}] = A(t)(x - \tilde{x})$$

απάντηση: Αν και μόνο αν $\forall t \in [a,b]$, $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ έχω $(A(t)(\underset{z}{x-\tilde{x}}), \underset{z}{x-\tilde{x}}) \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in [a,b]$, $\forall z \in \mathbb{R}^m$ $(A(t)z, z) \leq 0$ δηλαδή οι πίνακες $A(t)$, $t \in [a,b]$ είναι αρνητικά ημιορισμένος

1º πρόβλημα δοκιμής

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα: $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$

2º πρόβλημα δοκιμής

$f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

(16) $\forall t \in [a,b]$ $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ $(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

$\lambda = \alpha + i\beta \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$y(t) = y_1(t) + i y_2(t) \quad , y_1$ και $y_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$y'(t) = \lambda y(t) \iff y_1'(t) + i y_2'(t) = (\alpha + i\beta)(y_1(t) + i y_2(t))$$
$$= (\alpha y_1(t) - \beta y_2(t)) + i(\alpha y_2(t) + \beta y_1(t))$$

άρα

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ y_2'(t) &= \alpha y_2(t) + \beta y_1(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha y_1(t) - \beta 2(t) \\ \alpha y_2(t) + \beta y_1(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Ερώτηση: Πότε είναι ο A αρνητικά ημιορισμένος;

Έχουμε $(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (\alpha x_1 - \beta x_2) x_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2) x_2$$
$$= \alpha x_1^2 - \beta x_1 x_2 + \beta x_1 x_2 + \alpha x_2^2$$
$$= \alpha \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\geq 0} \leq 0 \iff \alpha \leq 0$$

14/10/2014

Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής

1. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις
2. Εξισώσεις του Bernoulli

(*) $y'(t) = p(t) y(t) + q(t) [y(t)]^{\sigma}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0, \sigma \neq 1$.

Παρατήρηση

- Για $\sigma = 0$ ή $\sigma = 1$ η Δ.Ε. είναι γραμμική
- Για $\sigma > 0$, η $y(t) = 0, \forall t \in [\alpha, b]$ είναι λύση

Θέτουμε $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$

Τότε $u'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma} \cdot y'(t)$

οπότε η (*) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{1-\sigma} \cdot [y(t)]^{\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t) \cdot [y(t)]^{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \underbrace{\frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}}}_{= [y(t)]^{1-\sigma} = u(t)} + q(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma} \cdot u'(t) = p(t) \cdot u(t) + q(t) \Rightarrow u'(t) = (1-\sigma) p(t) u(t) + (1-\sigma) q(t)$$

$\Rightarrow$