30/9/14

Διδασκαλία:

▽ · Θεωρία Τρίτη 11-13
Πέμπτη 12-13
· Ασκήσεις Πέμπτη 11-12

▽ Εργαστηριακές Ασκήσεις (2 ή 3)

▽ Ενδιάμεσες εξετάσεις: 1η ΕΕ: 15-11-2014
2η ΕΕ: 6-12-2014
3η ΕΕ: 10-1-2015

Περιεχόμενο του μαθήματος (σύνοψη)

· Διαφορικές Εξισώσεις (ΔΕ)
εξισώσεις (με άγνωστη μια συνάρτηση)
στις οποίες εμφανίζονται και παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης.

· Συνήθεις Δ.Ε:
Η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

· Εφαρμογές:
- φυσικές επιστήμες
- τεχνολογία
- οικονομία, ιατρική ...

Η απλούστερη ΔΕ:

$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

$y'(t) = 0$

Λύση: $y(t) = c, \ \forall t \in [a,b], \ c \in \mathbb{R}$

όλες οι σταθερές συναρτήσεις έχουν παράγωγο 0

▶ Για να περιγράφουν οι ΔΕ κατά μοναδικό τρόπο κάποιο φαινόμενο, απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες, π.χ
- αρχικές συνθήκες (περιγραφές ενός φαινομένου και δες πως είναι στην αρχή)
- συνοριακές συνθήκες (όταν δίνεις για 2 σημεία όχι μόνο 1)

Κεφάλαια

1ο Πρόβλημα αρχικών τιμών

Δεδομένα: $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$

στο (a,b) η πρώτη — από το $\mathbb{R}$ η δεύτερη — παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$

$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Αν ικανοποιεί τα 2 παραπάνω τότε το y είναι λύση.

Θέματα: 1. ύπαρξη λύσης

2. μοναδικότητα λύσης (δεν υπάρχει πάνω από 1 λύση)

3. ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση)

4. γενίκευση για συστήματα Δ.Ε (π.χ αντί για $\to \mathbb{R}$ είναι στο $\to \mathbb{R}^m$)

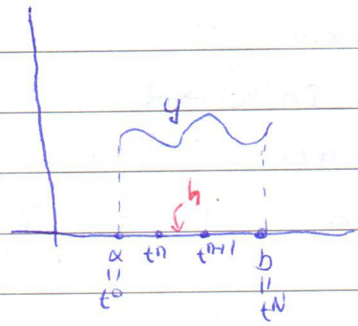
δεν περιέχεται στο θέμα

5. Επίλυση Δ.Ε απλής μορφής π.χ: γραμμικές, Bernoulli, Riccati, με χωριζόμενες μεταβλητές, ομογενείς, πλήρεις, γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε με σταθερούς συντελεστές.

2ο Η μέθοδος του Euler

Υποθέτω ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση

έχω και αυτή την λύση:



▷ Έστω ότι $N \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $h := \frac{b-a}{N}$. Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα h, δηλαδή με κόμβους

$t^n = a + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N$ (n ← δείκτης)

• Μέθοδος του Euler: δίνει προσεγγίσεις y^n (→ δείκτες) των τιμών $y(t^n)$ που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

▸ Θέματα 1. Πως οδηγούμαστε στην μέθοδο
2. Κόστος (υπολογιστικό κόστος, το μετράμε σε κάθε βήμα συνήθως)
3 Ποιότητα των προσεγγίσεων
4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα;
5 Πότε χρησιμοποιείται η μέθοδος και πότε χρειάζεται να καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους.

3º Μέθοδοι των Runge-Kutta

4º Πολυβηματικές μέθοδοι

*5º Το πρόβλημα 2 σημείων

Δεδομένα : $f, q : [a,b] \to \mathbb{R}$

Ζητούμενα : $u : [a,b] \to \mathbb{R}$

τ.ω $\begin{cases} -u'' + qu = f & \text{στο } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

▸ Πρόβλημα αρχικών τιμών

Δεδομένα $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο : $y \; [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω

$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

(γράφουμε $y(t)$ γιατί το t είναι λύση)

Ύπαρξη και μοναδικότητα

ύπαρξη = τουλάχιστον 1 λύση
μοναδικότητα = το πολύ 1 »

• Γραμμικές Δ.Ε (πολυώνυμο 1ου βαθμού)

$f(t,y) = p(t)y + q(t)$

(η f πολυώνυμο το πολύ μέχρι πρώτου βαθμού ως προς y)

με $p, q \; [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς ($p, q \in \underbrace{C}_{\text{συνεχείς}}[a,b]$)

$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$ → Γραμμική ΔΕ

④

- Αν $q=0$, η ΔΕ λέγεται ομογενής, διαφορετικά λέγεται μη ομογενής.

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θέλω να βρω τη λύση. Για να το κάνω διακρίνω 2 περιπτώσεις:

<u>1η Περίπτωση</u> : $p(t)=0 \quad a \le t \le b$

$$y'(s) = q(s) \overset{\text{ολοκλ}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_a^t y'(s)\,ds}_{y(t)-y(a)} = \int_a^t q(s)\,ds =$$

μέχρι t γιατί το t ψάχνω

$y(a) = y_0$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 + \int_a^t q(s)\,ds \ , \quad a \le t \le b}$$

Βρήκα τη λύση και προφανώς είναι μοναδική

<u>2η Περίπτωση</u> : γενική

$$y'(s) = p(s)y(s) + q(s) \Rightarrow y'(s) - p(s)y(s) = q(s) \ *$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y'(s) + \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\right)' y(s)$$

$$\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}\right)' y(s) = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \underbrace{\left(-\int_a^s p(\tau)d\tau\right)'}_{-p(s)}$$

* Πολλαπλασιάζω με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$ και έχουμε:

$$\underbrace{e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y'(s) - e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} p(s)y(s)}_{\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s)\right)'} = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)$$

<u>Άρα:</u>

$$\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s)\right)' = e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)$$

→

Επομένως : $\underbrace{\int_a^t \left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} y(s)\right)' ds}_{e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} y(t) - 1\cdot y(a)} = \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds \Rightarrow$

γιατί $\int_a^a \dots = 0$ και $e^0 = 1$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau}}_{\text{διαιρώ για να φύγει}} y(t) = \underset{y_0}{\underset{\|}{y(a)}} + \int_0^t e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{+\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot \left[y_0 + \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds \right]$$ έχω λύση ύπαρξη και μοναδικότητα

λίγο διαφορετικά

$$y(t) = e^{\int_a^t p(\tau)d\tau} y_0 + \int_a^t e^{\int_s^t p(\tau)d\tau} q(s)\, ds$$

έχω $\int_a^t \cdot \int_a^s$, $\int_a^s \left(\int_s^t\right) \int_a^s$

2/10/2014

Προβλήματα αρχικών τιμών

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$y_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ύπαρξη - Μοναδικότητα

- Γραμμικές ΔΕ

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), & a \le t \le b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left[y_0 + \int_a^t q(s) e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \right], \quad \alpha \le t \le b$$

⑥

• **Μη ύπαρξη λύσης**

Παράδειγμα: $f(t,y) = y^2$

Θεωρώ το εξής πρόβλημα:

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

έχει μεγάλη σημασία αν επέλεγα κάτι μικρό μπορεί και να είχε λύση

Αν υπάρχει κάποια λύση η y' θα είναι θετική άρα y αύξουσα και επειδή στο 0 παίρνει 1 θα έχει πάνω από 1

• y αύξουσα
• ιδιαίτερα $y(t) > 0$

Γράφω:

$$y'(s) = (y(s))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y'(s)}{(y(s))^2} = 1 \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{y(s)}\right)' = \left((y(s))^{-1}\right)' = -(y(s))^{-2} \cdot y'(s)$$

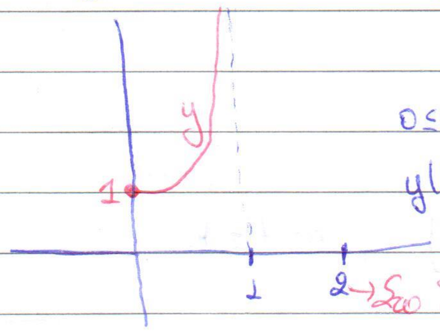
$$= -\frac{y'(s)}{(y(s))^2}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{y(s)}\right)' = 1 \xRightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\Rightarrow -\underbrace{\int_0^t \left(\frac{1}{y(s)}\right)' ds}_{\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)}} = \underbrace{\int_0^t ds}_{t} \Rightarrow$$

Βάζω το 0 για να χρησιμοποιήσω την αρχική τιμή

$$\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + 1 = t \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$



$0 \le t < 1$

$y(t) \to \infty$ για $t \to 1^-$ (από τα αριστερά)

έως δύο δεν μπορείς να φτάσεις οπότε δεν υπάρχει λύση.

50% θέμα: Δώστε ένα παράδειγμα αρχικών τιμών που δεν έχει λύση?

Παρατήρηση: Η $f(t,y)=y^2$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη (τις όσο θέλω θέλω)

Μη μοναδικότητα λύσης

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1. \\ y(0) = 0 & \rightarrow \text{είναι πολύ σημαντικό.} \end{cases}$$

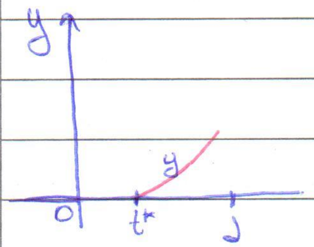
Θα βρω 2 λύσεις ώστε να μην υπάρχει μοναδικότητα:

1η λύση $y(t)=0$, $0 \le t \le 1$

2η λύση: Έστω $t^* \in (0,1)$. Θα κατασκευάσουμε μια λύση:

$$\begin{cases} y(t) = 0, & 0 \le t, t^* \\ y(t) > 0, & t^* < t \le 1 \end{cases}$$

Πρέπει να βρω αυτήν την y που να μηδενίζεται στο t^* και μετά να είναι θετική.



Θέλω να ισχύει ότι: → όχι απόλυτη τιμή γιατί βγαίνει θετική

$$y'(s) = \sqrt{y(s)} \Rightarrow \quad t^* < s \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1 \Rightarrow$$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$(\sqrt{y(s)})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y(s)}} y'(s)$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{y(s)})' = 1 \quad \xRightarrow{\text{ολοκληρώνω}}$$

$$\Rightarrow 2\underbrace{\int_{t^*}^{t} (\sqrt{y(s)})'}_{\sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)}} = \underbrace{\int_{t^*}^{t} ds}_{t-t^*} \Rightarrow$$

$\sqrt{y(t^*)}$: $=0$ εκεί έχω υποθέσει ότι μηδενίζεται

$$\Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{1}{2}(t-t^*)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(t-t^*)^2, \quad t^* < t \le 1$$ και για $t=0$ $y(t)=0$ όπως έχω πει.

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $f: [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή:

(+) $\exists L \geq 0 \quad \underbrace{\forall t\in[a,b]}_{\text{αυτό εξηγεί το ομοιόμορφο}} \quad \forall y_1,y_2\in\mathbb{R} \quad |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (*) έχει ακριβώς μια λύση.

Συνθήκη
$\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$\exists L\geq 0 \ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$
$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq L|x_1-x_2|$

Υπόθεση: Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως προς y.
θεώρημα μέσης τιμής

Τότε:

$$f(t,y_1)-f(t,y_2) = f_y(t,\tilde{y})(y_1-y_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})|\,|y_1-y_2|$$

Η f ικανοποιεί την (+), αν και μόνο αν
$\forall t\in[a,b] \quad \forall y\in\mathbb{R} \quad |f_y(t,y)| \leq L$ (δηλ. να είναι φραγμένη)

Θα δούμε αν ισχύει στα προηγούμενα παραδείγματα

- $f(t,y)=y^2 \rightsquigarrow f_y(t,y)=2y$
- $f(t,y)=\sqrt{y}, \ y>0 \rightsquigarrow f_y(t,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \to \infty$ στο $y\downarrow 0$

} Δεν ικανοποιούν την συνθήκη η οποία δεν είναι ικανή και αναγκαία

- Αν $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ έχουμε ολική συνθήκη του Lipschitz.
- Θέλω να την εξασθενίσω λίγο.

Θεώρημα (Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων)

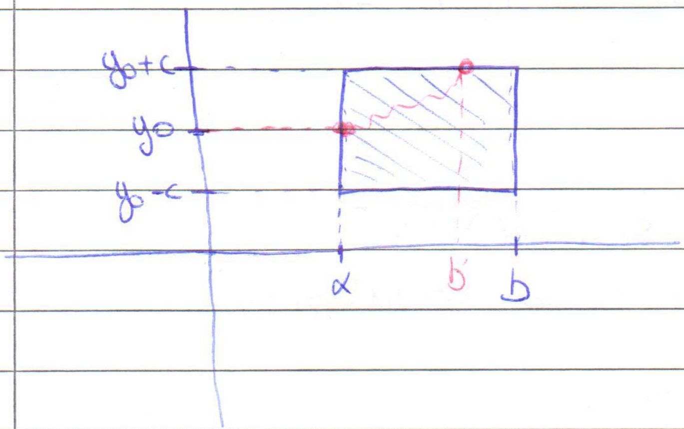
Έστω $c>0$ και $f:[a,b]\times[y_0-c, y_0+c]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε να ικανοποιεί την τοπική συνθήκη του Lipschitz στο $[y_0-c, y_0+c]$ ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

$\exists L\geq 0 \quad \underbrace{\forall t\in[a,b]}_{\text{ομοιόμορφο}} \quad \underbrace{\forall y_1,y_2\in[y_0-c,y_0+c]}_{\text{τοπική}} \quad |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$

η σειρά παίζει σημαντικό ρόλο

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (*) λύνεται μοναδικά, τουλάχιστον στο διάστημα $[a,b']$, όπου τ

$$A := \max_{\substack{a\le t\le b \\ y_0-c\le y\le y_0+c}} |f(t,y)| \quad \text{έχουμε} \quad b' := \min\left(b, a+\frac{c}{A}\right)$$

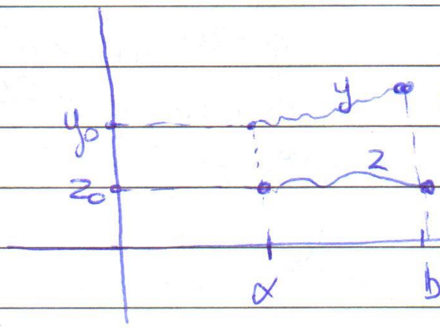


Παρατήρηση: Η συνέχεια της f και μόνο εξασφαλίζει ύπαρξη λύσεων σε ένα διάστημα $[a,c]$ με $c>a$ (Όχι μοναδικότητα).

Ευστάθεια

Θεωρώ 2 προβλήματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a\le t\le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



Το πρόβλημα και είναι τι μπορώ να πω γι' αυτές τις διαφορές

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a\le t\le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Υποθέτω ότι τα προβλήματα μου έχουν μοναδική λύση.

$$y'(t) - z'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$$

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$. Τότε:

$$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,\varepsilon(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,\varepsilon(t)$$

Τι θέλω να εκτιμήσω $|\varepsilon(t)|$

$((\varepsilon(t))^2)' = 2\varepsilon(t)\varepsilon'(t)$

Αυτή για την οποία θα χρησιμοποιήσω το τετράγωνο γιατί είναι το ίδιο

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

↘

10

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη του Lipschitz.

Τότε:

$$\frac{2}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le \underbrace{|f(t,y(t)) - f(t,z(t))|}_{\le L\,|\underbrace{y(t)-z(t)}_{\varepsilon(t)}|\ \le L|\varepsilon(t)|} |\varepsilon(t)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le L(\varepsilon(t))^2 \qquad \text{θέτω } \varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$$

Τότε:

$$\Rightarrow \varphi'(t) - 2L\varphi(t) \le 0$$

ολοκληρωτικός παράγοντας ←

$$e^{-2Lt}[\varphi'(t) - 2L\varphi(t)] \le 0$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow (e^{-2Lt}\varphi(t))' \le 0$$

Άρα η $e^{-2Lt}\varphi(t)$ είναι φθίνουσα.

Ιδιαίτερα έχω:

$$e^{-2Lt}\varphi(t) \le e^{-2La}\varphi(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \le e^{2L(t-a)}\varphi(a)$$

$$\overset{\text{αντικατ.}}{\Rightarrow} \varepsilon(t)^2 \le e^{2L(t-a)}\varepsilon(a)^2$$

$$\overset{\text{ρίζα}}{\Rightarrow} |\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

$$\Rightarrow \max_{a\le t\le b} \underbrace{|\varepsilon(t)|}_{y(t)-z(t)} \le e^{L(b-a)} \underbrace{|\varepsilon(a)|}_{y_0-z_0}$$

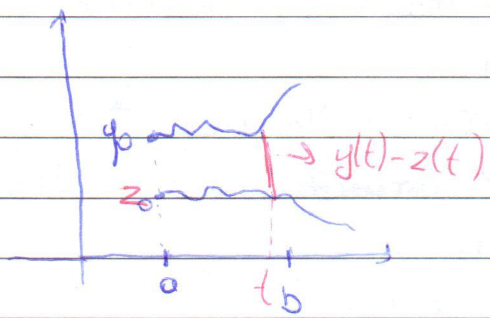
Λέει πως αν $y_0 - z_0 \to 0$ το $y(t) - z(t) \to 0$

Χρήσιμη πρακτικά είναι αυτή η εκτίμηση για μικρές τιμές $\boxed{L(b-a)}$

7/10/2014

Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Τα προβλήματα έχουν μοναδική λύση

Θέτω $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$

Τότε $\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \Rightarrow$

θέλω να εκτιμήσω το $\varepsilon(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t)}_{\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)'} = \left[f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right]\varepsilon(t)$$

▷ Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

- 1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz,

$$\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' \le L\underbrace{|y(t) - z(t)|\,|\varepsilon(t)|}_{(\varepsilon(t))^2} \Rightarrow$$

$$\overset{(\text{πριν})}{\Rightarrow} \ldots \quad (\varepsilon(t))^2 \le e^{2L(t-a)}(\varepsilon(a))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)}|\varepsilon(a)|$$

Δηλαδή

→ αύξουσα αυξάνεται το max είναι κατά στο b.

$$|y(t) - z(t)| \le e^{L(t-a)}|y_0 - z_0| \qquad \forall t \in [a,b]$$

Ιδιαίτερα:

$$\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le e^{L(b-a)}|y_0 - z_0|$$

• 2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη το Lipschitz, δηλαδή:

$\forall t\in[a,b]\ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}\quad \underbrace{[f(t,y_1)-f(t,y_2)](y_1-y_2)\le 0}_{f(t,\cdot)\text{ είναι φθίνουσα}}$ (το εκτιμάμε από την μια πλευρά) (ενώ στις εκτιμήσεις των απολύτων τιμών εκτιμάμε και από τις 2 πλευρές)

Έχουμε

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \underbrace{[f(t,y(t))-f(t,z(t))][\overbrace{y(t)-z(t)}^{\varepsilon(t)}]}_{\le 0\ \text{(από υπόθεση)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)'\le 0 \Rightarrow \left((\varepsilon(t))^2\right)'\le 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2$ είναι φθίνουσα
$\Rightarrow |\varepsilon(t)|$ είναι φθίνουσα $\Big\}\ |\varepsilon(t)|\le|\varepsilon(a)|\quad t\ge a \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y(t)-z(t)|\le|y_0-z_0|\quad \forall t\in[a,b]$$

Άρα την αποδείξαμε:

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}\quad [\varphi(x_1)-\varphi(x_2)](x_1-x_2)\le 0$

- Αν $x_1>x_2 \Rightarrow \varphi(x_1)-\varphi(x_2)\le 0 \Rightarrow \varphi(x_1)\le\varphi(x_2)$
- Αν $x_1<x_2 \Rightarrow \varphi(x_1)-\varphi(x_2)\ge 0 \Rightarrow \varphi(x_1)\ge\varphi(x_2)$

Δηλαδή:

η φ είναι φθίνουσα (για να μιλάμε για φθίνουσα ή αύξουσα πρέπει να είναι συνάρτηση 1 μεταβλητής)

• Θα δούμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις:

- $f(t,y)=\lambda(t)y+f(t)$ Γραμμική Δ.Ε

Πότε ικανοποιεί αυτή η f την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz;

Έχουμε:

$$f(t,y_1)-f(t,y_2)=\lambda(t)(y_1-y_2)\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{πολ/ζω }(y_1-y_2)} [f(t,y_1)-f(t,y_2)](y_1-y_2)=\lambda(t)\underbrace{(y_1-y_2)^2}_{\ge 0}$$

Για να είναι ≤ 0 αφού το ≥ 0 πρέπει $\lambda(t)\le 0$

Απάντηση: Αν και ίσως αν $\lambda(t) \leq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Στην περίπτωση γραμμικής ΔΕ για την ευστάθεια αρκεί να θεωρήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, δηλαδή

$$\begin{cases} y' = \lambda(t)\, y \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad\qquad y'(t) = \lambda(t) y(t) + f(t)$$
$$z'(t) = f(t, z(t)) \qquad\qquad z'(t) = \lambda(t) z(t) + f(t)$$

$\Big\}$ αφαιρούμε $\Rightarrow$

$$y'(t) - z'(t) = \lambda(t)\,[y(t) - z(t)]$$

$$\underbrace{[y(t) - z(t)]}_{\tilde{y}(t)}{}' = \lambda(t)\, \underbrace{[y(t) - z(t)]}_{\tilde{y}(t)}$$

$$\boxed{\tilde{y}'(t) = \lambda(t)\, \tilde{y}(t)}$$

Αρκεί τότε να δείξουμε μια εκτίμηση της μορφής:

$$|y(t)| \leq \cdots |y_0|$$

Ειδική περίπτωση $\lambda(t) = \lambda \in \mathbb{R}$ (να είναι σταθερό)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0 \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Λύση:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

ίδιο τάξης στο διάστημα

(για $\lambda \geq 0$ πάει στο άπειρο)

Νο → Πρόβλημα δοκιμής

Για $\lambda \leq 0$:

$$|y(t)| = e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda \cdot 0} = 1 \text{ (φραγμένη)}$$

Γενικότερο πρόβλημα: $\lambda \in \mathbb{C}$ (μιγαδικός)

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0 \quad Re\,\lambda \leq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow |y(t)| \leq 1$$

αν $Re\,\lambda \geq 0$ πάει στο άπειρο

Συστήματα Σ.Δ.Ε

Δεδομένα $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής ($m \in \mathbb{N}$)

$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ — θεωρώ πάλι το ίδιο αλλά για ένα σύστημα

$$(*) \begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για συστήματα ΔΕ)
Έστω ότι η f είναι συνεχής και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, ως προς μια νόρμα $\|\ \|$ του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή
$\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \le L\|x - \tilde{x}\|$

Τότε το πρόβλημα ΑΤ (*) έχει ακριβώς μια λύση.

Νόρμα
$\|\ \| \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ νόρμα:
(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^m$
$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
(N3)

Γραμμικό Σύστημα Σ.Δ.Ε

$$\begin{cases} y'(t) = \underset{\text{πίνακας}}{A(t)} y(t) + g(t), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$ και $g(t) \in \mathbb{R}^m$ (διάνυσμα) $\forall t \in [a,b]$

- Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
- Συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για μια ΔΕ τάξης $m \ge 2$,

$$(+) \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \le t \le b \\ y^{(i)}(a) = y_i, \ i = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

η γενίκευση του $y' = f(t,y)$

Ισχυρισμός Το πρόβλημα (+) ανάγεται σε αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα σύστημα Δ.Ε πρώτης τάξης

Απόδειξη:

Θέτουμε:

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$$

Τότε:

$$z(a) = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y''(a) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$$

γνωστά

εδώ να εμφανίζονται μόνο z

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) = y'(t) \\ z_2'(t) = y''(t) \\ \vdots \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix} := F(t, z(t))$$

Το πρόβλημα στο οποίο κατέληξα είναι ότι:

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)), & a \le t \le b \\ z(a) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

πρώτης τάξης

Ευστάθεια

1η περίπτωση Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με $\|\cdot\|$ την ευκλείδια νόρμα

Τότε ισχύει; αν y και z οι λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z) & , a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

ισχύει η εκτίμηση ευστάθειας:

- $\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in [a,b]$,

και αν πάρω το μέγιστο t ως προς όλα τα b

- $\max\limits_{a \le t \le b} \|y(t) - z(t)\| \le e^{L(b-a)} \|y_0 - z_0\|$

9/10/2014

$\boxed{\text{Ασκήσεις}}$

$y' = p(t)y + q(t)$ | Από θεωρία:

$p, q \ [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής | $y'(t) = q(t) \rightsquigarrow y'(t) - p(t)y(t) = q(t)$

- $\boxed{\text{Άσκηση 1.1}}$ (υπόθεση $q(t) = 0$)

Ν.Δ.Ο οι λύσεις της εξίσωσης

$(*)\ y'(t) = p(t)y(t)$

είναι της μορφής $(+)\ y(t) = C_1 e^{\int_a^s p(s)ds}$ με C_1 σταθερά και $t \in [a,b]$

Λύση

Πρώτα θα δείξω ότι και οι δύο είναι συνεχής

$(+) \cdot y(t) = C_1 e^{\int_a^s p(s)ds} \overset{\text{παραγωγίζω}}{\Longrightarrow}$

$\cdot\ y'(t) = \underbrace{C_1 e^{\int_a^s p(s)ds}}_{y(t)} \underbrace{\left(\int_\alpha^t p(s)ds \right)'}_{p(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'(t) = y(t)p(t) \quad \forall t \in [a,b]$

Άρα αποδείξαμε ότι κάθε συνάρτηση με είσοδο αυτή (+) είναι λύση της συνάρτησης

• Αντίστροφα: Κάθε λύση y της (*) είναι της μορφής (+)

Έστω y λύση της (*), θεωρούμε την συνάρτηση:

$$u(t)=y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}, \forall t\in[a,b]$$

{Θέλω να αποδείξω ότι το u(t) είναι σταθερή άρα αρκεί να αποδείξω ότι η παράγωγος είναι 0.}

Έχουμε:

$$u'(t) = y'(t)e^{-\int_a^t p(s)ds} + y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\underbrace{\left(-\int_a^t p(s)ds\right)'}_{=-p(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = e^{-\int_a^t p(s)ds}\left[\underbrace{y'(t)-y(t)p(t)}_{=0 \leftarrow (*)}\right] = 0$$

$$\Rightarrow u(t)=C' \quad \forall t\in[a,b]$$

Άρα:

$$C' = y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=C'e^{\int_a^t p(s)ds}}$$

• Άσκηση 1.2' (η μέθοδος της μεταβολής των σταθερών)

Ν.Δ.Ο οι λύσεις της γενικής διαφορικής εξίσωσης

$$(**)\ y'(t)=p(t)y(t)+q(t) \quad \text{με } p,q\ [a,b]\to\mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

είναι της μορφής:

$$(++)\ y(t)=e^{\int_a^t p(s)ds}\left[C_0+\int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds\right] \quad \text{με } C_0 \text{ σταθερά}$$

Λύση

1. Με παραγώγιση διαπιστώνουμε ότι κάθε συνάρτηση y της μορφής (++) αποτελεί λύση της (**)

2. Θα αποδείξουμε ότι κάθε λύση $\tilde{y}$ της (**) είναι της μορφής (++)

Έστω $\tilde{y}$ μια τυχαία λύση της (**) και y μια λύση της (**) της μορφής (++). Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $\tilde{y}-y$. Τότε έχουμε:

$$\tilde{y}'(t) - y'(t) = p(t)\tilde{y}(t) + \cancel{q(t)} - [p(t)y(t) + \cancel{q(t)}]$$
$$= p(t)[\tilde{y}(t) - y(t)]$$

Δηλαδή η $\tilde{y}-y$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης ($q(t)=0$)

Επομένως σύμφωνα με την άσκηση 11 έχουμε:

$$\tilde{y}(t) - y(t) = C_1 e^{\int_a^t p(s)ds},$$

οπότε

$$\tilde{y}(t) = y(t) + C_1 e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Συμπέρασμα: Και η $\tilde{y}$ είναι της μορφής (++) με άλλη σταθερά (λόγω στο $y(t)$ αυτό που ισχύει και βγαίνει)

3. Πώς καταλήγουμε στην (++);

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λύσεις της μορφής

(+++) $y(t) = C_1(t) e^{\int_a^t p(s)ds}$

με κατάλληλη συνάρτηση $C_1(t)$ (για να ήταν C_1 το $q(t)=0$)

Έχουμε: Αν η (+++) είναι λύση της (*) τότε θα έχουμε:

$$p(t)y(t)+q(t) = y'(t) \overset{(+++)}{=} C_1'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} + \underbrace{C_1(t)e^{\int_a^t p(s)ds}\, p(t)}_{y(t)}$$

$$= C_1'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} + p(t)y(t)$$

Άρα:

$$C_1'(t)e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t) \Rightarrow$$

$$\overset{t=s}{\Rightarrow} C_1'(t) = q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$$

$$\overset{\text{ολοκληρώνω}}{\Rightarrow} C_1(t) - C_0 = \int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds$$

$$\Rightarrow C_1(t) = C_0 + \int_a^t q(s)e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}ds$$

Αντικαθιστώντας αυτήν την $C_1(t)$ στην (+++) καταλήγουμε στην (++)

Συστήματα Σ.Δ.Ε

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $\quad y_0 \in \mathbb{R}^m$

Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

• Υπόθεση: Τα προβλήματα έχουν ακριβώς μία λύση.

Έστω $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

• 1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz

$\exists L > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m \ \|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \le L\|y - \tilde{y}\|$

Τότε, ισχύει

$$\|y(t) - z(t)\| \le e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\|$$

και

$$\max \|y(t) - z(t)\| \le e^{L(b-a)} \|y_0 - z_0\|$$

• 2η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι:

$$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$$

με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

• 2ο Πρόβλημα Δοκιμής

- Ισχυρισμός (Άσκηση 1.10)

Η $\|y(t) - z(t)\|$ είναι φθίνουσα, ιδιαίτερα

$$\max_{a \le t \le b} \|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\|$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$. Τότε

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Άρα: (παίρνω εσ. γινόμενο)

$$\boxed{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t))}$$

→

Τώρα:

$$\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' = \frac{1}{2}\left((\varepsilon_1(t))^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2\right)' =$$

$$= \varepsilon_1'(t)\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2'(t)\varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_m'(t)\varepsilon_m(t) =$$

$$\boxed{=\left(\varepsilon_1^{\bullet}(t), \varepsilon(t)\right)}$$

Επομένως

$$\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' = \left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t)\right)$$

$$= \underbrace{\left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), y(t)-z(t)\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)' \leq 0 \Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \text{ φθίνουσα}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\| \text{ φθίνουσα}$$

$$\Rightarrow \|y(t)-z(t)\| \text{ φθίνουσα}$$

$$\Rightarrow \|y(t)-z(t)\| \leq \|\overset{y_0}{y(a)} - \overset{z_0}{z(a)}\|$$

$$\Rightarrow \|y(t)-z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$ (το δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από το t και παίρνω max)

$$\Rightarrow \max_{a\leq t\leq b} \|y(t)-z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$$

Πότε ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη του Lipschitz στην γραμμική περίπτωση;

$$y'(t) = \underbrace{A(t)y(t) + g(t)}_{f(t,y(t))}$$

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t)x + \cancel{g(t)} - [A(t)\tilde{x} + \cancel{g(t)}]$$

$$= A(t)x - A(t)\tilde{x}$$

$$= A(t)(x-\tilde{x})$$

Απάντηση: Αν και μόνο αν

$$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ \left(A(t)\underbrace{(x-\tilde{x})}_{z}, \underbrace{x-\tilde{x}}_{z}\right) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t\in[a,b]\ \forall z\in\mathbb{R}^m\ \left(A(t)z, z\right) \leq 0$$

Δηλαδή οι πίνακες $A(t)$, $t\in[a,b]$ είναι αρνητικά ημιορισμένοι

(Θα δούμε το 1ο πρόβλημα δοκιμής πως ανάγεται με το 2ο)

① 1ο Πρόβλημα δοκιμής

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον $Re\lambda \leq 0$ (φραγμένη)

② 2ο Πρόβλημα δοκιμής

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$\forall t \in [a,b]$ $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0$

• Θέλω να δείξω το ότι το ① είναι ειδική περίπτωση του 2

$\lambda = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$y(t) = y_1(t) + i y_2(t)$, $y_1, y_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$y'(t) = \lambda y(t) \iff y_1'(t) + i y_2'(t) = (a+ib)(y_1(t) + i y_2(t))$$
$$= (a y_1(t) - b y_2(t)) + i (a y_2(t) + b y_1(t))$$

$$\iff \left.\begin{aligned} y_1'(t) &= a y_1(t) - b y_2(t) \\ y_2'(t) &= a y_2(t) + b y_1(t) \end{aligned}\right\} \overset{\text{ως σύστημα}}{\iff} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a y_1(t) - b y_2(t) \\ a y_2(t) + b y_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Ερώτηση: Πότε είναι ο A αρνητικά ημιορισμένος?

Έχουμε $$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a x_1 - b x_2 \\ b x_1 + a x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (a x_1 - b x_2) x_1 + (b x_1 + a x_2) x_2$$

$$= a x_1^2 - \cancel{b x_1 x_2} + \cancel{b x_1 x_2} + a x_2^2$$

$$= a \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_{\geq 0} \iff a \leq 0$$

άρα το a είναι το $Re\lambda$

άρα $Re\lambda \leq 0$

άρα το ① είναι αρνητικό

αυτή είναι ειδική περίπτωση.