4ο Πολυβηματικές Μέθοδοι

▶ Συμβολισμοί και παραδείγματα $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ $a \le t \le b$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

1ο παράδειγμα: (άμεση)

$$\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2} - y^n = 2h \cdot \underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{f^{n+1}} \quad n = 0, \dots, N-2 \end{cases}$$

(επειδή $\not\exists$ ενδιάμεσα στάδια $y^{n,i}, t^{n,i}$) ← μέχρι y^{n+2}?

Διβηματική μέθοδος

• Πώς οδηγούμαστε στη μέθοδο:

1ος τρόπος: Με αριθμητική διαφόριση:

$$y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

Άρα $\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

*Ανεκαθιστώντας ...

2ος τρόπος: Με αριθμητική ολοκλήρωση.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \approx 2h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

μέθοδος του μέσου.

Άρα $\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

153. **1ο παράδειγμα:**

Τύπος του Simpson $\int_c^d \phi(x)dx \simeq \frac{d-c}{6}\underbrace{[\phi(c)+4\phi(\frac{c+d}{2})+\phi(d)]}_{\text{άθροισμα βαρών } 6}$

$$y(t^{n+2})-y(t^n)=\int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t,y(t))dt \simeq$$

$$\simeq \frac{h}{3}[f(t^n,y(t^n))+4\cdot f(t^{n+1},y(t^{n+1}))+f(t^{n+2},y(t^{n+2}))]$$

μέθοδος του Simpson.

Άρα $\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ y^{n+2}-y^n=\frac{h}{3}[f(t^n,y^n)+4f(t^{n+1},y^{n+1})+f(t^{n+2},y^{n+2})] \end{cases}$

$n=0,\dots,N-2$.

μέθοδος του Simpson. (πεπλεγμένη)

(Dahlquist)

$$\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(a)=y_0 \end{cases} \quad t\in[a,b].$$

$N\in\mathbb{N}$, $h:=\frac{b-a}{N}$, $t^n:=a+nh$, $n=0,\dots,N$.

- Θεωρούμε ένα $k\in\mathbb{N}$ και $2k+2$ σταθερές, $a_k, a_{k-1},\dots,a_0$, $b_k,\dots,b_0$

Υποθέτουμε: $a_k\neq 0$ (χ.π.τ.γ $a_k=1$)

[γιατί μπορώ να διαιρέσω με το a_k]

και $|a_0|+|b_0|>0$

αν ισχύει [δεν έχω k-βηματική μέθοδο, έχω k-1 ... κτλ]

Γενική k-βηματική μέθοδος:

$$(*)\begin{cases} y^0, y^1,\dots,y^{k-1} \text{ δεδομένα.} \\ a_k y^{n+k}+\dots+a_0 y^n = h\cdot[b_k f(t^{n+k},y^{n+k})+\dots+b_0 f(t^n,y^n)] \end{cases}$$

$n=0,\dots,N-k$

* Τα α χρησιμοποιούνται αριστερά στο y, τ' τα β δεξιά στην f!

Ζητούμενο κάθε φορά: το y^{n+k}

→ 1η περίπτωση: $b_k = 0$.
Το y^{n+k} υπολογίζεται με πράξεις αντικαθιστώντας τις ήδη γνωστές προσεγγίσεις $y^n, \dots, y^{n+k-1}$.
Η μέθοδος είναι άμεση!

→ 2η περίπτωση: $b_k \neq 0$. Τότε η μέθοδος γράφεται στη μορφή:

γνωστό!

$$a_k y^{n+k} = h b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n$$

∘ Γράφουμε την παραπάνω σχέση στη μορφή: (διαιρώ με a_k.)

$$y^{n+k} = h \frac{b_k}{a_k} f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \frac{1}{a_k} g^n$$

α) Αν το h είναι αρκετά μικρό και η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz, τότε η συνάρτηση

$$\phi(x) := h \cdot \frac{b_k}{a_k} f(t^{n+k}, x) + \frac{1}{a_k} g^n$$

είναι συστολή. Άρα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο οπότε το y^{n+k} είναι καλά ορισμένο.

β) Αν a_k και b_k ομόσημοι (οπότε $\frac{b_k}{a_k} > 0$), και η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, τότε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες. Χωρίς περιορισμό στο h. (Ό,τι έκανα στην πεπλεγμένη Euler...)

Υπολογιστικό κόστος ανά βήμα:
Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα (όλοι οι άλλοι έγιναν σε προηγούμενα βήματα), και στην περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων απαιτείται επιπλέον η επίλυση ενός $m \times m$ συστήματος. (Στην περίπτωση μεθόδων RK με q ενδιάμεσα στάδια απαιτούνται q υπολογισμοί της f ανά βήμα και η επίλυση ενός $(q\,m)\times(q\,m)$ συστήματος).

Αυτό αποτελεί το μεγάλο πλεονέκτημα των πολυβηματικών μεθόδων.

Μειονέκτημα: Υστερούν όσον αφορά τις ιδιότητες ευστάθειας έναντι των μεθόδων RK.
π.χ. Α-ευσταθείς πολυβηματικές μέθοδοι έχουν τάξη ακριβείας το πολύ 2. (σαν τη μέθοδο του τραπεζίου)

• **Τρόποι κατασκευής:**

α) Αριθμητική ολοκλήρωση (βλ. παραδείγματα σελ 152-153)

β) Ανάπτυγμα Taylor ...

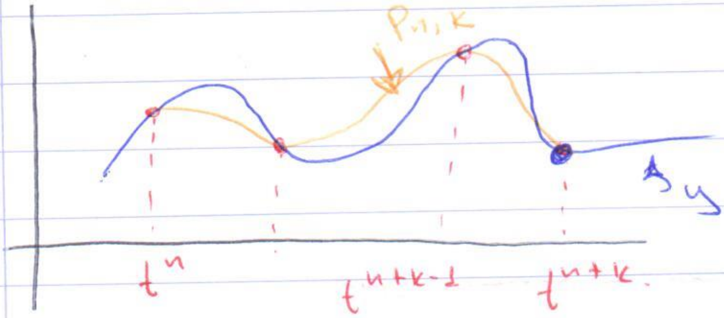
γ) Αριθμητική διαφόριση
Σημαντικό παράδειγμα:
Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών

Βοηθητική η διάσταση συστήματος → $m = 1$:
Έστω $p_{n,k} \in \mathbb{P}_k$ το πολυώνυμο παρεμβολής της y

$f^m = f(t^m, y^m)$

στα σημεία $t^n, \dots, t^{n+k}$, δηλαδή

$$p_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}) \quad , i = 0, \dots, k.$$



η πεπλεγμένη Euler είναι η ειδική περίπτωση που το $k=1$!

Θεωρούμε τη σχέση $y(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$ και προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+k})$ με $p'_{n,k}(t^{n+k})$, οπότε έχουμε:

$$p'_{n,k}(t^{n+k}) \approx f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^{n+i})$ με y^{n+i} και οδηγούμαστε στην k-βηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών. $\beta_k = 1$, $\beta_i = 0$, $i = 0, \dots, k-1$.

Για $k > 6$ μέθοδοι είναι ασταθείς.
Για $k \leq 6$ έχουν πολύ καλές ιδιότητες.
Για $k = 1$: πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

- $\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα.} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \cdot \sum_{i=0}^{k} \beta_i f^{n+i} \end{cases}$ μέθοδοι του Adams

- $\beta_k = 0$ μέθοδοι των Adams-Bashforth.

- $\beta_k \neq 0$ » » - Moulton.

157. $y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i f^{n+i}$.

$b_k = 0$ μέθοδοι του Nyström
$b_k \neq 0$ >> των Milne-Simpson.

▶ **Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων:**

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

*Ορισμός: Μια k-βηματική μέθοδος λέγεται ευσταθής, (ευστάθειας) αν υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται από την f, αλλά ανεξάρτητη του h, τ.ω. για $y^0, \dots, y^N$ που ικανοποιούν την (*) και $z^0, \dots, z^N$ τ.ω.

$$\begin{cases} z^0, \dots, z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k z^{n+k} + \dots + a_0 z^n = h \cdot [b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, z^n)], \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-k$.

τ.ω. $\max\limits_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \max\limits_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j|$

└▶ για $k=1$ → $y^0 - z^0$

*Ορισμός (Συνθήκη των ριζών) → Η μέθοδος είναι τα α ε' τα

Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος (*) ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών, αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο p,

└▶ η ευστάθεια στη συνθήκη των ριζών δεν επηρεάζεται από τα b, μόνο η τάξη.

$p(z) := a_k z^k + \dots + a_0$,

ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, δηλαδή:

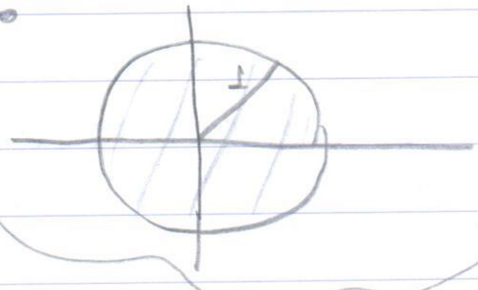
ρίζα του p

$$\begin{cases} p(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1 \\ p(z) = p'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1. \end{cases}$$

πολλαπλή ρίζα του p.

στις RK ήταν τα γνωρίσματα του πίνακα μητρών

Όλες οι απλές ρίζες του ρ πρέπει να είναι μέσα στο δίσκο και η περίμετρος έχει μόνο απλές ρίζες?



→ Πώς ελέγχω τη συνθήκη των ριζών;

- Αν μπορώ να βρω τις ρίζες τελείωσα
- Υπάρχουν κριτήρια: του Schur
  των Routh-Hurwitz.

Από την θεωρία των γραμμικών εξισώσεων διαφορών προκύπτει (επιλέγοντας $f=0$) ότι αν η μέθοδος είναι ευσταθής, τότε ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Με άλλα λόγια η συνθήκη των ριζών είναι αναγκαία για την ευστάθεια.

Ισχύει και το αντίστροφο: αν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, τότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

Δηλαδή η συνθήκη των ριζών είναι ικανή και αναγκαία για την ευστάθεια.

Δηλαδή η συνθήκη των ριζών είναι κριτήριο για την ευστάθεια μιας μεθόδου.

→ Θα αποδείξουμε ότι: συνθήκη των ριζών $\Rightarrow$ ευστάθεια.

1η απόδειξη: Dahlquist (δύσκολη και χρειάζεται θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων)

159 2η απόδειξη: Butcher

▸ Αριθμητική Ανάλυση

Λήμμα (Προκαταρκτικό αποτέλεσμα)

Έστω $p(z) = a_k z^k + \dots + a_0$, ένα πολυώνυμο με $a_k = 1$, το οποίο πληροί τη συνθήκη των ριζών.

Θεωρούμε τον πίνακα $A := \begin{pmatrix} -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}$

Τότε, υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^k$ τ.ω. για την επαγόμενη φυσική νόρμα πινάκων να ισχύει $\|A\| \le 1$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του p.

$\|A\| \le \rho(A) + \varepsilon$

το ε εδώ δεν χρειάζεται λόγω της συνθήκης των ριζών

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

• f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

$N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$ $\quad n = 0, \dots, N$.

$$(*) \begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα.} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right] \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-k$.

▸ Πρόταση: Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος (*) ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών. Έστω λ^n, τα εισάγω γιατί θέλω να συνεχώ την f

$n=0,\dots,N-k$ δεδομένοι αριθμοί ε.ω. $\boxed{|B_i^n|\le B<\infty}$.

Για $h:=\frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση:

$$a_k\psi^{n+k}+\dots+a_0\psi^n=h\cdot(b_k^n\psi^{n+k}+\dots+b_0^n\psi^n)+\lambda^n$$

Τότε υπάρχει $h_0>0$ ε.ω. για $h\le h_0$ να ισχύει:

(+) $\max\limits_{0\le n\le N}|\psi^n|\le C\left[N\max\limits_{0\le n\le N-k}|\lambda^n|+\max\limits_{0\le j\le k-1}|\psi^j|\right]$ με σταθερά C που εξαρτάται από τη μέθοδο (τα a κ' τα b), από το $b-a$, από το h_0, από το B, αλλά είναι ανεξάρτητη των h,λ^n,ψ^n,N και b_i^n

Απόδειξη

Χπεγ $\boxed{a_k=1}$ → ουσιαστικά διαιρώ.

οπότε

$$\psi^{n+k}+a_{k-1}\psi^{n+k-1}+\dots+a_0\psi^n=h(b_k^n\psi^{n+k}+\dots+b_0^n\psi^n)+\lambda^n$$

Γράφουμε αυτή τη σχέση στη μορφή:

$A=\begin{pmatrix}-a_{k-1}&\dots&-a_0\\1&\ddots&0\\0&\ddots&1\end{pmatrix}$

διάνυσμα $*_1$

$$y^{n+1}=Ay^n+G^n\qquad n=0,\dots,N-k$$

με A τον πίνακα του προηγούμενου Λήμματος (σελ 159) και

$$y^j=\begin{pmatrix}\psi^{j+k-1}\\\psi^{j+k-2}\\\vdots\\\psi^j\end{pmatrix},\quad G^j=\begin{pmatrix}h(b_k^j\psi^{j+k}+\dots+b_0^j\psi^j)+\lambda^j\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Συνεπώς με τη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^k$ που υπάρχει σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε:

O_{*_1} $y^{n+1}_1=\psi^{n+1+k-1}=\psi^{n+k}$ → η πρώτη γραμμή του διαν/τος y^{n+1}

$(A\cdot y^n)_1=-a_{k-1}\psi^{n+k-1}-\dots-a_0\psi^n+h(b_k^n\psi^{n+k}+\dots+b_0^n\psi^n)+\lambda^n$

Για τη 2η γραμμή $\psi^{n+k-1} = \psi^{n+k-1}$

αφού πολ/σεται το στοιχείο 1 (2ο του πίνακα A) με το ψ^{n+k-1}

161

$$\|y^{n+1}\| \le \underbrace{\|A\|}_{\le 1} \cdot \|y^n\| + \|G^n\|$$

$$\boxed{\|y^{n+1}\| \le \|y^n\| + \|G^n\|}$$

Λόγω της ισοδυναμίας των νορμών στον $\mathbb{C}^k$, υπάρχουν σταθερές $\tilde{C}_1$ και C_2 τ.ω.

$$\begin{aligned}\|G^n\| &\le \tilde{C}_1 \|G^n\|_\infty \\ &= \tilde{C}_1 |h\cdot(b_k\psi^{n+k} + \dots + b_0^n \psi^n) + \partial^n| \\ &\le h\cdot(\tilde{C}_1 |b_k|\cdot|\psi^{n+k}| + \dots + \tilde{C}_1 |b_0^n|\,|\psi^n|) + \tilde{C}_1 |\partial^n|\end{aligned}$$

Θέτουμε $\quad C_1 := \max(1, \max_{0\le j\le k} |b_j|)\,\tilde{C}_1$

Άρα $\|G^n\| \le h\cdot C_1 |\psi^{n+k}| + h\cdot C_1 (\overbrace{|\psi^{n+k-1}| + \dots + |\psi^n|}^{y^n}) + C_1 |\partial^n| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|G^n\| \le h\, C_2\, \|y^{n+1}\| + C_2\, h \|y^n\| + C_1 |\partial^n|$$

Επομένως

$$\|y^{n+1}\| \le \|y^n\| + C_2\cdot h\,\|y^{n+1}\| + C_2\cdot h\cdot\|y^n\| + C_1|\partial^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - C_2 h)\,\|y^{n+1}\| \le (1 + C_2 h)\,\|y^n\| + C_1 |\partial^n|$$

Έστω h_0 τ.ω. $1 - C_2 h_0 < 1$, τότε για $h \le h_0$ έχουμε:

για να είναι θετικό

$$\|y^{n+1}\| \le \underbrace{\frac{1 + C_2 h}{1 - C_2 h}}_{\le 1 + C_3 h} {}^{*_1} \|y^n\| + \underbrace{\frac{C_1}{1 - C_2 h}}_{\le C_3} |\partial^n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \le (1 + C_3 h)\,\|y^n\| + C_3 |\partial^n|$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\| \le (1 + C_3 h)\,\|y^n\| + C_3 \max_{0\le n\le N-k} |\partial^n| \Rightarrow$$

Λήμμα σελ $\Rightarrow \max\limits_{0\le n\le N-k} \|y^{n+1}\| \le C_4 (\|y^0\| + N \max\limits_{0\le n\le N-k} |\lambda^n|) \Rightarrow$

$C_5 |\psi^{n+k}| \le$

$$\Rightarrow \max_{0\le m\le N} |\psi^m| \le \frac{C_4}{C_5} \left(C_6 \max_{0\le j\le k-1} |\psi^j| + N \cdot \max_{0\le n\le N-k} |\lambda^n| \right)$$

$$*_1.\ \frac{1+C_2 h}{1-C_2 h} = \frac{1-C_2h+2C_2h}{1-C_2h} = 1 + \frac{2C_2}{1-C_2h} h, \quad \frac{2C_2}{1-C_2h} \le \frac{2C_2}{1-C_2h_0} = C_3$$

▶ <u>Πόρισμα</u>: Αν μια μέθοδος ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, τότε είναι ευσταθής.

<u>Απόδειξη</u>

$$\begin{cases} z^0, \ldots, z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k z^{n+k} + \cdots + a_0 z^n = h \cdot [b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \cdots + b_0 f(t^n, z^n)] \end{cases}$$

$n = 0, \ldots, N-k.$

Θέτουμε $\psi^m := y^m - z^m$

Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$a_k \psi^{n+k} + \cdots + a_0 \psi^n = h \cdot \Big[b_k \frac{f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k})}{y^{n+k} - z^{n+k}} \cdot \psi^{n+k} + \cdots$$

$$\cdots + b_0 \frac{f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)}{y^n - z^n} \psi^n \Big]$$

$$\text{Με } g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y^m) - f(t^m, z^m)}{y^m - z^m} & \text{για } y^m \neq z^m \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή:

163. $a_k\psi^{n+k}+\dots+a_0\psi^n = h\,(\underbrace{b_k g^{n+k}}_{b_k^n}\psi^{n+k}+\dots+\underbrace{b_0 g^n}_{b_0^n}\psi^n)$

→ Αρκεί νδο τα b είναι φραγμένα και μετά εφαρμόζω το αποτέλεσμα τη προηγούμενης πρότασης

$$|b_k^n| = |b_k|\,|g^{n+k}| \le L\,|b_k|$$

οπότε $|b_i^n| \le L \max_{0\le j\le k} |b_j| = B.$

Άρα σύμφωνα με την (+), $\max_{0\le n\le N} |\psi^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |\psi^j|$

ή $\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |y^j - z^j|$

Δηλαδή η μέθοδος είναι ευσταθής!

→ Τάξη ακρίβειας και συνέπεια πολυβηματικών μεθόδων → τάξη τουλ 1!

Σφάλμα συνέπειας:

$$\rho^n := a_k y(t^{n+k})+\dots+a_0 y(t^n) - h\cdot[b_k \overbrace{f(t^{n+k},y(t^{n+k}))}^{y'(t^{n+k})}+\dots + b_0 \underbrace{f(t^n,y(t^n))}_{y'(t^n)}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} [a_i\, y(t^{n+i}) - h\cdot b_i y'(t^{n+i})]$$

εκφράστηκε συναρτήσει του y μόνο!

$$(L_h y)(t) = \sum_{i=0}^{k} [a_i y(t+ih) - h\cdot b_i y'(t+ih)]$$

$a \le t \le b - kh.$

Τότε $\boxed{p^n = (\mathcal{L}_h y)(t^n)}$

*Ορισμός: Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου
Έστω $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ τυχούσα, αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω. να ισχύει:
$\exists\, C = C(y) \quad \forall t \in [a, b-kh] \quad |(\mathcal{L}_h y)(t)| \leq C h^{p+1}$
τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p.
Αν $p \geq 1$, η μέθοδος λέγεται συνεπής.

→ Πως βρίσκω το p:

$(\mathcal{L}_h y)(t) = \sum_{i=0}^{k} [a_i y(t+ih) - h b_i y'(t+ih)]$

Taylor ως προς t: $\stackrel{}{=} C_0 y(t) + C_1 h^1 y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \dots$

Συμπέρασμα: Η τάξη της μεθόδου είναι p ακριβώς τότε αν
$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0$$

• Τι μορφή έχουν τα C_i;
Ισχυρίζομαι ότι
$$C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$
$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k - (b_0 + \dots + b_k)$$

και $C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!} \cdot (b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k), \; j \geq 2$

165 $p(z) = a_k z^k + \cdots + a_0$

$C_0 = p(1)$ ανν το 1 είναι ρίζα του p το $C_0 = 0$

$\sigma(z) = b_k z^k + \cdots + b_0$

$p'(z) = k \cdot a_k z^{k-1} + \cdots + a_1$

$C_1 = p'(1) - \sigma(1)$

Μέθοδος συνεπής $\Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = 0 \\ p'(1) = \sigma(1) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sum b_i = 1$ RK

Σύγκλιση (εκτίμηση σφάλματος)

Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια μέθοδος συγκλίνει τότε είναι αναγκαστικά ευσταθής και συνεπής.

ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών!

Θεώρημα (εκτίμηση του σφάλματος)

Έστω ότι η κ-βηματική μέθοδος (*) είναι ευσταθής και έχει τάξη ακριβείας $p \geq 1$.

Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

Τότε $\exists h_0 > 0$ τ.ω για $h \leq h_0$ να ισχύει

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C \left[\max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| \right]$$

με C ανεξάρτητο των h και y.

*Σχετικά με τον υπολογισμό $y^0, \ldots, y^{k-1}$.

$y^0 := y_0$

Υπολογίζουμε τα $y^1, \ldots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο (π.χ. RK) τάξης τουλάχιστον $p-1$! (γιατί κάνουμε μόνο k-1 βήματα)

όταν και έχω τοπικό σφάλμα

Απόδειξη.

$$p^n = \sum_{i=0}^{k} a_i\, y(t^{n+i}) - h \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i\, \underbrace{f(t^{n+i}, y(t^{n+i}))}_{y'(t^{n+i})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (+) \sum_{i=0}^{k} a_i\, y(t^{n+i}) = h \sum_{i=0}^{k} b_i\, f(t^{n+i}, y(t^{n+i})) + p^n$$

* Από το γεγονός ότι η τάξη της μεθόδου είναι p, προκύπτει

$$(*) \quad \max_{0 \le n \le N-k} |p^n| \le C' h^{p+1} \max_{a \le t \le b} |y^{(p+1)}(t)|$$ βλ. 4.2 άσκηση

Θέτουμε τώρα $\varepsilon^i := y(t^i) - y^i$, και αφαιρούμε από την (+) την (*), οπότε παίρνουμε:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i\, \varepsilon^{n+i} = h \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i \left[f(t^{n+i}, y(t^{n+i})) - f(t^{n+i}, y^{n+i}) \right] + p^n$$

$$= h \cdot \sum_{i=0}^{k} b_i\, g^{n+i} \overbrace{\left[y(t^{n+i}) - y^{n+i} \right]}^{\varepsilon^{n+i}} + p^n$$

$$\text{με } g^j \begin{cases} \dfrac{f(t^j, y(t^j)) - f(t^j, y^j)}{y(t^j) - y^j} & \text{αν } y(t^j) \ne y^j \\ 0 & \text{για } y^j = y(t^j) \end{cases}$$

Επομένως $\sum_{i=0}^{k} a_i\, \varepsilon^{n+i} = h \cdot \sum_{i=0}^{k} \underbrace{b_i\, g^{n+i}}_{b_i^n}\, \varepsilon^{n+i} + p^n$.

$\because |g^{n+i}| \le L$, οπότε $b_i^n \le L \underbrace{\max_{0 \le i \le k} |b_i|}_{=:B}$

Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση (σελ 149), έχουμε

$$(*) \quad \max_{0 \le n \le N} |\varepsilon^n| \le C \Big[N \max_{0 \le n \le N-k} |p^n| + \max_{0 \le j \le k-1} \underbrace{|y(t^j) - y^j|}_{|\varepsilon^j|}$$

167.

Επομένως,

$$* \max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le C\,[\underbrace{N\cdot C' h^{p+1}}_{Nh=b-a} \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1} |y(t^j)-y^j|$$

$$\le C\,[\underbrace{(b-a)\,C'}\, h^{p} \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \overset{1}{\max_{0\le j\le k-1}} |y(t^j)-y^j|\,]$$

$$\le \underbrace{C \max(C'(b-a), 1)}\,[\,h^{p} \max_{a\le t\le b} |y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1} |y(t^j)-y^j|\,].$$

- Μέγιστη τάξη ακρίβειας μιας ευσταθούς k-βηματικής

$$\text{μεθόδου} = \begin{cases} k+1, & k \text{ περιττός} \\ k+2, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$k=1$: μέθοδος του τραπεζίου $(p=2)$

$k=2$: μέθοδος του Simpson $(p=4)$.

Οι μέθοδοι με τη μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας είναι πεπλεγμένες.

Μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας άμεσης, ευσταθούς k-βηματικής μεθόδου $= k$.

- Άσκηση 4.2 : $\alpha_k, \dots, \alpha_0, \beta_k, \dots, \beta_0$.

$C_i = ;$

Λύση

$t^n + 1$

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t + jh) - h \cdot b_j y'(t+jh) \right]$$

για $t = t^n$ βρίσκεις το ρ^n ;

Taylor ως προς το t

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{j=0}^{k} \left[a_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h \cdot b_j \underbrace{\sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t)}_{*_1} \right] + O(h^{\tilde{p}+1}) =$$

κοιτώ πρώτα για το $v=0$.

και μου μένουν p όροι που μπορώ να τους συσχετίσω μετους p όρους του $*_1$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t) + a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h \cdot b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v+1)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \underbrace{(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)}_{C_0 = \rho(1)} y(t) + \sum_{j=0}^{k} \left[a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^v}{v!} y^{(v)}(t) - h \cdot b_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(jh)^{v-1}}{(v-1)!} y^{(v)}(t) \right] + O(h^{\tilde{p}+1}) =$$

$$= C_0 y(t) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v y^{(v)}(t) \left[\sum_{j=0}^{k} \left(a_j \frac{j^v}{v!} - b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right) \right] + O(h^{\tilde{p}+1}) =$$

$$= C_0 y(t) + h y'(t) \underbrace{\left[\sum_{j=\cancel{0}\,1}^{k} j a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \underset{j^0 = 1}{1} \right]}_{C_1} + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_j \frac{j^v}{v!} - b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!} \right)}_{C_v} \cdot h^v y^{(v)}(t) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

για $j=0 \Rightarrow 0$

$C_0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_k = \rho(1)$

$C_1 = \underbrace{(a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k)}_{\rho'(1)} - \underbrace{(b_0 + \cdots + b_k)}_{\sigma(1)}$

Άσκηση 4.1 : $\boxed{b_2 = 1, \ b_1 = b_0 = 0}$

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h \cdot f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

$p = 2$. $(C_0 = C_1 = C_2 = 0, \ C_3 \neq 0)$

ευστάθεια;

Λύση.

$C_0 = a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \cdots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \cdots + k^{j-1} b_k), \ j \geq 2 \ *_1$

109. $C_1 = a_1 + 2a_2 - 1.$

$$C_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4a_2) - \frac{1}{1!}\,2\cdot 1.$$

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0 \iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0. \\ a_1 + 2a_2 = 1. \\ a_1 + 4a_2 = 4. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a_2 = \frac{3}{2}. \\ a_1 = -2. \\ a_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$C_3 = \frac{1}{6}\left(-2 + 2^3\,\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\,2^2\cdot 1 = -\frac{1}{3} \neq 0.$$

Άρα $\boxed{p = 2.}$

→ Ευστάθεια $p(z) = \frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}$ με $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{3}$ απλές ρίζες

και $|z_i| \le 1$.

⇒ ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

Άρα η μέθοδος είναι ευσταθής!

Άσκηση 4.15 $a_3 = 1$, $a_2 = -\frac{11}{6}$, $a_1 = 1$, $a_0 = -\frac{1}{6}$.

$b_3 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{7}{12}$.

Ευσταθής;

Στη ευστάθεια παίζουν ρόλο μόνο τα α!

Λύση

Θα ελέγξω αν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

$$p(z) = z^3 - \frac{11}{6}z^2 + z - \frac{1}{6}. \qquad p(1)=0.$$

↳ Μπορώ να τη λύσω κ' με διαίρεση πολυωνύμων!

$$= z^3 - \frac{6}{6}z^2 - \frac{5}{6}z^2 + z - \frac{1}{6}$$

$$= z^2(z-1) - \frac{5}{6}(z^2 - z) + \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}$$

$$= z^2(z-1) - \frac{5}{6}(z^2-z) + \frac{1}{6}(z-1) =$$

$$= z^2(z-1) - \frac{5}{6}z(z-1) + \frac{1}{6}(z-1) =$$

$$= (z-1)\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)$$

$z_1 = 1$. $\quad z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \iff 6z^2 - 5z + 1 = 0.$

$$z_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} z_2 = \frac{1}{2} \\ z_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = \frac{1}{3}$ $\quad |z_i| \le 1$ απλές ρίζες,

Επομένως ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι ευσταθής!

171. Άσκηση 4.16:

Συνέπεια της μεθόδου της προηγούμενης Άσκησης.
Τάξη τουλάχιστον 1.

$C_0 = a_0 + \cdots + a_3 = p(1) = 0$ ✓

$C_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 - (b_0 + b_1 + b_2 + b_3) =$
$= \left(1 - \frac{11}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.$

Άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 4.21: $a_k, \ldots, a_0, b_k, \ldots, b_0$.

Υπόθεση: Η μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής.

Νδο $b_0 + \cdots + b_k \neq 0$.

Λύση

Αφού η μέθοδος είναι συνεπής:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= p(1) = 0 \\ C_1 &= p'(1) - \sigma(1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p(1) &= 0 \\ p'(1) &= \sigma(1) \end{aligned}\right\}$$

Αρκεί νδο $\sigma(1) \neq 0$.

→ Έστω ότι $b_0 + \cdots + b_k = 0$. Δηλαδή $\sigma(1) = 0$.
Τότε

$$p(1) = p'(1) = 0$$

Δηλαδή το 1 είναι πολλαπλή ρίζα του p,
Άρα η μέθοδος είναι ασταθής. ↯
Άτοπο

Συμπεραίνουμε $\sigma(1) \neq 0 \Rightarrow b_0 + \cdots + b_k \neq 0$.

Άσκηση 4.22 : $\begin{cases} y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h \cdot f(t^{n+2}, y^{n+2}) \end{cases}$

α_k $\qquad$ b_k $n = 0, \ldots, N-2$.

Υπόθεση: $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

$\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad [f(t, y_1) - f(t, y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$.

Νδο: Προσεγγίσεις καλά ορισμένες.

αρκεί α_k κ' b_k ομόσημοι $\neq 0$.

Λύση

Για δεδομένα y^n, y^{n+1}, αρκεί να αποδείξω ότι το y^{n+2} είναι καλά ορισμένο.

→ Θεωρώ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - h \cdot f(t^{n+2}, x)$

Αρκεί να αποδείξω ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα, αφού κάθε ρίζα $\tilde{x}$ ικανοποιεί τη μέθοδο με $y^{n+2} = \tilde{x}$

* Μοναδικότητα: $g(x) = \underbrace{\frac{3}{2} x}_{\text{γν. αύξ.}} \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - h f(t^{n+2}, x)}_{\text{αύξουσα συνάρτηση}}$

Άρα η g είναι γν. αύξουσα.

$\Rightarrow$ η g έχει το πολύ μία ρίζα.

* Ύπαρξη: Η g είναι συνεχής

173 Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

* $\underline{\text{Για } x \geq 0}$: $h \cdot f(t^{n+2}, x) \leq h \cdot f(t^{n+2}, 0)$

$-h\, f(t^{n+2}, x) \geq -h\, f(t^{n+2}, 0)$.

$$\Rightarrow g(x) \geq \frac{3}{2}x \underbrace{-2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - h \cdot f(t^{n+2}, 0)}_{C} \to \infty, \quad x \to \infty$$

Επομένως η g παίρνει και θετικές τιμές.

* $\underline{\text{Για } x \leq 0}$: $h \cdot f(t^{n+2}, x) \geq h \cdot f(t^{n+2}, 0)$

$-h \cdot f(t^{n+2}, x) \leq -h \cdot f(t^{n+2}, 0)$.

$$\Rightarrow g(x) \leq \frac{3}{2}x \underbrace{-2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n - h \cdot f(t^{n+2}, 0)}_{C} \to -\infty, \quad x \to -\infty$$

Επομένως η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

Η g είναι συνεχής και λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Συμπέρασμα ύπαρξη + μοναδικότητα ⇒ g έχει ακριβώς μία ρίζα!