~ Υπολογιστικά Μαθηματικά. ~

~ Σημειώσεις. ~

~ Χειμερινό Εξάμηνο. ~

~ 2014 - 2015. ~

→ Διαδικαστικά: $\boxed{30/09/14}$

- Ιστοσελίδα μαθήματος
- Θεωρία : Τρίτη 11-13
  Πέμπτη 12-13
- Ασκήσεις : Πέμπτη 11-12.
- Εργαστηριακές Ασκήσεις (2 ή 3)
- Ενδιάμεσες εξετάσεις. 1η Ε.Ε: 15-11-14.
  2η Ε.Ε: 6-12-14.
  3η Ε.Ε: 10-1-15.

→ Περιεχόμενο Μαθήματος (συνοπτικά):

- Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε.): εξισώσεις (με άγνωστη μια συνάρτηση) στις οποίες εμφανίζονται και παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης.

- Συνήθεις Δ.Ε: Η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.
  Εφαρμογές: φυσικές επιστήμες, τεχνολογία, ιατρική, ...

για να περιγράφουν οι Δ.Ε. κατά μοναδικό τρόπο κάποιο φαινόμενο, απαιτούνται πρόσθετες συνθήκες π.χ:
- αρχικές συνθήκες
- συνοριακές συνθήκες.

1. Προβλήματα Αρχικών τιμών:

Δεδομένα: $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.
$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
$y_0 \in \mathbb{R}$

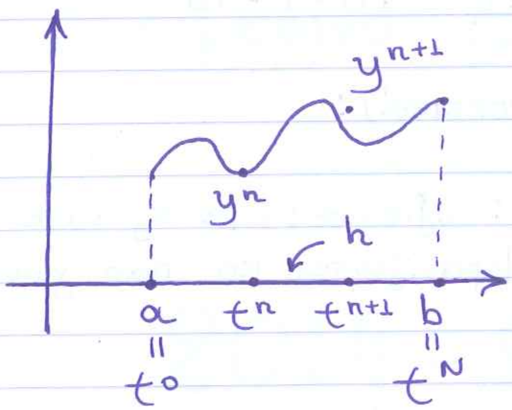
Ζητούμενο: $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη τ.ω:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Θέματα: 1. Ύπαρξη λύσης.
2. Μοναδικότητα λύσης.
3. Ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση)
4. Γενίκευση για συστήματα Δ.Ε.
5. Επίλυση Δ.Ε. απλής μορφής:
γραμμικές, Bernoulli, Riccati
με χωριζόμενες μεταβλητές, ομογενείς, πλήρεις
γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε με σταθερούς
συντελεστές.

δεν περιέχεται στο βιβλίο

2. Η Μέθοδος του Euler:



Έστω $N \in \mathbb{N}$:
Θέτουμε $h = \dfrac{b-a}{N}$

και θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα h, δλδ με κόμβους

δείκτης

$$t^n = a + n \cdot h, \quad n = 0, \dots, N$$

Μέθοδος του Euler δίνει προσεγγίσεις

δείκτης

y^n των τιμών $y(t^n)$ που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Θέματα: 1. Πως οδηγούμαστε στην μέθοδο;
2. Κόστος της μεθόδου ανα βήμα.
3. Ποιότητα των προσεγγίσεων;
4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα;
5. Πότε χρησιμοποιείται η μέθοδος και πότε χρειάζεται να καταφύγουμε σε άλλες μεθόδους.

3. Μέθοδοι των Runge - Kutta

4. Πολυβηματικές Μέθοδοι.

5. Πρόβλημα δύο σημείων:

- **Δεδόμενα:** $f, q : [a,b] \to \mathbb{R}$
- **Ζητούμενο:** $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ τ.ω:

$$\begin{cases} -u'' + qu = f \text{ στο } [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

---

1. Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

Δεδομένα: $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
$y_0 \in \mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγ. τ.ω:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \; a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

→ Ύπαρξη και μοναδικότητα:

- Γραμμικές Δ.Ε: $f(t,y) = p(t) \cdot y + q(t)$
  (η f πολ. το πολύ μέχρι 1ου βαθμού ως προς y)
  με $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς.
  ($p, q \in C[a,b]$)

$y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)$ γραμμική Δ.Ε.

Αν $q=0$, η Δ.Ε. λέγεται ομογενείς.
διαφορετικά λέγεται μη ομογενείς.

"S.O.S"

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t), & \alpha \leq t \leq b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση: $p(t)=0$, $\alpha \leq t \leq b$

$$y'(s) = q(s) \Rightarrow \underbrace{\int_\alpha^t y'(s)\,ds}_{} = \int_\alpha^t q(s)\,ds$$

$$= y(t) - \underbrace{y(\alpha)}_{=y_0}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_\alpha^t q(s)\,ds, \quad \alpha \leq t \leq b$$

2η περίπτωση: (γενική):

$$y'(s) = p(s)\cdot y(s) + q(s) \Rightarrow y'(s) - p(s)\cdot y(s) = q(s) \quad (*)$$

Θα είναι ότι: $\left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot y(s)\right)' = e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot y'(s)$

$$+ \underbrace{\left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\right)'}_{=} \cdot y(s)$$

$$e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \underbrace{\left(-\int_\alpha^s p(\tau)\,d\tau\right)'}_{=-p(s)} \qquad = \left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot y(s)\right)'$$

$$(*) = e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot y'(s) - e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot p(s)\cdot y(s) =$$

$$= e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} \cdot q(s)$$

Άρα $\left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\cdot y(s)\right)' = e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\cdot q(s)$

Επομένως:

$$\underbrace{\int_\alpha^t \left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} y(s)\right)' ds}_{= e^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}\cdot y(t) - y(\alpha)} = \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\cdot q(s)\, ds$$

$$\Rightarrow e^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}\cdot y(t) = y_0 + \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}\cdot\left[y_0 + \int_\alpha^t e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau} q(s)\, ds\right]$$

$a \leq t \leq b$.

εναλλακτικά:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{\int_\alpha^t p(\tau)d\tau} + \int_\alpha^t e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}\cdot q(s)\, ds$$

$\boxed{02/10/14} \Rightarrow$ • Μη ύπαρξη λύσης:

S.O.S

→ Παράδειγμα: $f(t,y) = y^2$

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) & (\acute{\eta}\ y' = y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ να ισχύει: $0 \leq t \leq 2$

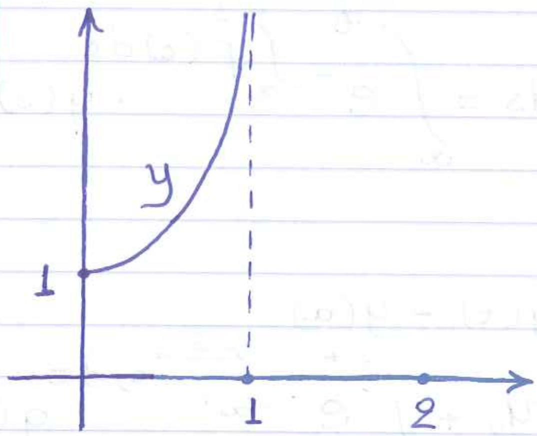
• y αύξουσα, ιδιαιτέρα $y(t) > 0$.

$\left(\dfrac{1}{y(s)}\right)' = -\dfrac{y'(s)}{(y(s))^2}$

$$y'(s) = (y(s))^2 \Rightarrow \frac{y'(s)}{(y(s))^2} = 1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{y(s)}\right)' = 1 \Rightarrow \underbrace{-\int_0^t \left(\frac{1}{y(s)}\right)' ds}_{= \frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)}} = \overbrace{\int_0^t 1\, ds}^{\to\ t-0=t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y(t)} + 1 = t \Rightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$$



$0 \leq t < 1$

$y(t) \to \infty$ για $t \to 1^-$

δεν υπάρχει λύση

Θέλω να δείξω ότι υπάρχει λύση στο $[0,2]$, βρήκα μια λύση αλλά δεν ξέρουμε αν ανήκει στο $[0,2]$.

- παρατήρηση: Η $f(t,y) = y^2$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. (συνεχώς).

- Μη μοναδικότητα λύσης:

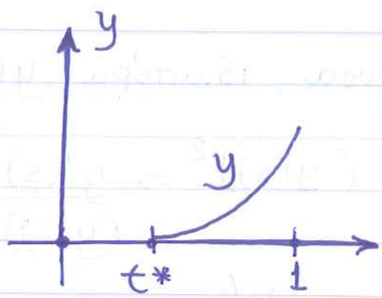
→ Παράδειγμα:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

μια λύση είναι: $y(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$.

Έστω $t^* \in (0,1)$ θα κατασκευάσουμε μια λύση:

$y(t) = 0$, $0 \leq t \leq t^*$
$y(t) > 0$, $t^* < t \leq 1$



$y'(s) = \sqrt{y(s)}$, $t^* < t \leq 1$.

$$\frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1 \Rightarrow 2\left(\sqrt{y(s)}\right)' = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \displaystyle\int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \int_{t^*}^{t} ds \end{array} \right\} \Rightarrow = t - t^*$$

$$\sqrt{y(t)} - \cancel{\sqrt{y(t^*)}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{1}{2}\cdot(t-t^*) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(t-t^*)^2$$
$t^* < t \leq 1.$

- Θεώρημα: (ύπαρξη κ' μοναδικότητα λύσεων).

Έστω $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή:

ολική

$$(+)\quad \exists L\geq 0 \;\; \forall t\in[a,b] \;\; (\forall y_1, y_2\in\mathbb{R}) \;\; |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L\cdot|y_1-y_2|$$

τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει ακριβώς μια λύση.

"Lipschitz:"

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$\exists L\geq 0 \;\; \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$
$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leq L\cdot|x_1-x_2|$

- Υπόθεση: Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως προς y.
Τότε:

$$f(t,y_1)-f(t,y_2) = f_y(t,\tilde{y})\cdot(y_1-y_2)$$

$$\Rightarrow |f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})|\cdot|y_1-y_2|$$

Η f ικανοποιεί την $(+)$ αν και μόνο αν
$\forall t\in[a,b] \;\; \forall y\in\mathbb{R} \;\; |f_y(t,y)|\leq L.$

- $f(t,y)=y^2 \rightsquigarrow f_y(t,y)=2\cdot y$ (δεν ικανοποιεί).

- $f(t,y)=\sqrt{y}$, $y>0$ $\quad f_y(t,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\to\infty$, $y\downarrow 0$
(δεν ικανοποιεί την συνθήκη)

- Θεώρημα: (τοπική ύπαρξη κ' μοναδικότητα λύσεων)

Έστω $c>0$ και $f:[a,b]\times[y_0-c, y_0+c]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τ.ω να ικανοποιεί την τοπική συνθήκη του Lipschitz στο $[y_0-c, y_0+c]$ ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή:

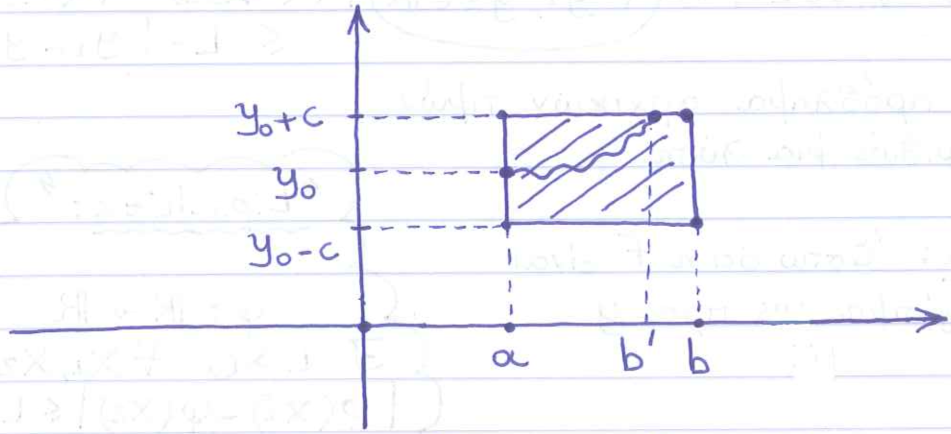
τοπική

$\exists\, L \geq 0 \ \forall t \in [\alpha, b] \ \forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c]$

$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών λύνεται μονοσήμαντα, <u>τουλάχιστον</u> στο διάστημα $[\alpha, b']$, όπου με

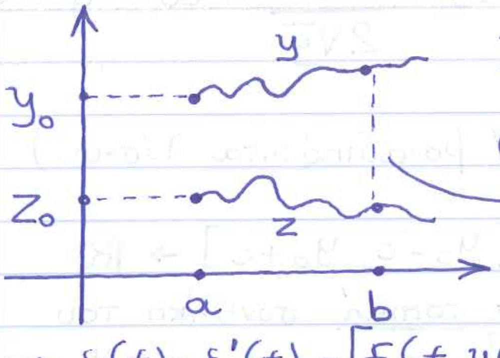
$A = \max\limits_{\substack{\alpha \leq t \leq b \\ y_0 - c \leq y \leq y_0 + c}} |f(t,y)|$ έχουμε $b' = \min\left(b, \alpha + \dfrac{c}{A}\right)$.



- <u>παρατήρηση</u>: Η συνέχεια της f και μόνο εξασφαλίζει ύπαρξη λύσης σε ένα διάστημα $[\alpha, c]$ με $c > \alpha$ (όχι μοναδικότητα).

- <u>Ευστάθεια</u>: $\begin{cases} y' = f(t, y), & \alpha \leq t \leq b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$

$\begin{cases} z' = f(t, z), & \alpha \leq t \leq b \\ z(\alpha) = z_0 \end{cases}$ υποθέτω ότι έχουν μοναδική λύση.



$y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$

Θέτουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$, τότε

$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t)} = [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \left[f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right]\cdot\varepsilon(t)$$

• **1η περίπτωση:** Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη.

Τότε: $$\frac{1}{2}\cdot\left((\varepsilon(t))^2\right)' \leq \underbrace{\left|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right|}_{\leq L\cdot|\varepsilon(t)|}\cdot|\varepsilon(t)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left((\varepsilon(t))^2\right)' \leq L\cdot(\varepsilon(t))^2$$

Θέτουμε $\varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$ τότε:

$$\varphi'(t) - 2\cdot L\varphi(t) \leq 0. \Rightarrow e^{-2Lt}\cdot(\varphi'(t) - 2L\varphi(t)) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{-2Lt}\cdot\varphi(t)\right)' \leq 0 \Rightarrow \text{η } e^{-2Lt}\cdot\varphi(t) \text{ φθίνουσα.}$$

Ιδιαίτερα $e^{-2Lt}\cdot\varphi(t) \leq e^{-2La}\cdot\varphi(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\cdot\varphi(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq e^{2L(t-a)}\cdot(\varepsilon(a))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)}\cdot|\varepsilon(a)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{a\leq t\leq b}\underbrace{|\varepsilon(t)|}_{y(t)-z(t)} \leq e^{L(b-a)}\cdot\underbrace{|\varepsilon(a)|}_{y_0 - z_0}$$

Χρήσιμη πρακτικά είναι αυτή η εκτίμηση για μικρά $L\cdot(b-a)$.

$\boxed{07/10/14}$ • **2η περίπτωση:** υποθέτω ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, δηλ:

$$\forall t\in[a,b]\ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R},\ \left[f(t,y_1) - f(t,y_2)\right]\cdot(y_1-y_2) \leq 0.$$

το κρατάω σταθερό.

$f(t,\cdot)$ φθίνουσα.

Έχουμε: (απο την 1^{η} περίπτωση)

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \underbrace{\left[f(t,y(t)) - f(t,z(t))\right]\cdot \overbrace{\left[y(t) - z(t)\right]}^{=\varepsilon(t)}}_{\leq 0 \text{ (υπόθεση)}}$$

$\Rightarrow \left((\varepsilon(t))^2\right)' \leq 0 \Rightarrow (\varepsilon(t))^2$ φθίνουσα συνάρτηση.

$\Rightarrow |\varepsilon(t)|$ φθίνουσα.

$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon(\alpha)|$

$\Rightarrow |y(t) - z(t)| \underset{1}{\leq} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in [\alpha, b]$.

(τέλος απόδειξης).

- $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \left[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right]\cdot(x_1 - x_2) \leq 0$.

α) $x_1 > x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$

β) $x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geq 0 \Rightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$

δηλαδή η φ είναι φθίνουσα.

- $f(t,y) = \lambda(t)\cdot y + \mu(t)$ γραμμική Δ.Ε.

πότε ικανοποιεί αυτή η f την μονοπλευρη συνθήκη του Lipschitz;

$f(t,y_1) - f(t,y_2) = \lambda(t)\cdot(y_1 - y_2)$

$\Rightarrow \left[f(t,y_1) - f(t,y_2)\right]\cdot(y_1 - y_2) = \lambda(t)\cdot \underbrace{(y_1 - y_2)^2}_{\geq 0}$

Απάντηση: Αν και μόνο αν $\lambda(t) \leq 0 \quad \forall t \in [\alpha, b]$.

Στην περίπτωση γραμμικής Δ.Ε. για την ευστάθεια αρκεί να θεωρήσουμε ενα πρόβλημα αρχικών τιμών για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, δηλαδή:

$$\begin{cases} y' = \lambda(t)\cdot y \ , \ a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \qquad & y'(t) &= \lambda(t)\cdot y(t) + \mu(t) \\ z'(t) &= f(t, z(t)) \qquad & z'(t) &= \lambda(t)\cdot z(t) + \mu(t) \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow y'(t) - z'(t) = \lambda(t)\cdot\left[y(t) - z(t)\right] \Rightarrow$$

$$\Big[\underbrace{y(t) - z(t)}_{\tilde{y}(t)}\Big]' = \lambda(t)\cdot\Big[\underbrace{y(t) - z(t)}_{\tilde{y}(t)}\Big] \Rightarrow$$

$$\tilde{y}'(t) = \lambda(t)\cdot\tilde{y}(t)$$

Αρκεί τότε να δείξουμε μια εκτίμηση της μορφής:
$|y(t)| \leq \ldots\ |y_0|$.

- Ειδική περίπτωση: $\lambda(t) = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\cdot y(t) \ , \ t \geq 0. \\ y(a) = \cancel{y_0} \ \ 1 \end{cases}$$

πρόβλημα δοκιμής.

$$y(t) = y_0\cdot e^{\lambda t}$$

για $\lambda \leq 0$ $\quad |y(t)| = e^{-\lambda t} \leq e^{-\lambda\cdot 0} = 1.$

- γενικότερο πρόβλημα: $\lambda \in \mathbb{C}$ (λ ανήκει στους μιγαδικούς).

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\cdot y(t) \ , \ t \geq 0 \ , \ Re\lambda \leq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow |y(t)| \leq 1.$$

→ Συστήματα Σ.Δ.Ε : $m \in \mathbb{N}$.

- Δεδομένα: $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής.
  $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

- Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$$(*) \begin{cases} y' = f(t,y) \;, \; a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Θεώρημα: (ύπαρξη κ' μοναδικότητα λύσεων για συστήματα Δ.Ε.)

Έστω ότι η f είναι συνεχής και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t,

$$\exists \; L \geq 0 \;\; \forall t \in [a,b] \;\; x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \;\; |f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}|.$$

ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή:

$$\exists \; L \geq 0 \;\; \forall t \in [a,b] \;\; x, \tilde{x} \in \mathbb{R} \;\; \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\|.$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (*) έχει ακριβώς μια λύση.

- Γραμμικό Σύστημα Σ.Δ.Ε:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t) \cdot y(t) + g(t) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $\underbrace{A(t)}_{\text{πίνακας!}} \in \mathbb{R}^{n,m}$ και $\overbrace{g(t)}^{\text{διάνυσμα!}} \in \mathbb{R}^m \;\; \forall t \in [a,b]$

→ Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης: (Συστημα Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης)

Ας θεωρήσουμε το προβλημα αρχικων τιμών για μια διαφορική εξίσωση τάξης $m \geq 2$,

$$\oplus \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & a \leq t \leq b. \\ y^{(i)}(a) = y_i, & i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

- Ισχυρισμός: Το πρόβλημα ⊕ ανάγεται σε αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών για ενα σύστημα Δ.Ε. πρώτης τάξης.

- Απόδειξη: Θέτουμε:

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$$

τότε:

$$z(a) = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y''(a) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \leftarrow \text{γνωστά!}$$

$$z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix} = F(t, z(t))$$

$$\begin{cases} z'(t) = F(t, z(t)), \quad a \leq t \leq b. \\ z(a) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$ πρώτης τάξης.

• Ευστάθεια:

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz με $\|\cdot\|$ την Ευκλίδεια νόρμα.

Τότε: αν y και z οι λύσεις των

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t, z), \quad a \leq t \leq b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

ισχύει η εκτίμηση ευστάθειας:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-a)} \cdot \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in [a, b].$$

και

$$\max_{a \leq t \leq b} \|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(b-a)} \cdot \|y_0 - z_0\|.$$

$\boxed{09.10.14}$ • **2η περίπτωση:** Η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz:

$$\forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ \left(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}\right) \leq 0.$$

με $(\cdot,\cdot)$ το ευκλίδειο εσωτερικό γινόμενο.

• **Πρόβλημα δοκιμής:** (άσκηση 1.10)

Ισχυρισμός: Η $\| y(t) - z(t) \|$ είναι φθίνουσα, ιδιαίτερα θα έχουμε ότι:

$$\max_{a \leq t \leq b} \| y(t) - z(t) \| \leq \| y_0 - z_0 \|.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$, τότε:

$$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Άρα:

$$\left(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)\right) = \left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t)\right).$$

Τώρα:

$$\left(\| \varepsilon(t) \|^2\right)' \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left((\varepsilon_1(t))^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2\right)' =$$

$$= \varepsilon_1(t) \cdot \varepsilon_1'(t) + \varepsilon_2'(t) \cdot \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_m'(t) \cdot \varepsilon_m(t) =$$

$$= \left(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)\right)$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\| \varepsilon(t) \|^2\right)' = \left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t)\right) =$$

$$= \underbrace{\left(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), y(t) - z(t)\right)}_{\leq 0.}$$

$\Rightarrow \left(\| \varepsilon(t) \|^2\right)' \leq 0 \Rightarrow \| \varepsilon(t) \|^2$ φθίνουσα.

$\Rightarrow \| \varepsilon(t) \|$ φθίνουσα $\Rightarrow \| y(t) - z(t) \|$ φθίνουσα $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \| y(t) - z(t) \| \leq \| y(a) - z(a) \|$$

$$\Rightarrow \| y(t) - z(t) \| \leq \| y_0 - z_0 \|$$

$$\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} \| y(t) - z(t) \| \leq \| y_0 - z_0 \| \quad a \leq t \leq b.$$

- Πότε ικανοποιείται η μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz στη γραμμική περίπτωση;

$$y'(t) = \underbrace{A(t) \cdot y(t) + g(t)}_{f(t, y(t))}$$

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t) \cdot x + \cancel{g(t)} - [A(t) \cdot \tilde{x} + \cancel{g(t)}]$$

$$= A(t) \cdot (x - \tilde{x}).$$

Απάντηση: Αν και μόνο αν $\forall t \in [a,b]$ $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$$(A(t) \cdot \underbrace{(x-\tilde{x})}_{=z}, \underbrace{x - \tilde{x}}_{=z}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [a,b] \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \quad (A(t) \cdot z, z) \leq 0.$$

δηλ. οι πίνακες $A(t)$, $t \in [a,b]$, είναι αρνητικά ημιοριομένοι.

- 1º πρόβλημα δοκιμής: $\lambda \in \mathbb{C}$ (λ ανήκει στους μιγαδικούς).

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda \cdot y(t), & t \geq 0. \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα: $Re\lambda \leq 0$. (πραγματικό μέρος).

- 2º πρόβλημα δοκιμής: $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ \left(f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\ x-\tilde{x}\right)\leq 0.$$

$\lambda = \alpha + i\cdot\beta \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

$y(t) = y_1(t) + i\cdot y_2(t) \quad , \quad y_1, y_2 : [0,\infty)\to\mathbb{R}.$

$$y'(t) = \lambda\cdot y(t) \iff y_1'(t) + i\cdot y_2'(t) = (\alpha+\beta i)\cdot(y_1(t)+i\cdot y_2(t))$$

$$= \left(\alpha\cdot y_1(t) - \beta\cdot y_2(t)\right) + i\cdot\left(\alpha\cdot y_2(t) + \beta\cdot y_1(t)\right)$$

$$\iff \left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha\cdot y_1(t) - \beta\cdot y_2(t) \\ y_2'(t) &= \alpha\cdot y_2(t) + \beta\cdot y_1(t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t)\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha y_1(t) - \beta y_2(t) \\ \alpha y_2(t) + \beta\cdot y_1(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}}_{=A}\cdot\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t)\end{pmatrix}$$

Ερώτηση: Πότε είναι ο A αρνητικά ημιορισμένος;

Έχουμε: $(Ax,x) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}\right) =$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\alpha x_1 - \beta x_2)x_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2)\cdot x_2 =$$

$$= \alpha x_1^2 - \cancel{\beta x_1 x_2} + \cancel{\beta x_1 x_2} + \alpha x_2^2 =$$

$$= \alpha(\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\geq 0}) \leq 0 \iff \alpha\leq 0$$

ΤΕΛΟΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ...

(*! Συμπλήρωμα 1ου Κεφαλαίου !*).

→ **Σ.Δ.Ε. Ειδικής Μορφής:** $\boxed{14.10.14}$

1. Γραμμικές Διαφορικές εξισώσεις ✓

2. Εξισώσεις του Bernoulli:

$$y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)\cdot [y(t)]^{\sigma}, \quad a \leq t \leq b. \quad (*)$$

$\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$.

• παρατήρηση: (α) για $\sigma=0$ ή $\sigma=1$ η Δ.Ε. είναι γραμμική.

(β) Αν $\sigma>0$, η $y(t)=0$ $\forall t \in [a,b]$ είναι λύση.

Θέτουμε $v(t) := [y(t)]^{1-\sigma}$.

Τότε:

$$v'(t) = (1-\sigma)\cdot [y(t)]^{-\sigma} \cdot y'(t).$$

, οπότε η (*) γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{1-\sigma}\cdot [y(t)]^{\sigma} \cdot v'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)\cdot [y(t)]^{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma}\cdot v'(t) = p(t)\cdot \frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}} + q(t).$$

$$\frac{y(t)}{[y(t)]^{\sigma}} = [y(t)]^{1-\sigma} = v(t).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\sigma}\cdot v'(t) = p(t)\cdot v(t) + q(t)$$

$$\Rightarrow v'(t) = (1-\sigma)\, p(t)\cdot v(t) + (1-\sigma)\cdot q(t).$$

Αυτή η Δ.Ε. είναι γραμμική ως προς την συνάρτηση v. Μπορούμε να τη λύσουμε. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στη $v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ βρίσκουμε τη ζητούμενη λύση $y(t)$.

- προσοχή!: για την $y(t)$ που θα βρούμε πρέπει να ορίζονται οι $[y(t)]^{1-\sigma}$ και $[y(t)]^{\sigma}$.

- Παράδειγμα: $y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2$, $a \leq t \leq b$.

$\sigma = 2.$, $y=0$ λύση. (τετριμμένη).

Θέτουμε $v(t) := [y(t)]^{1-2} = \dfrac{1}{y(t)}$

απαίτηση: $y(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$.

Έχουμε: $v'(t) = -\dfrac{1}{[y(t)]^2} \cdot y'(t)$.

Άρα η αρχική Δ.Ε. γράφεται στη μορφή:

$-[y(t)]^2 \cdot v'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -v'(t) = -\underbrace{\dfrac{1}{y(t)}}_{=v(t)} + 1. \Rightarrow v'(t) - v(t) = -1. \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-t} \cdot v'(t) - e^{-t} \cdot v(t) = -e^{-t} \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{t} \cdot v(t))' = -e^{-t} \Rightarrow e^{-t} \cdot v(t) = e^{-t} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = c \cdot e^{t} + 1}$

Επομένως: $y(t) = \dfrac{1}{c \cdot e^{t} + 1}$, $a \leq t \leq b$.

για να έχει νόημα αυτή η λύση πρέπει:

$c \cdot e^{t} + 1 \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$.

Αφού η $c \cdot e^{t} + 1$ είναι μονότονη είναι διάφορη του μηδενός στο $[a,b]$, αν και μόνο αν παίρνει στα άκρα a και b είτε θετικές τιμές (συγχρόνως) είτε αρνητικές.

3. Εξισώσεις του Riccati :

(+) $y'(t) = r(t) + p(t)\cdot y(t) + q(t)\cdot[y(t)]^2 \quad , \ a \leq t \leq b.$

Υπόθεση: Έστω y_ε μια λύση της (+).

Τότε θέτουμε: $y(t) = y_\varepsilon(t) + \dfrac{1}{z(t)} \quad , a \leq t \leq b.$ (1)

Τότε:

$$y'(t) = y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t). \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (1), (2) στην (+) και παίρνουμε:

$$y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t) = r(t) + p(t)\cdot\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t)\cdot\left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right]^2$$

Άρα:

$$\underbrace{\left\{y_\varepsilon'(t) - r(t) - p(t)\cdot y_\varepsilon(t) - q(t)\cdot[y_\varepsilon^2(t)]\right\}}_{=0 \text{ (όλο αφού η } y_\varepsilon \text{ είναι λύση της (+).)}} -$$

$$- \frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t) = \frac{p(t)}{z(t)} + q(t)\cdot 2\cdot y_\varepsilon(t)\cdot\frac{1}{z(t)} + q(t)\cdot\frac{1}{(z(t))^2}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $[z(t)]^2$ και αλλάζουμε πρόσημα, οπότε παίρνουμε:

$$z'(t) = \underbrace{-p(t)\cdot z(t) - 2q(t)\cdot y_\varepsilon(t)\cdot z(t)}_{\parallel} - q(t).$$

$$-\left[p(t) + 2q(t)\cdot y_\varepsilon(t)\right]\cdot z(t) - q(t).$$

Αυτή είναι γραμμική Δ.Ε. ως προς z....

• Παράδειγμα:

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

$y_\varepsilon(t) = \frac{1}{t}$ ειδική λύση.

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)} \Rightarrow y'(t) = \frac{-1}{t^2} - \frac{1}{(z(t))^2} \cdot z'(t).$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική Δ.Ε. παίρνουμε:

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right) - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{z'(t)}{(z(t))^2} = \cancel{\frac{1}{t^2}} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t \cdot z(t)} - \frac{2}{t \cdot z(t)} - \cancel{\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{(z(t))^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-z'(t)}{(z(t))^2} = \frac{-3}{t \cdot z(t)} - \frac{1}{(z(t))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'(t) = \frac{3}{t} \cdot z(t) + 1 \quad \text{γραμμική Δ.Ε.}$$

$$e^{\varphi(t)} \cdot z'(t) - \frac{3}{t} \cdot e^{\varphi(t)} \cdot z(t) = e^{\varphi(t)}$$

Επιλέγουμε μια φ έτσι ώστε: $\varphi'(t) = -\frac{3}{t}$.

π.χ. $\varphi(t) = -3 \cdot \log t$ και έχουμε:

$$\left(e^{\varphi(t)} \cdot z(t)\right)' = e^{\varphi(t)}.$$

Αλλά: $e^{\varphi(t)} = e^{-3\log t} = e^{-\log t^3} = e^{\log 1/t^3} = 1/t^3$

οπότε:

$$\left(\frac{1}{t^3}\cdot z(t)\right)' = \frac{1}{t^3}$$

Άρα:

$$\frac{1}{t^3}\cdot z(t) = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = c\cdot t^3 - \frac{t}{2}, \quad t\in[a,b].$$

• γενική λύση:

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t\cdot\left[ct^2 - \frac{1}{2}\right]} \qquad \forall t\in[1,2].$$

για να είναι λύση πρέπει και αρκεί η:

$\varphi(t) = ct^2 - \frac{1}{2}$ να μην μηδενίζεται στο διάστημα $[1,2]$.

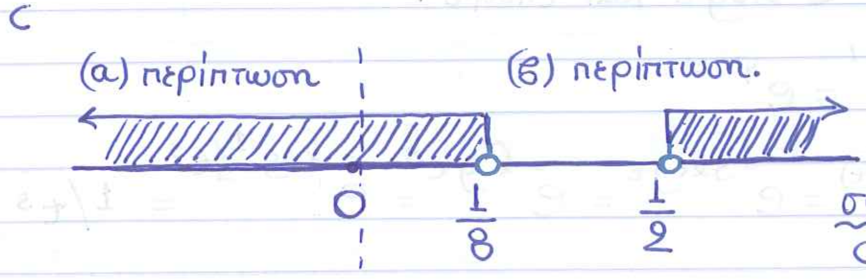
Η φ είναι μονότονη στο $[1,2]$. $\varphi(t) = ct^2 - 1/2$.

(α): $c \leq 0$, τότε η φ παίρνει στο $[1,2]$ αρνητικές τιμές.

(β): $c > 0$, τότε η φ αύξουσα

1. $\varphi(1) > 0$, τότε $\varphi(1) > 0 \Leftrightarrow c - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow c > \frac{1}{2}$.

2. $\varphi(2) < 0$ (οπότε και $\varphi(1) < 0$).
$\varphi(2) < 0 \Leftrightarrow 4c - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow c < \frac{1}{8}$.



συμπέρασμα:
$c < \frac{1}{8}$ ή $c > \frac{1}{2}$.

4. Εξισώσεις Με Χωριζόμενες Μεταβλητές:

$$y'(t) = \frac{g(t)}{f(y(t))}$$

Έστω I ένα διάστημα. Γράφουμε τη Δ.Ε. στη μορφή:

$$f(y(t)) \cdot y'(t) = g(t)$$

Έστω $a \in I$. Τότε ολοκληρωνοντάς απο a έως t, έχουμε:

$$\int_a^t f(y(s)) \cdot y'(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds.$$

Αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $\tau : y(s)$. και παίρνουμε:

$$\int_{y(a)}^{y(t)} f(\tau)\,d\tau = \int_a^t g(s)\,ds.$$

Έστω F και G παράγουσες των f και g.
(δηλ. $F' = f$ και $G' = g$).
Τότε:

$$F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(a). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(y(t)) = G(t) + \underbrace{F(y(a)) - G(a)}_{=c}$$

$$\Rightarrow F(y(t)) = G(t) + c$$

Αυτή η σχέση μας δίνει τις λύσεις σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή. Αν μπορούμε να την επιλύσουμε ως προς $y(t)$, τότε βρίσκουμε τη λύση σε άμεση μορφή.

16.10.14

• Παράδειγμα:

$$e^{y(t)} \cdot y'(t) = t + t^3$$

$$\left(\Leftrightarrow \ y'(t) = \frac{t+t^3}{e^{y(t)}} \right)$$

Σταθεροποιούμε ενα σημείο $a \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\int_a^t e^{y(s)} \cdot y'(s)\, ds = \int_a^t (s+s^3)\, ds.$$

Με την αλλαγή: $\tau = y(s)$ έχουμε:

$$\int_{y(a)}^{y(t)} e^{\tau}\, d\tau = \int_a^t (s+s^3)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} - e^{y(a)} = \frac{s^2}{2}\Bigg|_{s=a}^{s=t} + \frac{s^4}{4}\Bigg|_{s=a}^{s=t} =$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + \underbrace{\left[e^{y(a)} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} \right]}_{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{y(t)} = \underbrace{\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c}_{>0.} \Rightarrow y(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c \right).$$

5. Ομογενείς Δ.Ε.:

Οι Δ.Ε. της μορφής $y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$ λέγονται ομογενείς.

• παρατηρήσεις: 1. Ομογενής γραμμική Δ.Ε.

$$y'(t) = p(t) \cdot y(t)$$

2. $f(t,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού ν, αν $\forall \lambda, t, y \in \mathbb{R}$
$f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^{\nu} \cdot f(t,y)$

Έστω M και N δύο ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ν.

• <u>Ισχυρισμός</u>: Η συνάρτηση $f(t,y) = -\dfrac{M(t,y)}{N(t,y)}$

είναι ομογενής βαθμού μηδέν.

Έστω f ομογενής συνάρτηση μηδενικού βαθμού. Τότε:

$$f(t,y) = f\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \lambda}}{t}\cdot 1, \underset{\substack{\uparrow \\ \lambda}}{t}\cdot \frac{y}{t}\Big) = \underset{\substack{\| \\ 1}}{t^{0}} \cdot \underbrace{f(1, y/t)}_{\substack{\| \\ g(y/t)}}.$$

$$y'(t) = g\left(\frac{y(t)}{t}\right) \quad \oplus$$

Θέτουμε $v(t) := \dfrac{y(t)}{t}$ τότε:

$y(t) = t \cdot v(t) \Rightarrow y'(t) = t \cdot v'(t) + v(t)$.

Επομένως η $\oplus$ γράφεται στην μορφή:

$$t \cdot v'(t) + v(t) = g(v(t)) \Rightarrow$$

(**) $\Rightarrow t \cdot v'(t) = g(v(t)) - v(t)$ (Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές).

(α): Έστω $v^* \in \mathbb{R}$ τ.ω: $g(v^*) = v^*$, δηλ. v^* σταθερό σημείο της g.
Η συνάρτηση $v(t) = v^*$ είναι λύση της (**).
Οι συναρτήσεις: $y(t) = v^* \cdot t$ είναι λύσεις της αρχικής Δ.Ε. και λέγονται ιδιάζουσες λύσεις.

(β): $g(v(t)) \neq v(t)$ τότε: $\dfrac{v'(t)}{g(v(t)) - v(t)} = \dfrac{1}{t}$.

Σταθεροποιούμε ένα $\alpha \in \mathbb{R}$ και ολοκληρώνουμε από α μέχρι t, οπότε έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{v'(s)}{g(v(s))-v(s)}\,ds = \int_{\alpha}^{t} 1/s\,ds. \longrightarrow \alpha, t \text{ ομόσημα.}$$

Με $\tau := v(s)$ έχουμε:

$$\int_{v(\alpha)}^{v(t)} \frac{1}{g(\tau)-\tau}\,d\tau = \log|t| - \log|\alpha|$$

Έστω G μια παράγουσα της $\dfrac{1}{g(\tau)-\tau}$ τότε:

$$G(v(t)) - G(v(\alpha)) = \log|t| - \log|\alpha| \text{ ή}$$

$$G(v(t)) = \log|t| + \underbrace{G(\alpha) - \log|\alpha|}_{=c}$$

Αυτή η σχέση μας δίνει την $v(t)$ σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να τη λύσουμε βρίσκουμε τη $v(t)$, και τότε οι λύσεις της αρχικής Δ.Ε. είναι $y(t) = t \cdot v(t)$.

$\boxed{21.10.14} \Rightarrow$ • Παράδειγμα:

$$y'(t) = \frac{(y(t))^2 + 2t \cdot y(t)}{t^2}.$$

Τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρανομαστής στο δεξιό μέλος είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 2.
Επομένως, η δοθείσα Δ.Ε. είναι ομογενής.
Θέτουμε $v(t) := \dfrac{y(t)}{t}$ και έχουμε:

$$y(t) = t \cdot v(t) \Rightarrow y'(t) = v(t) + t \cdot v'(t)$$

Άρα:

$$v(t) + t \cdot v'(t) = \underbrace{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2}_{=(v(t))^2} + 2 \cdot \underbrace{\frac{y(t)}{t}}_{=v(t).} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t \cdot v'(t) = (v(t))^2 + v(t).$ ⊛

• Ιδιάζουσες λύσεις: $v^2 + v = 0. \Leftrightarrow v = 0.$ ή $v = -1.$

(α) $y(t) = 0.$
(β) $y(t) = -t.$

Έστω τώρα ότι $v(t) \neq 0$ και $v(t) \neq -1.$, για κάθε t.
Τότε η ⊛ γράφεται στην μορφή:

$$\frac{v'(s)}{v(s)\cdot[v(s)+1]} = \frac{1}{s} \qquad (s \neq 0).$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο α και ολοκληρώνουμε από το α μέχρι το t οπότε παίρνω:

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{v'(s)}{v(s)\cdot[v(s)+1]}\, ds = \int_{\alpha}^{t} 1/s\, ds.$$

ή με $\tau := v(s)$,

$$\int_{v(\alpha)}^{v(t)} \frac{1}{\tau(\tau+1)}\, d\tau = \log|t| - \log|\alpha|.$$

Τώρα: $\frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1}$, οπότε:

$$\underbrace{\int_{v(\alpha)}^{v(t)} \frac{1}{\tau}\, d\tau}_{= \log|v(t)| - \log|v(\alpha)|} - \underbrace{\int_{v(\alpha)}^{v(t)} \frac{1}{\tau+1}\, d\tau}_{= \log|v(t)+1| - \log|v(\alpha)+1|} = \log|t| - \log|\alpha|. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|v(t)| - \log|v(t)+1| = \log|t| +$$

$$+ \Big[\underbrace{\log|v(\alpha)| - \log|v(\alpha)+1| - \log|\alpha|}_{= \log|c|}\Big] \qquad c \neq 0.$$

$$\Rightarrow \log\left|\frac{v(t)}{v(t)+1}\right| = \log|c\cdot t| \Rightarrow \frac{v(t)}{v(t)+1} = c\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{c\cdot t}{1-c\cdot t}$$

Άρα: $y(t) = \dfrac{c\cdot t^2}{1-c\cdot t}$ $\quad c\neq 0$ και $t \neq 1/c$.

6. Πλήρεις (ακριβείς) διαφορικές εξισώσεις:

(1) $$y'(t) = -\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$$

Η (1) λέγεται πλήρης αν υπάρχει συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω:

(2) $$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(t,y)$$

- Υπόθεση: Η (1) είναι πλήρης και ξέρουμε μια f που ικανοποιεί την (2).

- Ισχυρισμός: Οι λύσεις $y(t)$ δίνονται απο την σχέση $f(t,y(t)) = c$, $c\in\mathbb{R}$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}f(t,y(t)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))}_{\overset{(2)}{=} M(t,y(t))} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))}_{= N(t,y(t))}\cdot y'(t) =$$

$$= M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) \overset{(1)}{=} 0.$$

- Ερώτημα: Πως ελέγχουμε αν η (1) είναι πλήρης και στην περίπτωση που είναι πλήρης πως προσδιορίζουμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (2);

• <u>Ισχυρισμός</u>: Αν οι συναρτήσεις M κι' N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε η (1) είναι πλήρης, ανν:

$$(3)\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

• Έστω ότι η (1) είναι πλήρης. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τη (2). Άρα:

$$\left.\begin{aligned} M(t,y) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}(t,y) \\ N(t,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

είναι ίσα.

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

• <u>Αντίστροφα</u>: Αν οι M και N ικανοποιούν την (3), θα αποδείξουμε ότι η (1) είναι πλήρης, βρίσκοντας μάλιστα μια f που ικανοποιεί την (2).
Αναζητούμε f της μορφής: $f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y)$. (4).

με άγνωστη τη συνάρτηση g.
Για τις f της μορφής (4) έχουμε:

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$, δηλ. ικανοποιούν την 1^{η} σχέση της (2).

Παραγωγίζοντας την (4) ως προς y, παίρνουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \int M_y(t,y)\,dt + g'(y).$$

οπότε, αφού θέλουμε $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ – η δεύτερη σχέση της (2), θα έχουμε:

$$N(t,y) = \int \underbrace{M_y}_{= N_t}(t,y)\,dt + g'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(y) = \underbrace{N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt}_{\text{συνάρτηση του } y \text{ μόνο.}}$$

σταθερά!

Άρα $g(y) = \int \left[N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \right] dy + C$

Άρα η ζητούμενη f (που ικανοποιεί τη (2)) είναι:

$$f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \underbrace{\int \left[N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \right] dy + C}_{= g(y).}$$

- <u>Παράδειγμα</u>: $y'(t) = -\dfrac{e^{y(t)}}{t \cdot e^{y(t)} + 2y(t)}$

Άρα $M(t,y) = e^y$, $N(t,y) = t \cdot e^y + 2y$.

Έχουμε: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = e^y$, $\dfrac{\partial N}{\partial t} = e^y$ οπότε:

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$, άρα η Δ.Ε. είναι πλήρης.

Ζητείται μια συνάρτηση $f(t,y)$ τ.ω:

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \boxed{t \cdot e^y + 2 \cdot y}$

Έχουμε: $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,y) = e^y \Rightarrow f(t,y) = t \cdot e^y + g(y)$.

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \boxed{t \cdot e^y + g'(y)}$

Απο τις δύο σχέσεις $\boxed{}$ έπεται ότι:

$$t\cdot \cancel{e^y} + g'(y) = t\cdot\cancel{e^y} + 2y \Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y) = y^2 + c$$

Άρα $f(t,y) = t\cdot e^y + y^2 + c$

Επομένως: οι λύσεις $y(t)$ δίνονται απο την σχέση:

$$f(t, y(t)) = C$$

ή $t\cdot e^{y(t)} + (y(t))^2 + c = \tilde{C}$ με $\tilde{C} \in \mathbb{R}$.

• Διαφορ. Εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις:

Ζητούμενο: Έστω ότι η Δ.Ε. $y'(t) = -\dfrac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ δεν είναι πλήρης. Υπάρχει συνάρτηση $\mu(t,y)$ τ.ω η Δ.Ε.

(6) $$y'(t) = -\frac{\mu(t,y(t))\cdot M(t,y(t))}{\mu(t,y(t))\cdot N(t,y(t))}$$ να είναι πλήρης;

Κάθε τέτοια συνάρτηση μ, αν υπάρχει, λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας.

Η (6) είναι πλήρης ανν:

$$\frac{\partial(\mu\cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\cdot N)}{\partial t}$$

ή $$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial t}$$

ή $$N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)$$

(7) ή $$\frac{1}{\mu}\cdot\left[N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}\right] = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Η επίλυση της (7) είναι πιο δύσκολο πρόβλημα απο την επίλυση της αρχικής Δ.Ε. :

~> Ειδικές περιπτώσεις: Πότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu = \mu(t)$ ή $\mu = \mu(y)$;

(i) $\mu = \mu(t)$, τότε η (7) γράφεται στη μορφή :

$$\frac{1}{\mu(t)} \cdot N \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

ή

$$\frac{1}{\mu(t)} \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

Τέτοιος ολοκλ. παράγοντας υπάρχει ανν η:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$ είναι συνάρτηση μόνο του t.

Τότε έχουμε :

$$\mu'(t) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \cdot \mu(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial t}{N} dt} \quad (*)$$

(ii) $\mu = \mu(y)$. Τότε η (7) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\mu(y)} \cdot \frac{d\mu}{dy} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$$

Τέτοιο μ υπάρχει ανν η : $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$

είναι συνάρτηση μόνο του y. Όπως προηγουμένως βρίσκουμε :

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial t}{M} dy}$$

• Παράδειγμα: 23.10.14

$$y'(t) = \frac{-y(t)}{t^2 \cdot y(t) - t}$$

$M(t,y) = y$ και $N(t,y) = t^2 \cdot y - t$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \text{η Δ.Ε. δεν είναι πλήρης.}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{t}}{M}(t,y) = \frac{2 - 2ty}{y} = \frac{2}{y} - 2 \cdot t$$ όχι ανεξάρτητο του $t \Rightarrow$ δεν υπάρχει ολοκλ. παράγοντας $\mu = \mu(y)$.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}(t,y) = \frac{2 - 2ty}{t^2 y - t} = \frac{2(1 - t \cdot y)}{t(ty - 1)} = -\frac{2}{t}$$

ανεξ. του $y \Rightarrow$ υπάρχει ολ. παραγ. $\mu = \mu(t)$.

Σύμφωνα με την (*): $\mu(t) = e^{\int -2/t \, dt} = e^{-2 \int 1/t \, dt}$, $\int 1/t \, dt = \log|t|$.

$$= e^{\log \frac{1}{|t|^2}} = 1/t^2.$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή στο δεξιό μέλος επί $1/t^2$ και η αρχική Δ.Ε. γράφεται στη μορφή:

$$y'(t) = -\frac{y(t)/t^2}{y(t) - 1/t}.$$

(1) Ζητείται $F(t,y)$ τ.ώ: $\frac{\partial F}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2}$ και $\frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = y - \frac{1}{t}$

Έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{y}{t^2} \Rightarrow f(t,y) = \int \frac{y}{t^2}\,dt + g(y) =$$

$$= -\frac{y}{t} + g(y).$$

Παραγωγίζοντας ως προς y παίρνουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1}{t} + g'(y)$$

Συνδυάζοντας με την 1 έχουμε:

$$\cancel{-\frac{1}{t}} + g'(y) = y \cancel{-\frac{1}{t}} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}y^2 + c_1.$$

Άρα η ζητούμενη f είναι:

$$f(t,y) = -\frac{y}{t} + \frac{1}{2}y^2 + c_1$$

Οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση:

$$-\frac{y(t)}{t} + \frac{[y(t)]^2}{2} + c_1 = 0 \text{ με } c_1 \in \mathbb{R}.$$

→ Γραμμικά Συστήματα Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές:

Γενικό πρόβλημα μας:

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ συνεχής διανυσματική σχέση.

$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ή $y^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, $y^{(0)} \neq 0$.

Ζητούμενο: $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ τ.ώ:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & a \leq t \leq b. \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases}$$

• **Το ομογενές σύστημα:**

$$(*)\ \begin{cases} y'(t) = A\cdot y(t), & t\in\mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

• **παρατήρηση:** Αν η αρχική τιμή δίνεται σε ένα σημείο α, τότε με την αλλαγή μεταβλητής $t = \alpha + s$ το πρόβλημα ανάγεται σε αντίστοιχο της μορφής (*).

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha\cdot y(t), & t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^{\alpha t}\cdot y^{(0)}$

Ερώτηση: Πότε είναι συναρτήσεις της μορφής

$$y(t) = e^{\lambda t}\cdot y^{(0)} \quad \text{με } \lambda\in\mathbb{C} \quad \text{λύσεις του } (*)\,;$$

• Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται για οποιοδήποτε λ.

• $y'(t) = \lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot y^{(0)}$

Άρα:

$$y'(t) = A\cdot y(t) \iff \lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot y^{(0)} = A\left(e^{\lambda t} y^{(0)}\right)$$

$$\iff \lambda\cdot e^{\lambda t}\cdot y^{(0)} = e^{\lambda t}\cdot A\cdot y^{(0)} \iff \boxed{A\cdot y^{(0)} = \lambda\cdot y^{(0)}}$$

Χ.Π.Τ.Γ υποθέτουμε ότι $y^{(0)}\neq 0$ (διαφορετικά η λύση του (*) είναι $y(t)=0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$).

$y^{(0)}\neq 0$

$A\cdot y^{(0)} = \lambda\cdot y^{(0)}$

Άρα: το λ είναι ιδιοτιμή του A και το $y^{(0)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. (γενικά μιγαδικά)

- <u>Υπόθεση</u>: Το $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ← $\boxed{29.10.14}$
  ιδιοδιανυσμάτων του A.

  Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του A και $X^{(1)}, \dots, X^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλ. $A \cdot X^{(i)} = \lambda_i \cdot X^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

(**) Αν $y^{(0)} = C_1 \cdot X^{(1)} + C_2 \cdot X^{(2)} + \dots + C_m \cdot X^{(m)}$, με $C_i \in \mathbb{C}$ για $i = 1, \dots, m$, τότε η λύση $y(t)$ του (*) γράφεται στη μορφή:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot X^{(1)} + \dots + C_m \cdot e^{\lambda_m t} \cdot X^{(m)}. \quad \oplus$$

Θα αποδείξουμε ότι η $y(t)$ που δίνεται στην $\oplus$ ικανοποιεί τόσο την αρχική συνθήκη όσο και το σύστημα Δ.Ε. στην (*). Δηλ. ότι είναι όντως λύση του.

- <u>Αρχικη συνθήκη</u>: $\underset{\uparrow \; \oplus \text{ με } t=0.}{y(0) =} C_1 \cdot X^{(1)} + \dots + C_m \cdot X^{(m)} \overset{(**)}{=} y^{(0)}$ ✓

- <u>Σύστημα Δ.Ε.</u>:

$$\underset{\uparrow \; \oplus}{y'(t) =} C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \lambda_1 \cdot X^{(1)} + \dots + C_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} \cdot \lambda_m \cdot X^{(m)}$$

$$A \cdot y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \underbrace{A \cdot X^{(1)}}_{= \lambda_1 \cdot X^{(1)}} + \dots + C_m \cdot e^{\lambda_m \cdot t} \cdot \underbrace{A \cdot X^{(m)}}_{= \lambda_m \cdot X^{(m)}}$$

- <u>Συμπέρασμα</u>: $y'(t) = A \cdot y(t)$.

- <u>Υπόθεση</u>: Ο πίνακας A έχει (n) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $X^{(1)}, \dots, X^{(m)} \in \mathbb{C}^n$.

↝ <u>Υπενθύμιση!</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και λ^* μια ιδιοτιμή του.

- Αλγεβρική πολλαπλότητα της λ^* λέγεται η πολλαπλ. του λ^* ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$ του A.

  ορίζουσα.

- Γεωμετρική πολλαπλότητα της λ^* λέγεται το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς την ιδιοτιμή λ^*.

- Ισχύει πάντα ότι: $1 \leq$ γεωμ. πολλαπλ. $\leq$ αλγεβρ. πολλαπλ. $\leq n$

(Αυτό συμβαίνει, ανν η αλγ. και η γεωμ. πολλαπλότητα καθε ιδιοτιμής του A είναι ίδιες.)

- Ειδικές Περιπτώσεις: • Οι ιδιοτιμές του A είναι όλες απλές, δηλ. ο A εχει (n) διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές.
  • Ο A είναι συμμετρικός δηλ. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$

Τότε τα διανύσματα $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$. Επομένως, η $y^{(0)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ δηλ.

$$y^{(0)} = C_1 \cdot X^{(1)} + \dots + C_n \cdot X^{(n)}.$$

(Λύνοντας αυτό το σύστημα (n) εξισώσεων με (n) αγνώστους προσδιορίζουμε τα $C_1, \dots, C_n$).

Σύμφωνα με όσα είδαμε προηγουμένως, η λύση $y(t)$ του (*) είναι τότε:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot X^{(1)} + \dots + C_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \cdot X^{(n)}.$$

- Γενική περίπτωση: (Δεν υποθέτουμε ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη απο ιδιοδιανύσματα του A.)

$$\begin{cases} y'(t) = a \cdot y(t), \ t \in \mathbb{R}. \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^{at} \cdot y_0$

Ερώτηση: Γράφεται η λύση $y(t)$ του (*) στην μορφή:

$$y(t) = e^{tA} \cdot y^{(0)}, \ t \in \mathbb{R} \ ;$$

τι σημαίνει αυτό;

$\alpha \in \mathbb{C}$

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots\dots$$

Ορισμός: Για $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορίζουμε

$$e^{A} = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Ιδιότητες:

1. $e^{0} = I_n$ (μοναδιαίος)
2. $\left(e^{tA}\right)' = A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A$
3. $e^{A} e^{B} = e^{A+B}$ ανν $AB = BA$.

Απάντηση: Ναι (η απάντηση της ερώτησης στην πίσω σελίδα.)

Αρχική συνθήκη: $y(0) = e^{0 \cdot A} \cdot y^{(0)} = e^{0} \cdot y^{(0)} = I_n \cdot y^{(0)} = y^{(0)}$

Σύστημα Δ.Ε.: $y'(t) = \left(e^{tA} \cdot y^{(0)}\right)' = \left(e^{tA}\right)' \cdot y^{(0)} =$

$= A \cdot \left(e^{tA} \cdot y^{(0)}\right) = A \cdot y(t)$ ✓

Ουσιαστικό Ερώτημα: Πως υπολογίζουμε το $e^{tA} \cdot y^{(0)}$
(ή το $e^{tA} x$ με $x \in \mathbb{C}^{n}$);

- Μη ομογενές σύστημα Δ.Ε: $\begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t) + f(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$

Μέθοδος της μεταβολής των σταθερών: προσπαθώ να βρω λύσεις της μορφής: $y(t) = e^{tA} \cdot v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, με κατάλληλο v.

Αρχική Συνθήκη: $y(0) = y^{(0)} \Leftrightarrow e^{0 \cdot A} \cdot v(0) = y^{(0)} \Leftrightarrow v(0) = y^{(0)}$

Επίσης: $y'(t) = \left(e^{tA} \cdot v(t)\right)' = \left(e^{tA}\right)' \cdot v(t) + e^{tA} \cdot v'(t)$
$= A \underbrace{e^{tA} v(t)}_{= y(t)} + e^{tA} \cdot v'(t)$

$= A y(t) + e^{tA} \cdot v'(t)$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Αυτή η y ικανοποιεί το σύστημα Δ.Ε.
$y'(t) = A \cdot y(t) + f(t)$ ανν: $\boxed{e^{tA} \cdot v'(t) = f(t)}$

$$e^{sA} \cdot v'(s) = f(s) \Leftrightarrow v'(s) = e^{-sA} \cdot f(s) \Rightarrow$$

$$\int_0^t v'(s)\,ds = \int_0^t e^{-sA} \cdot f(s)\,ds \Leftrightarrow v(t) - \underbrace{v(0)}_{y^{(0)}} = \int_0^t e^{-sA} \cdot f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow v(t) = y^{(0)} + \int_0^t e^{-sA} \cdot f(s)\,ds$$

Άρα: $y(t) = e^{tA} \cdot v(t) = e^{tA} \cdot y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds.$

- Η λύση του προβλήματος $\begin{cases} y'(t) = A \cdot y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(\alpha) = y^{(0)} \end{cases}$

είναι: $y(t) = e^{(t-\alpha)A} \cdot y^{(0)}, \ t \in \mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, πώς υπολογίζουμε το $e^{tA} \cdot x$;

⇝ <u>1η περίπτ.</u>: Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. $[A \cdot x = \lambda \cdot x]$.

Τότε:
$$e^{tA} \cdot x = e^{\lambda t I_n} \cdot e^{t(A - \lambda I_n)} \cdot x \quad (1)$$

- $e^{\lambda t I_n} = I_n + \lambda t I_n + \frac{1}{2!} \cdot (\lambda t I_n)^2 + \ldots =$

$$= I_n + \lambda t I_n + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 \cdot I_n + \ldots = \underbrace{\left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \ldots\right)}_{} \cdot I_n = e^{\lambda t} \cdot I_n$$

$$(1) \Rightarrow e^{\lambda t} \cdot \cancel{I_n} \cdot e^{t(A - \lambda I_n)} x$$

$$= e^{\lambda t} \cdot e^{t(A - \lambda I_n)} \cdot x$$

Τώρα:

$$e^{t(A-\lambda I_n)}\cdot x = \underbrace{I_n\cdot x}_{= x.} + t\underbrace{(A-\lambda I_n)\cdot x}_{=0} + \frac{1}{2!}t^2\underbrace{(A-\lambda I_n)^2\cdot x}_{=0} + \ldots$$

(γιατί $Ax=\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I_n)\cdot x = 0$).

Άρα:

$$e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t}\cdot x$$

<u>2η περίπτωση</u>: Το x τ.ω. $(A-\lambda I_n)^m\cdot x = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.

Τότε: $e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t}\cdot e^{t(A-\lambda I_n)}\cdot x$

και

$$e^{t(A-\lambda I_n)}\cdot x = x + t(A-\lambda I_n)\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot t^2\cdot(A-\lambda I_n)^2\cdot x + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\cdot t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1}\cdot x + \frac{1}{m!}\cdot t^m\underbrace{(A-\lambda I_n)^m\cdot x + \ldots}_{=0}$$

Άρα

$$e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t}\left\{x + t(A-\lambda I_n)\cdot x + \ldots\ldots + \frac{1}{(m-1)!}\cdot t^{m-1}\cdot(A-\lambda I_n)^{m-1}\cdot x\right\}.$$

Μη μηδενικά διανύσματα $x\in\mathbb{C}^n$ τ.ω: $(A-\lambda I_n)^m\cdot x = 0$. λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ.

Για καθε πινακα A υπάρχει βάση $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από (ιδιοδιανύσματα) και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.

$\boxed{30.10.14}$

- Πώς βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα;

<u>Απόδειξη</u>: Έστω m η αλγεβρ. πολ. μιας ιδιοτιμής λ του A με γεωμ. πολ. μικρότερη του m. Είναι γνωστό απο την Γραμμική Άλγεβρα ότι:

(i) Υπάρχουν m γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ, δηλ.

λύσεις του γραμμικού συστήματος:

$$(A-\lambda I_n)^m \cdot X = 0.$$

(β) Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- <u>Συμπέρασμα</u>: Αφού το άθροισμα των αλγ. πολ. όλων των ιδιοτιμών του A είναι n (όσος και ο βαθμός του χαρακτ. πολ. του A), υπάρχουν (n) γρ. ανεξ. γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ του A.

Αφού $\dim \mathbb{C}^n = n$, τα $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$.

<u>Ερώτηση</u>: Πώς υπολογίζουμε m γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A ως προς την ιδιοτιμή του λ αλγεβρ. πολλαπλ. m;

<u>1ος τρόπος</u>: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα: $(A-\lambda I_n)^m \cdot X = 0$.

<u>2ος τρόπος</u>: (ευκολότερος)

- <u>ΒΗΜΑ 1</u>: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα: $(A-\lambda I_n)\cdot X = 0$. και προσδιορίζουμε τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ, όση η γεωμετρική της πολλαπλότητα (αυτός είναι ο ορισμός της γεωμ. πολλαπλ.)
  - Αν βρήκαμε (n) τέτοια ιδιοδιανύσματα σταματάμε εδώ. Διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.
- <u>ΒΗΜΑ 2</u>: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα: $(A-\lambda I_n)^2 \cdot X = 0$. και προσδιορίζουμε όσο περισσότερα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μπορούμε τα οποία μαζί με αυτά που βρήκαμε στο 1ο βήμα να είναι γραμμ. ανεξ. Το πλήθος τους είναι τουλάχιστον κατα ένα μεγαλύτερο του πλήθους των διανυσμάτων που βρήκαμε στο βήμα 1. Αν βρήκαμε

ήδη συνολικά m διανύσματα σταματάμε διαφορετικά συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

• <u>ΒΗΜΑ 3:</u> Λύνουμε το $(A-\lambda I_n)^3 \cdot X = 0$.

⋮

Απαιτούνται (το πολύ) ℓ βήματα, όπου ℓ η διαφορά της αλγεβρ. πολ. (δηλ. του m) μείον τη γεωμ. πολλαπλ.

$$\circledast \quad \begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R}. \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases}$$

• Έστω $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του A. (υπάρχει πάντα!!)

Τότε η αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται στη μορφή

$$y^{(0)} = C_1 \cdot X^{(1)} + C_2 \cdot X^{(2)} + \ldots + C_n \cdot X^{(n)}.$$

Τότε η λύση: $y(t) = e^{tA} \cdot y^{(0)}$ του $\circledast$ γράφεται στην μορφή:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{tA} \cdot X^{(1)} + C_2 \cdot e^{tA} \cdot X^{(2)} + \ldots + C_n \cdot e^{tA} \cdot X^{(n)}.$$

Είδαμε ήδη με ποιον τρόπο υπολογίζουμε τα $e^{tA} \cdot X^{(i)}$ όπου $X^{(i)}$ (γενικευμένο) ιδιοδιάνυσμα του A, οπότε ξέρουμε πώς να βρούμε την $y(t)$.

Οι $\varphi^{(i)}(t) := e^{tA} \cdot X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$
είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $y'(t) = Ay(t)$ $t \in \mathbb{R}$, αφού τα $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όταν τα $X^{(i)}$ είναι (γενικευμενα) ιδιοδιανύσματα του A, μπορουμε εύκολα να υπολογίσουμε τις $\varphi^{(i)}(t)$.

• Παράδειγμα: Γενική λύση του

$$y'(t) = A\cdot y(t),\ t\in\mathbb{R},\ \mu\varepsilon\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυωνυμο του A:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) = \ldots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2.$

Οι ιδιοτιμές του A είναι διαφορετικές μεταξύ τους συνεπώς υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται απο ιδιοδιανύσματα του A.

α) $\lambda_1 = 1$. Θέλουμε να βρούμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$$(A - \lambda_1\cdot I_3)\cdot v = 0 \iff$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0. \iff$$

$$\left.\begin{aligned} -v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 3v_1 + v_2 - v_3 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$2^{\eta} - 3^{\eta}$: $v_1 + v_3 = 0. \Rightarrow \boxed{v_1 = -v_3.}$

1^{η}: $\boxed{v_2 = 4v_3}$

για $v_3 = 1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

παίρνουμε μια οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή όλα είναι λύσεις αρκεί να είναι πολλαπλάσια του πίνακα v.

Αυτό μας δίνει τη λύση $\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1\cdot t}\cdot v = e^{t}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ του $y'(t) = Ay(t)$.

(β) $\lambda_2 = 3 \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση: $\varphi^{(2)}(t) = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(γ) $\lambda_3 = -2 \rightsquigarrow v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi^{(3)}(t) = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Γενική λύση: $y(t) = C_1 \cdot \varphi^{(1)}(t) + C_2 \cdot \varphi^{(2)}(t) + C_3 \cdot \varphi^{(3)}(t)$

$$= C_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} -C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} - C_3 \cdot e^{-2t} \\ 4C_1 \cdot e^{t} + 2C_2 \cdot e^{3t} + C_3 \cdot e^{-2t} \\ C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{3t} + C_3 \cdot e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ με } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

$\Leftarrow$ $\boxed{04.11.14}$

Πρόβλημα αρχικών τιμών για το παραπάνω σύστημα.

με $y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} -C_1 \cdot e^{2} + C_2 \cdot e^{6} - C_3 \cdot e^{-4} &= 1. \\ 4C_1 \cdot e^{2} + 2C_2 \cdot e^{6} + C_3 \cdot e^{-4} &= 2. \\ C_1 \cdot e^{2} + C_2 \cdot e^{6} + C_3 \cdot e^{-4} &= 3. \end{aligned}\right\}$$

$\gamma_1 + \gamma_3 = 2 \cdot C_2 \cdot e^{6} = 4 \Rightarrow C_2 \cdot e^{6} = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \cdot e^{-6}$.

Άρα η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} -C_1 \cdot e^{2} - C_3 \cdot e^{-4} &= 1 - \underbrace{C_2 \cdot e^{6}}_{=2} = -1 \\ 4C_1 \cdot e^{2} + C_3 \cdot e^{-4} &= 2 - \underbrace{2 \cdot C_2 \cdot e^{6}}_{=4} = -2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -e^{-2} \\ C_3 = 2e^{4}. \end{cases}$$

• Παράδειγμα:

$$y'(t) = Ay(t), \quad t\in\mathbb{R},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

"Tip:" Αν ένας πίνακας είναι άνω ή κάτω τριγωνικός τότε οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\cdot(2-\lambda)$$

⇝ Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2$ (απλή)
$\lambda_2 = 1$ (διπλή)

(α) $\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda_1 I_3)\cdot v = 0 \iff$

$(A - 2I_3)\cdot v = 0 \iff$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$\iff v_1 = v_2 = 0$
$v_3 = 1$ (αυθαίρετο δεν έχει σημασία ότι και να παρουμε εκτός απο 0).

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← δεν θέλουμε ένα ιδιοδ. να έχει παντού μηδενικά.

⇝ Ειδική λύση: $\varphi^{(1)}(t) = e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(β) $\lambda_2 = 1$: $(A - \lambda_2\cdot I_3)\cdot v = 0 \iff (A - I_3)\cdot v = 0 \iff$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

$V_2 = V_3 = 0$

$V_1 = 1$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{γεωμετρική πολαπλότητα} = 1.$$

⇝ <u>Ειδική λύση:</u> $\varphi^{(2)}(t) = e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇝ <u>Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα:</u> $(A - \lambda_2 \cdot I_3)^2 \cdot v = 0$

και $(A - \lambda_2 \cdot I_3) \cdot v \neq 0$.

$$(A - \lambda_2 \cdot I_3)^2 = (A - I_3)^2 = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow V_3 = 0$$

V_1, V_2 αυθαίρετα.

π.χ $V_1 = 0$ και $V_2 = 1$.

$$\varphi^{(3)}(t) = e^{t} \cdot [v + t(A - I_3) \cdot v] =$$

$$= e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇝ <u>Γενική λύση:</u>

$$y(t) = C_1 \cdot \varphi^{(1)}(t) + C_2 \cdot \varphi^{(2)}(t) + C_3 \cdot \varphi^{(3)}(t) =$$

$$= C_1 \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

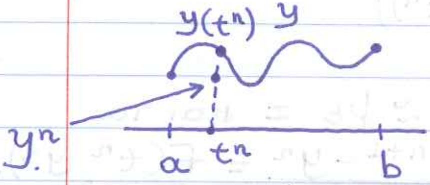
$$= \begin{pmatrix} C_2 \cdot e^{t} + C_3 \cdot t \cdot e^{t} \\ C_3 \cdot e^{t} \\ C_1 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} \text{ με } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

ΤΕΛΟΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ...

2. Η Μέθοδος του Euler: ⟸ 06.11.14

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \quad a \leq t \leq b. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

⇝ Υπόθεση: το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.



δείκτες και όχι τετράγωνο.

Έστω $a = t^0 < t^1 < t^2 < \ldots < t^N = b$.
ένας διαμερισμός του $[a,b]$ με κόμβους t^i, $i = 0, \ldots, N$.

⇝ Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i ← δείκτης των τιμών $y(t^i)$ της λύσης στους κόμβους t^i, $i = 0, \ldots, N$.

Συνήθως για ευκολία στον συμβολισμό θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό. Με $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ (βήμα του διαμερισμού), και $t^n := a + n \cdot h$, $n = 0, \ldots, N$.

⇝ Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} := y^n + h \cdot f(t^n, y^n), \quad n = 0, \ldots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$