3ο Μέθοδοι των Runge-Kutta

3.1 Προκαταρκτικοί Συμβολισμοί κ' Παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

Έστω $q \in \mathbb{N}$ $\quad \tau_1, \dots, \tau_q \in \mathbb{R}$ (συνήθως $\tau_i \in [0,1]$)

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad i,j = 1, \dots, q$

και $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$

- Γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή μητρώου (Butcher)

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

($q^2 + 2q$ παράμετροι)

- Τύποι ολοκλήρωσης: (b_i βάρη, τ_i κόμβοι!) Oo

$$\int_0^1 \phi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \phi(\tau_i)$$

$$*_1 \quad \int_0^{\tau_i} \phi(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \phi(\tau_j), \quad i = 1, \dots, q$$

- $q+1$ τύποι ολοκλήρωσης.
- Κόμβοι όλων των τύπων: $\tau_1, \dots, \tau_q$
- Βάρη του τύπου για το ολοκλήρωμα στο $[0,1]$: $b_1, \dots, b_q$
- Βάρη του τύπου για το ολοκλήρωμα στο $[0,\tau_i]$: $a_{i1}, \dots, a_{iq}$

117. Βήμα της μεθόδου: $y^n \to y^{n+1}$;

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

Ενδιάμεσοι κόμβοι $t^{n,i} := t^n + \tau_i h$ $\quad i = 1, \dots, q$

$$(*)\begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad i = 1, \dots, q \\ \text{(σύστημα } q \text{ εξισώσεων με } q \text{ αγνώστους τα } y^{n,i}, \dots, y^{n,q}) \\ y^{n+1} := y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

Πώς οδηγούμαστε στην $(*)$;

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\underset{t = t^n + hs}{=} y(t^n) + h \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \int_0^{\tau_i} f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds$$

$$\overset{*_1}{\approx} y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(\overbrace{t^n + h\tau_j}^{t^{n,j}}, y(\overbrace{t^n + h\tau_j}^{t^{n,j}}))$$

$*_1$ Από θεωρία για ολοκλήρωμα $\int_0^{\tau_i}$ προσεγγίζω με βάρη $a_{i1}, \dots, a_{iq}$

Δηλαδή
$$y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y(t^{n,j})), \quad i = 1, \dots, q$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$, το $y(t^n)$ με y^n και τα $y(t^{n,\ell})$ με $y^{n,\ell}$ οδηγούμαστε στην πρώτη σχέση της (*)

■ $y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\underset{t = t^n + hs}{=} y(t^n) + h \int_0^1 f(t^n + hs, y(t^n + hs))\,ds$$

$$\approx y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(\underbrace{t^n + h\tau_i}_{t^{n,i}}, y(\underbrace{t^n + h\tau_i}_{t^{n,i}}))$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$, το $y(t^n)$ με y^n, και τα $y(t^{n,i})$ με $t^{n,i}$ καταλήγουμε στη 2η σχέση της (*)

▶ <u>Μέθοδος Runge-Kutta:</u>

$$\begin{cases} (*)\ y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i = 1, \dots, q \\ (**)\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) & n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

Γενική μέθοδος RK με q ενδιάμεσα στάδια. Γενικά η (*) είναι ένα μη γραμμικό σύστημα. Στην περίπτωση $y: [a,b] \to \mathbb{R}$, οι άγνωστοι είναι πραγματικοί οπότε έχουμε q εξισώσεις με q αγνώστους.

Στην περίπτωση $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ οι άγνωστοι $y^{n,i}$ είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^m$, οπότε το (*) είναι

1. 1.19 ένα σύστημα $q^{ων}$ εξισώσεων με $q^{ων}$ αγνώστους.

Τα $y^{n,i}$ λέγονται ενδιάμεσα στάδια και αποτελούν προσεγγίσεις των $y(t^{n,i})$. Βασικά θα μας απασχολήσει το $\boxed{\text{θέμα}}$ πόσο καλές προσεγγίσεις των $y(t^n)$ είναι οι y^n.

• $1^η$ περίπτωση: Έστω ότι ο πίνακας A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij}=0 \ \forall j \geq i$

Τότε το (*) γράφεται στη μορφή:

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h\, a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}). \end{cases}$$

Τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά χωρίς να απαιτείται επίλυση κάποιας εξίσωσης.

Αυτές οι μέθοδοι λέγονται άμεσες.

• $2^η$ περίπτωση: Ο A δεν είναι γνήσια κάτω τριγωνικός. Τότε οι μέθοδοι λέγονται πεπλεγμένες.

→ Ειδική περίπτωση: Ο A κάτω τριγωνικός $a_{ij}=0$ για $j>i$

Τότε το (*) γράφεται στη μορφή:

$$y^{n,1} = y^n + h \cdot a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \xrightarrow{} \text{άγνωστος}: y^{n,1}$$

$$y^{n,2} = y^n + h \cdot a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h \cdot a_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2})$$

άγνωστος: $y^{n,2}$

$\vdots$

$$y^{n,q} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j}) + h\, a_{qq} f(t^{n,q}, y^{n,q})$$

άγνωστος: $y^{n,q}$

Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα (*) αποσυνδέεται με q εξισώσεις, η καθε μία με έναν άγνωστο, που μπορούν να λυθούν αναδρομικά. Αυτό είναι πολύ λιγότερο δαπανηρό υπολογιστικά από την επίλυση ενός συστήματος με q εξισώσεις και q αγνώστους. Οι μέθοδοι αυτές λέγονται ημιπεπλεγμένες.

* Θα δούμε αργότερα ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει μία μέθοδος RK τάξη ακρίβειας p τουλάχιστον ένα είναι: $b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1$

* Επίσης για τις μεθόδους που θα δούμε ισχύει:
$a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{iq} = \tau_i \qquad i = 1, \ldots, q$

▶ Παραδείγματα μεθόδων RK:

(1) $q = 1$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{cases}$$

με $t^{n,1} = t^n$

Η μέθοδος είναι: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$
(άμεση μέθοδος του Euler).

(δεν θα μπορώ πάντα να το κάνω αυτό) $p = 1$!

121. (2) $q=1$ $\quad \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

* Είναι πεπλεγμένη γιατί έχω 1 και όχι 0 στην κύρια διαγώνιο.

$$y^{n,1} = y^n + h \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

$$t^{n,1} = t^n + h = t^{n+1}$$

$y^{n,1} = y^{n+1}$ (αφού β' μέλη ίσα άρα και τα α')

Η μέθοδος είναι: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$

πεπλεγμένη μέθοδος Euler $p=1$

(3) $q=1$ $\quad \begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\quad t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2}$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h \cdot \frac{1}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) & (1) \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot 1 \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow y^{n+1} - y^n = 2(y^{n,1} - y^n) \Rightarrow 2y^{n,1} = y^n + y^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{n,1} = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$

Εάν: $y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$

μέθοδος του μέσου $p=2$

(4) $q = 2$

0	0	0
$1/2$	$1/2$	1
$1/2$	$1/2$	

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right] \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right] \end{cases}$$

ίδια β' μέλη.

Θα προσπαθήσω να τα απλοποιήσω:

$y^{n,1} = y^n \qquad t^{n,1} = t^n$

$y^{n,2} = y^{n+1} \qquad t^{n,2} = t^n + h = t^{n+1}$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

μέθοδος του τραπεζίου $\underline{p=2}$.

(5) $q = 2$

0	0	0
$1/2$	0	$1/2$
0	1	

→ γνήσια κάτω τριγωνικός ο πίνακας!

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(\overset{t^n}{t^{n,1}}, \overset{y^n}{y^{n,1}})$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2})$

τα ξέρω

193 $t^{n,1}=t^n$

$t^{n,2}=t^n+\frac{h}{2}$

$$y^{n+1}=y^n+ f\Big(\underbrace{t^n+\tfrac{h}{2}}, \; y^n+\tfrac{h}{2}f(t^n,y^n)\Big)$$

ό,τι σου δίνει η μέθοδος του Euler για $h=\frac{h}{2}$

$p=2$ → άμεση μέθοδος του μέσου

→ βελτιωμένη μέθοδος του Euler.

6 $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array} \qquad \mu\in\mathbb{R}$$

• Για γενικό μ έχουμε τάξη $p=2$

• Για $\mu=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$ έχουμε τάξη $p=3$

λέγονται: $(2,3)$ DIRK. διαγώνια πεπλεγμένες μέθοδοι Rung-Kutta.

$\;\uparrow\;\;\;\uparrow$
$\;q\;\;\;\;p$

Για $q\in\mathbb{N}$ η τάξη μιας μεθόδου Runge-Kutta με q ενδιάμεσα στάδια είναι το πολύ $2q$.

Για κάθε q υπάρχει ακριβώς μία μέθοδος RK με q ενδιάμεσα στάδια και τάξη $p=2q$.

Αν $q=1$ $\;p=2$ (μέθοδος του μέσου)

(7) $q=2$ $p=4$ (Δν μπορώ να έχω τάξη μεγαλύτερη του 4).

$1/4$	$1/4-\mu$	$1/2-\mu$
$\frac{1}{4}+\mu$	$1/4$	$1/2+\mu$
$1/2$	$1/2$.	

με $\boxed{\mu=\frac{\sqrt{3}}{6}.}$

μέθοδος Gauss-Legendre δύο σταδίων (Runge-Kutta εννοείται).

(8) $q=3$. (για ιστορικούς λόγους). (Δν είναι εξεταστέα)

0	0	0	0
$1/2$	0	0	$1/2$.
-1	2	0	1
$1/6$	$2/3$	$1/6$.	

→ μέθοδος Kutta τρίτης τάξης.

0	0	0	0
$1/3$	0	0	$1/3$
0	$2/3$	0	$2/3$
$1/4$	0	$3/4$	

→ μέθοδος Heun τρίτης τάξης.

0	0	0	0
$1/2$	0	0	$1/2$.
0	$3/4$	0	$3/4$
$2/9$	$1/3$	$4/9$	

→ μέθοδος Ralston ($p=3$) (mathlab).

125. (g) $q=4$. κλασσική μέθοδος RK.

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & \end{array}$$

$p=4$.

* Επιλυσιμότητα:

• Στην περίπτωση άμεσων μεθόδων τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, οπότε είναι προφανώς καλά ορισμένα.

➡ Ερώτημα: Στην περίπτωση πεπλεγμένων μεθόδων έχει το (*) μοναδική λύση;

Υπόθεση: $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ και η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

(+) $\exists\, L \geq 0$ ώ $\forall t\in[a,b]$ $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R}$:
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L\,|y_1-y_2|$$

▶ Πρόταση: (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων)
Έστω ότι ικανοποιείται η (+). Αν το h είναι αρκετά μικρό ώστε $\gamma h<1$ με $\gamma=L$

$\max\limits_{1\leq i\leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$ τότε το σύστημα (*) έχει ακριβώς μία λύση.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad a \le t \le b, \qquad \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & c_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & c_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

με $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

$t^{n,i} = t^n + c_i h$, $i = 1, \dots, q$

$$y^0 = y_0, \quad y^n \longmapsto y^{n+1}: \quad \begin{cases} y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad (*) \quad i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-1$.

- Επιλυσιμότητα του συστήματος $(*)$:

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz,
$\exists L \ge 0 \;\; \forall t \in [a,b] \;\; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
$(+)$ $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|$.

- Θεώρημα: Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων.

Έστω ότι ικανοποιείται η $(+)$,

έστω

$$\gamma := L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$$

Τότε για h αρκετά μικρό ώστε $\gamma h < 1$ $\left(h < \frac{1}{\gamma}\right)$, το σύστημα $(*)$ έχει ακριβώς μία λύση.

Απόδειξη — ό,τι κάναμε κ' στην πεπλεγμένη Euler, μόνο που εδώ είναι διανυσματικά

Ορίζουμε μία διανυσματική συνάρτηση $F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

127 $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_q(x))$ $\quad x = (x_1, \dots, x_q)^T$

$$F_i(x) := y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, x_j) \quad i = 1, \dots, q$$

Τότε ουσιαστικά θέλουμε να αποδείξουμε ότι το σύστημα $x = F(x)$ έχει ακριβώς μία λύση.
(Με άλλα λόγια: κάθε λύση $(y^{n,1}, \dots, y^{n,q})$ του (*) είναι σταθερό σημείο της F, και αντίστροφα, κάθε σταθερό σημείο της F είναι λύση του (*)).

Αν αποδείξουμε ότι η F είναι συστολή, π.χ. στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, η F θα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, οπότε το (*) θα έχει μοναδική λύση.

- Ισχυρισμός: Η F είναι συστολή στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$.

Απόδειξη

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q$ έχουμε

$$F_i(x) - F_i(\tilde{x}) = h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left[f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|f(t^{n,j}, x_j) - f(t^{n,j}, \tilde{x}_j)|}_{\le L |x_j - \tilde{x}_j|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le L \cdot h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\, \underbrace{|x_j - \tilde{x}_j|}_{\le \|x - \tilde{x}\|_\infty} \Rightarrow$$

το πιο μεγάλο ως προς j, για να μην εξαρτάται από j.

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le \left(L \cdot h \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \right) \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty \Rightarrow$$

το ίδιο θα κάνω κ' για το i;

$$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le h \Big(\underbrace{L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|}_{=:\gamma} \Big) \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow |F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \leq \gamma \cdot h \cdot \|x - \tilde{x}\|_\infty \quad , \; i = 1, \ldots, q$

Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του i, οπότε

$$\underbrace{\max_{1 \leq i \leq q} |F_i(x) - F_i(\tilde{x})|}_{\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty} \leq \gamma \cdot h \, \|x - \tilde{x}\|_\infty .$$

Συμπέρασμα: $\forall \, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^q \quad \|F(x) - F(\tilde{x})\|_\infty \leq \underbrace{\gamma \cdot h}_{<1} \, \|x - \tilde{x}\|_\infty$

δηλαδή η F είναι συστολή στον $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$.

▶ Ευστάθεια:

* Ορισμός: Έστω y^n, $n = 0, \ldots, N$ όπως ορίστηκαν

και

$$\begin{cases} z^0 \in \mathbb{R} \text{ τυχαίο} \\ z^{n,i} = z^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \qquad i = 1, \ldots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) \end{cases}$$

Υπόθεση: Ικανοποιείται η $(+)$ και $\gamma h < 1$.

Η μέθοδος RK λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει σταθερά C, εξαρτώμενη από τα δεδομένα (τη μέθοδο RK, τα a, b, και την L) αλλά ανεξάρτητη από το h, τ.ω.

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq C \, |y^0 - z^0| .$$

Πρόταση: (Ευστάθεια μεθόδων RK)

Έστω ότι ικανοποιείται η (†) και ότι $\gamma h<1$.

Έστω $y^0,\dots,y^N$ όπως ορίστηκαν και $z^0,\dots,z^N$.

τ.ω.

$$\begin{cases} z^0\in\mathbb{R} \text{ τυχαίο.} \\ z^{n,i}=z^n+h\cdot\sum_{j=1}^{q}a_{ij}f(t^{n,j},z^{n,j}) \quad i=1,\dots,q \\ z^{n+1}=z^n+h\cdot\sum_{i=1}^{q}b_i f(t^{n,i},z^{n,i})+p^n \end{cases}$$

με p^n τυχόντες αριθμούς. Τότε υπάρχουν σταθερές C_1 και C_2 (εξαρτώμενες από τη μέθοδο, την f, τα a και b) ανεξάρτητες του h και των p^n τ.ω.

$$\max_{0\le n\le N}|y^n-z^n|\le C_1|y^0-z^0|+C_2\frac{1}{h}\max_{0\le n\le N-1}|p^n|$$

*Παρατήρηση: Επιλέγοντας στην προηγούμενη Πρόταση $p^0=p^1=\dots=p^{N-1}=0$, το αποτέλεσμα γράφεται στη μορφή

$$\max_{0\le n\le N}|y^n-z^n|\le C_1|y^0-z^0|,$$

δηλαδή παίρνουμε ευστάθεια της μεθόδου RK.

Απόδειξη

$$(1)\ \begin{cases} y^{n,i}=y^n+h\cdot\sum_{j=1}^{q}a_{ij}f(t^{n,j},y^{n,j}) \quad i=1,\dots,q \\ y^{n+1}=y^n+h\cdot\sum_{i=1}^{q}b_i f(t^{n,i},y^{n,i}) \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} z^{n,i}=z^n+h\cdot\sum_{j=1}^{q}a_{ij}f(t^{n,j},z^{n,j}) \quad i=1,\dots,q \\ z^{n+1}=z^n+h\sum_{i=1}^{q}b_i f(t^{n,i},z^{n,i})+p^n \end{cases}$$

- Αφαιρούμε κατά μέλη τις πρώτες σχέσεις των (1) και (2) και έχουμε:

$$y^{n,i} - z^{n,i} = (y^n - z^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left[f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j}) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot |f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \, L \cdot |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

ανεξαρτήτου από το j, βγαίνει..

$$\le |y^n - z^n| + h \cdot L \cdot \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \max_{1 \le j \le q} |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\le |y^n - z^n| + h \underbrace{\left(L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \right)}_{\gamma} \cdot \max_{1 \le j \le q} |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\gamma \max_{1 \le j \le q} |y^{n,j} - z^{n,j}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + \gamma h \max_{1 \le j \le q} |y^{n,j} - z^{n,j}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \frac{1}{1 - \gamma h} |y^n - z^n| \Rightarrow$$

υπόθεση $\gamma h < 1$ άρα $1 - \gamma h > 0$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \frac{1}{1 - \gamma h} |y^n - z^n| \quad i = 1, \dots, q$$

Άρα για $h \le h_0 < \frac{1}{\gamma}$, έχουμε:

$$\boxed{|y^{n,i} - z^{n,i}| \le G \, |y^n - z^n| \quad , i = 1, \dots, q} \quad \text{με } G = \frac{1}{1 - \gamma h_0}$$

- Αφαιρούμε κατά μέλη τις δεύτερες σχέσεις των (1) και (2) και έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \left[f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i}) \right] - p^n$$

131 $\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \cdot \sum_{i=1}^{q} |b_i| \underbrace{|f(t^{n,i}, y^{n,i}) - f(t^{n,i}, z^{n,i})|}_{\le L\, |y^{n,i} - z^{n,i}|} + |p^n| \Rightarrow$

$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \cdot L \cdot \sum_{i=1}^{q} |b_i| \cdot \underbrace{|y^{n,i} - z^{n,i}|}_{\le G\, |y^n - z^n|} + |p^n| \Rightarrow$

$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + h \cdot \underbrace{L \cdot G \cdot \sum_{i=1}^{q} |b_i|}_{G'})\, |y^n - z^n| + \max_{0 \le m \le N-1} |p^m|$

Επομένως σύμφωνα με το Λήμμα (σελ 82)

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{G'(b-a)}}_{G_1} |y^0 - z^0| + \underbrace{\frac{e^{G(b-a)} - 1}{G}}_{G_2} h \max_{0 \le m \le N-1} |p^m|$$

Τέλος ύλης 2ης προόδου

3ο

1

Τάξη ακρίβειας και σύγκλιση μεθόδων R.K.

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz
Η λύση του Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \quad a \le t \le b, \end{cases}$$

Είναι αρκετά ομαλή

Σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα:

$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) \quad i=1,\dots,q.$$

Τα $\zeta^{n,i}$ είναι καλά ορισμένα για $Lh < 1$.

$$\delta^n := \underbrace{\left[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \zeta^{n,i}) \right]}_{} - y(t^{n+1})$$

αυτήν την προσέγγιση βρίσκαμε ξεκινώντας από την $y(t^n)$ και κάνοντας ένα βήμα.

Το δ^n λέγεται σφάλμα συνέπειας.

* Τάξη ακρίβειας: (ή απλώς τάξη) της μεθόδου RK λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης p, για τον οποίο, για όλα τα προβλήματα που θεωρούμε, υπάρχει σταθερά $\tilde{C}$ (εξαρτώμενη από την μέθοδο την f, την y, ..) αλλά ανεξάρτητη του h, τ.ω.

$$\boxed{\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C} \cdot h^{p+1}} \quad (3)$$

→ Αν το $p \ge 1$, τότε η μέθοδος λέγεται συνεπής.
(θα δούμε αργότερα: $p \ge 1 \iff b_1 + b_2 + \dots + b_q = 1$)

133. **Θεώρημα:** (Εκτίμηση σφάλματος)

Έστω ότι ισχύει η συνθήκη του Lipschitz, η f και η y είναι αρκετά ομαλές, και η τάξη της μεθόδου είναι p, οπότε ισχύει η (3).

Τότε έχουμε την εκτίμηση σφάλματος:

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'}\left[e^{C'(b-a)}-1\right]\cdot h^p$$

Απόδειξη

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) - \delta^n$$

Με $z^n = y(t^n)$ και $p^n = -\delta^n$, ικανοποιούνται οι συνθήκες της προηγούμενης Πρότασης, οπότε έχουμε:

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le C_1 \cancel{|y^0-y(a)|} + \frac{C_2}{h}\max_{0\le n\le N-1}|-\delta^n|$$

Άρα:

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \underset{(3)}{\le} \frac{C_2}{\cancel{h}}\cdot\tilde{C}\cdot h^{p+\cancel{1}} = \tilde{C}\, C_2\, h^p.$$

Άσκηση 3.12: Μια μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας $p\ge 1 \iff b_1+b_2+\dots+b_q=1$.

Απόδειξη.

$$\begin{cases} y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) & i=1,\dots,q \\ \delta^n = \left[y(t^n) + h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})\right] - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\delta^n = O(h^2) \iff b_1 + b_2 + \cdots + b_q = 1.$$

Έχουμε
$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + O(h)$$
$$t^{n,i} = t^n + O(h),$$

οπότε
$$f(t^{n,i}, \zeta^{n,i}) \underset{\text{Taylor}}{=} f(t^n, y(t^n)) + O(h)$$

στο δ^n αφαιρούμε από αυτό που ξέρουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Επομένως
$$\delta^n = y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i [f(t^n, y(t^n)) + O(h)] - y(t^{n+1}) =$$

$$= y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h^2) - y(t^{n+1}) =$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \cdot \left(\sum_{i=1}^{q} b_i\right) y'(t^n) + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + h\, y'(t^n) + O(h^2)]$$

$$= h \left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

Γενικά $y'(t^n) \neq 0$

Επομένως $\delta^n = O(h^2) \iff \sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0$

είναι μηδέν γιατί αλλιώς το δ^n θα ήταν τάξης h ενώ εμείς θέλουμε να είναι h^2 για να έχουμε τάξη ακριβείας $p \geq 1$.

Άσκηση 3.9:
$$\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$$
νδό $p = 1$.

το $b_1 = 1$ άρα h^2 είναι μεταξύ 1 και 2

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + h \cdot \frac{1}{3} f\left(t^n + \frac{1}{3} h, \zeta^{n,1}\right)$$

$$\delta^n = \left[y(t^n) + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{3}, \zeta^{n,1}\right)\right] - y(t^{n+1})$$

Τώρα $\zeta^{n,1} = y(t^n) + O(h) \Rightarrow f\left(t^n + \frac{h}{3}, \zeta^{n,1}\right) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$

Άρα

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot[f(t^n, y(t^n)) + O(h)] - [y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2)] =$$

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h\cdot y'(t^n)} + O(h^2) - \cancel{y(t^n)} - \cancel{h\cdot y'(t^n)} + O(h^2) =$$

$$= O(h^2) \Rightarrow \boxed{p \geq 1}$$

* Για νδο η τάξη <u>δεν</u> είναι μεγαλύτερη από 1 παίρνω ένα παράδειγμα.

γιατί θέλω νδο $p=1$ ❗ αν ήθελα νδο $p=2$ θα έπαιρνα t^2.

Παράδειγμα: $\begin{cases} y'(t) = \underbrace{2t^1}_{f(t)} & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

με λύση $y(t) = t^2$.

Τότε

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{3}\right) - y(t^{n+1}) =$$

$$= (t^n)^2 + h\cdot 2\left(t^n + \frac{h}{3}\right) - (\underbrace{t^n + h}_{\to t^n = nh})^2 = -\frac{1}{3}h^2 \Rightarrow$$

$t^{n+1} = (n+1)\cdot h$ } το $a=0$.

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \underbrace{\frac{1}{3}}_{\neq 0} h^2 \Rightarrow p \leq 1.$$

Συμπέρασμα: $p = 1$.

• Άσκηση 3.3 :

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & c_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$

$\to$ το $b_1 + b_2 = 1$ αφού θδο $p=2$.

Ποιες απ' αυτές τις μεθόδους έχουν τάξη ακρίβειας $p=2$;

Λύση

$\zeta^{n,1} = y(t^n) + 0$

$\zeta^{n,2} = y(t^n) + h \cdot a_{21} \cdot f(\underbrace{t^n}_{c_1=0}, \underbrace{\zeta^{n,1}}_{y(t^n)}) + 0$

$\delta^n = [y(t^n) + h \cdot b_1 f(t^n, \underbrace{\zeta^{n,1}}_{y(t^n)}) + \underbrace{h \cdot b_2 f(t^n + c_2 h, \zeta^{n,2})}_{*_2}] - y(t^{n+1})$

Άρα

$\delta^n = y(t^n) + h \cdot b_1 \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + h \cdot b_2 \cdot f(t^n + c_2 \cdot h, y(t^n) + h a_{21} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)})$
$- y(t^{n+1})$

Έχουμε

taylor ως προς t^n.

$f(t^n + c_2 h, y(t^n) + h \cdot a_{21} y'(t^n)) = f(t^n, y(t^n)) + c_2 h f_t(t^n, y(t^n)) +$
$+ h a_{21} y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$ $*_1$

$*_1$ κανονικά αφού δσδ $p=2$ θέλω να έχω $O(h^3)$ αλλά επειδή παρατηρώ $*_2$ ότι το $f(t^n + c_2 h, y(t^n) + h a_{21} y'(t^n))$ πολ/ται με h που δίνει $O(h^3)$, αρα δεν χρειάζεται να συνεχίσω το Taylor μετά το $O(h^2)$!

Άρα

$\delta^n = y(t^n) + b_1 h y'(t^n) + b_2 h [f(t^n, y(t^n)) + c_2 h f_t(t^n, y(t^n)) +$
$+ h a_{21} y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n))] + O(h^3) - y(t^{n+1}) =$

$= \cancel{y(t^n)} + h(b_1 + b_2) \cdot y'(t^n) + b_2 c_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) +$
$+ b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3) - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) +$
$+ \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)] =$

αν $b_1 + b_2 = 1$

$= h(b_1 + b_2 - 1) y'(t^n) + b_2 c_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n))$
$+ b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)$ (1)

Ξέρω ότι η ΔΕ είναι: $y'(t) = f(t, y(t))$
και παραγωγίζοντας $y''(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t)$

13γ Αντικαθιστώντας στο $y''(t^n)$ έχουμε:

$$① = b_2 \tau_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} f_y(t^n, y(t^n)) \cdot y'(t^n) + O(h^3) =$$

$$= \left(b_2 \tau_2 - \frac{1}{2}\right) h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + \left(b_2 a_{21} - \frac{1}{2}\right) h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3)$$

$$\delta^n = O(h^3) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \tau_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Για $b_2 \neq 0$ έχουμε $\begin{cases} b_1 = 1 - b_2 \\ \tau_2 = a_{21} = \dfrac{1}{2 b_2} \end{cases}$

Τότε $p \geq 2$.

*Τώρα όσο η τάξη δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του 2. (με ένα παράδειγμα)

Παράδειγμα. $\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $t \in [0,1]$

με λύση $y(t) = e^t$.

$$\delta^n = y(t^n) + h b_1 y(t^n) + h \cdot b_2 \underbrace{y^{n,2}}_{= y(t^n) + h a_{21} y(t^n)} - y(t^{n+1}) =$$

$$= y(t^n) + h b_1 y(t^n) + h b_2 y(t^n) + h^2 b_2 a_{21} y(t^n) - \underbrace{y(t^{n+1})}_{= y(t^n) \cdot e^h} =$$

$$= y(t^n)\left[1 + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{= 1} h + \underbrace{b_2 a_{21}}_{= 1/2} h^2 - e^h\right] =$$

$$= y(t^n)\left[1 + h + \frac{h^2}{2} - \underbrace{e^h}_{= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + O(h^4)}\right] = -\frac{1}{3} h^3 y(t^n) + O(h^4)$$

$\Rightarrow |\delta^n| \geq C h^3 \Rightarrow p \leq 2$

Άρα $p = 2$!

Προσδιορισμός της τάξης ακρίβειας p μιας μεθόδου RK.

Θεωρούμε μία μέθοδο RK με q ενδιάμεσα στάδια.

Γενικά σχόλια.

1ο $p \leq 2q$

$p \leq q$ για άμεσες μεθόδους.

2ο Έστω $\tilde{p}$ ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω.

$$\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^{\ell} = \frac{1}{\ell+1} \qquad \ell \; 0, \dots, p-1.$$

Τότε $p \leq \tilde{p}$

$$* \int_0^1 \phi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \phi(\tau_i)$$

$$\phi(x) = x^{\ell}$$

Δηλαδή ολοκλη- ρώνει ακ βώς πολυώ νυμα βαθμού p

3ο $p \geq 1 \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q = 1$.

4ο Η τάξη ακρίβειας μπορεί να προσδιοριστεί με αναπτύγματα Taylor. Για μεγάλο q οι πράξεις γίνονται πολύ πολύπλοκες. Οι πράξεις διευκολύνονται με χρήση των λεγόμενων δένδρων Butcher και συμβολικούς υπολογισμούς.

5ο Οι λεγόμενες απλοποιημένες συνθήκες μπορούν να ελεγχθούν εύκολα και δίνουν κάτω φράγματα για το p.

Για κάποιες οικογένειες μεθόδων RK (που χρησιμοποιούνται πολύ στην πράξη) οι απλοποιημένες συνθήκες δίνουν την τάξη ακρίβειας.

6. Κάτω φράγματα για την p προκύπτουν και από τη λεγόμενη συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου RK (περισσότερα αργότερα).

Παράδειγμα. Η (πεπλεγμένη) μέθοδος του μέσου.

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} p = ; \\ \boxed{1 \le p \le 2} \end{array}$$

Λύση

- Ισχυρισμός $p=2$.

$$\begin{cases} \zeta^{n,1} = y(t^n) + \frac{1}{2} h \, f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right) \\ \delta^n = y(t^n) + h \cdot \underline{f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)} - y(t^{n+1}) \end{cases}$$

Έχουμε

$$f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right) = f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)\right) =$$

$$= f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)}_{= f(t^n, y(t^n)) + O(h)} \cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2) =$$

$$= \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} \cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow f\left(t^n+\frac{h}{2}, Y^{n,1}\right) = y'(t^n) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} y'(t^n)\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

Αρα

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3)$$
$$- \left[\cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2}\left[\underbrace{f_t(t^n, y(t^n)) + y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) - y''(t^n)}_{0}\right] + O(h^3) \Rightarrow$$

όπως πριν $y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$, $y''(t^n) = \dots$

$$\Rightarrow O(h^3) = \delta^n \Rightarrow \boxed{p \geq 2}$$

Παράδειγμα: $\begin{cases} y'(t) = 3t^2 \rightarrow p=2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

με $y(t) = t^3$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, Y^{n,1}\right) - y(t^{n+1}) =$$

αυτό δεν χρειάζεται αφού $y'(t) = 3t^2$ δν εξαρτάται απ'το y!

$$= (t^n)^3 + h\cdot 3\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - (t^n+h)^3 = \dots = \frac{h^3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \tfrac{1}{2} h^3 \Rightarrow \boxed{p \leq 2}$$

Συμπέρασμα $\boxed{p=2}$

Θεώρημα: (Απλοποιημένες συνθήκες) Butcher, Crouzeix

Έστω ακέραιοι $p, s, r \geq 1$ τ.ω

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} b_i c_i^{\,l} = \frac{1}{l+1}, \quad l = 0, \dots, p-1$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} c_j^{\,l} = \frac{c_i^{\,l+1}}{l+1}, \quad i = 1, \dots, q \;\; \kappa' \; l = 0, \dots, s-1$

141 (iii) $\sum_{i=1}^{q} b_i \tau_i^{l} a_{ij} = \dfrac{b_j(1-\tau_j^{l+1})}{l+1}$ $j=1,\dots,q$, $l=0,\dots,r-1$

(v) $p \le r+s+1$ και $p \le 2s+2$.

Τότε η τάξη ακριβείας της μεθόδου RK $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b & \end{array}$ είναι τουλάχιστον p.

Οι (i)-(v) λέγονται "απλοποιημένες" ικανές συνθήκες για να έχει η μέθοδος RK τάξη ακριβείας τουλάχιστον p.

Με άλλα λόγια:

Αν p, r, s είναι οι μεγαλύτεροι ακέραιοι για τους οποίους ισχύουν οι (i)-(iii), τότε η τάξη της μεθόδου είναι τουλάχιστον $\min(p, r+s+1, 2s+2)$

* Εξήγηση του i κ' ii:

→ (i): $\int_0^1 \phi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{q} b_i \phi(\tau_i)$

Για $\phi(x) = x^l$ $l=0,\dots,p-1$ η σχέση (i) μας λέει ότι έχουμε ισότητα, με άλλα λόγια ο προηγούμενος τύπος ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $p-1$ ακριβώς

→ (ii): $\int_0^{\tau_i} \phi(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \phi(\tau_j)$ $i=1,\dots,q$

$\phi(x) = x^l$, $l=0,\dots,s-1$

Δηλαδή: Οι τύποι ολοκληρώνουν πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $r-1$ ακριβώς.

Πόρισμα: (Butcher, Crouzeix)

α) Έστω p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (i). Αν ισχύει η (ii) για $s=p-1$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι <u>ακριβώς</u> p

β) Έστω q' το πλήθος των c_i που είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Αν p ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει η (i) και ισχύουν οι (ii) με $s=q'$, τότε η τάξη της μεθόδου είναι p.

γ) Υπάρχει ακριβώς μία μέθοδος RK με τάξη $p=2q$ (Όλες οι άλλες έχουν τάξη $p<2q$)
Τα c_i και b_i είναι οι κόμβοι και τα βάρη, αντίστοιχα του τύπου ολοκλήρωσης του Gauss στο διάστημα $[0,1]$ με συνάρτηση βάρους $w(x)=1$.
Τα a_{ij} είναι τ.ω. να ισχύει η (ii) με $s=q$
Αυτή η οικογένεια μεθόδων λέγεται RK Gauss-Legendre

- $p=2q-1$ RK Radau IIA
- $p=2q-2$ RK Lobatto IIIA

<u>Περιοχή (απόλυτης) ευστάθειας και ρητές προσεγγίσεις της εκθετικής συνάρτησης</u>

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής:

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0)=1 \end{cases} \quad t \geq 0, \text{ με } \lambda \in \mathbb{C}$$

Λύση: $y(t)=e^{\lambda t}$

Έστω $\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b^T & \end{array}$ μία μέθοδος RK και h θετικό βήμα.

143

$y^n \longmapsto y^{n+1}$

(1) $y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \lambda y^{n,j} \quad i=1,\dots,q$

(2) $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \lambda y^{n,i}$

Γράφουμε την (1) στη μορφή

$$I_q \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h \cdot A \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \underset{\downarrow \\ \frac{1}{\lambda h}(I_q - A)}{(I_q - \lambda h A)} \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}}_{y^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e}$$

Αν ο $I_q - \lambda h A$ είναι αντιστρέψιμος (δηλαδή το $\frac{1}{\lambda h}$ δεν είναι ιδιοτιμή του A), έχουμε:

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n (I_q - \lambda h A)^{-1}$$

Από την (2) παίρνουμε: $y^{n+1} = y^n + h\lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{q} b_i y^{n,i}}_{b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}} =$

$$= y^n + \lambda h\, b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = y^n + \lambda h\, b^T y^n (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot e$$

Συμπέρασμα: $y^{n+1} = [1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot e]\, y^n$

Θέτουμε $r(z) := 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} \cdot e$
και γράφουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

$$y^{n+1} = r(\lambda h) y^n$$

• Τι συνάρτηση είναι η r;

Θέτουμε $\omega := (I_q - zA)^{-1} \cdot e$ και έχουμε:

(**) $\boxed{(I_q - zA) \cdot \omega = e}$ ⇝ Γραμμικό σύστημα με q εξισώσεις κ' q αγνώστους.

Τότε $r(z) = 1 + z(b_1\omega_1 + \dots + b_q\omega_q)$
Λύνουμε το γραμμικό σύστημα με τον κανόνα του Cramer: Ο παρονομαστής, για όλα τα $\omega_1, \dots, \omega_q$, είναι $\det(I_q - zA)$, δηλαδή πολυώνυμο βαθμού το πολύ q.
Αντίστοιχα οι αριθμητές είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $q-1$

• Συμπέρασμα: Η r είναι ρητή συνάρτηση και ο βαθμός τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή είναι το πολύ q.

→ Ειδική περίπτωση: Άμεσες μέθοδοι
Τότε A γνήσια κάτω τριγωνικός, με μονάδες στη διαγώνιο. Επομένως $\det(I_q - zA) = 1$.
Επομένως σε αυτήν την περίπτωση $r \in \mathbb{P}_q$

145 Περιοχή απόλυτης ευστάθειας.

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$

▶ Τοπικό σφάλμα: $\delta^n = r(\lambda h)\, y(t^n) - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^n = [r(\lambda h) - e^{\lambda h}]\, y(t^n) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\delta^n| \leq C h^{p+1} \Leftrightarrow |r(z) - e^z| \leq C|z|^{p+1}$

για $z \to 0$

$y(t) = e^{\lambda t}$

$y(t^{n+1}) = e^{\lambda t^{n+1}}$

$= e^{\lambda(t^n + h)} = e^{\lambda t^n} e^{\lambda h} = y(t^n) e^{\lambda h}$

Συμπέρασμα: Η (6) $\boxed{e^z - r(z) = O(|z|^{p+1})}$ για $z \to 0$ είναι αναγκαία συνθήκη για να έχει η μέθοδος τάξη ακρίβειας p.

(Η (6) μας δίνει ένα άνω φράγμα για την τάξη ακρίβειας της μεθόδου).

Η (6) μπορεί να ελεγχθεί εύκολα αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $r(z)$ και e^z ως προς το 0.

Άμεσες μέθοδοι: Έστω p η τάξη ακρίβειας. Τότε:

Αν η τάξη είναι q αυτό ∄

$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1} z^{p+1} + \dots + C_q z^q$$

Συμπέρασμα: Η r λέγεται συνάρτηση ευστάθειας της μεθόδου RK.

* Συναρτήσεις Ευστάθειας:

- Άμεση Euler: $r(z) = 1 + z$
- Πεπλεγμένη Euler: $r(z) = \frac{1}{1-z}$ $(= 1 + z + z^2 + \dots)$
- Πεπλεγμένη του μέσου
- Πεπλεγμένη του τραπεζίου

$$\left.\begin{matrix}\text{μέσου}\\ \text{τραπεζίου}\end{matrix}\right\} \; r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

▶ Ικανή και αναγκαία συνθήκη για Α-ευστάθεια:

Μία μέθοδος RK είναι Α-ευσταθής ανν:

(*) $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

και η r δεν έχει πόλους (δηλαδή σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής - εννοείται ότι αριθμητής και παρονομαστής δεν έχουν κοινές ρίζες, διαφορετικά απλώς απλοποιούμε) με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη για την (*) είναι ο βαθμός του παρονομαστή να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του αριθμητή.

Αν η μέθοδος είναι άμεση δεν μπορεί να είναι Α-ευσταθής

γενίκευση του θεωρήματος του Taylor για ρητές συναρτήσεις (όχι για πολυώνυμα).

- Προσεγγίσεις Padé:

Μία συνάρτηση $\frac{P(z)}{Q(z)}$ με $P \in \mathbb{P}_m$ και $Q \in \mathbb{P}_\ell$, με $m, \ell \in \mathbb{N}_0$, λέγεται προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης, αν:

$$e^z - \frac{P(z)}{Q(z)} = O(|z|^{m+\ell+1}) \qquad \text{για } z \to 0$$

Για κάθε $\ell, m \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει ακριβώς μία προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης.

• Αν η συνάρτηση ευστάθειας r μιας μεθόδου RK είναι προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης, όπως συμβαίνει συνήθως αλλά όχι πάντα, τότε η μέθοδος RK είναι Α-ευσταθής, αν και μόνο αν:

⟷ Ο βαθμός του παρονομαστή είναι ίσος με το βαθμό του αριθμητή ή κατά ένα ή κατά δύο μεγαλύτερος του.

147. → **Εφαρμογή:** Θεωρούμε τη μέθοδο RK-Gauss-Legendre με q ενδιάμεσα στάδια.

Τότε η συνάρτηση ευστάθειας r είναι προσέγγιση Padé της εκθετικής συνάρτησης. (γιατί η τάξη της μεθόδου είναι $2q$ και ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι το πολύ q / με βαθμό του παρονομαστή ίσου με το βαθμό του αριθμητή. Ιδιαίτερα η μέθοδος είναι A-ευσταθής.

→ B-ευστάθεια.

Ορισμός: Μια μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής αν:

α) $b_i \geq 0$, $i = 1, .., q$

β) Ο $q \times q$ συμμετρικός πίνακας M με στοιχεία:

$$m_{ij} := b_i a_{ij} + b_j a_{ij} - b_i b_j \qquad i,j = 1, .., q$$

είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλαδή

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = \sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0.$$

1o Κάθε αλγεβρικά ευσταθής μέθοδος RK είναι B-ευσταθής.

(αλγεβρική ευστάθεια ⇒ B-ευστάθεια)

2o Αν τα $\tau_1, .., \tau_q$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε ισχύει και το αντίστροφο:

B-ευστάθεια ⇒ αλγεβρική ευστάθεια.

(δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση η αλγεβρική και η B-ευστάθεια είναι ισοδύναμες).

Παραδείγματα:

1. Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1 \geq 0$, $m_{11} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 1 \geq 0$.
Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής, οπότε και B-ευσταθής.

2. Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1 \geq 0$, $m_{11} = 1\cdot \frac{1}{2} + 1\cdot \frac{1}{2} - 1\cdot 1 = 0 \geq 0$.
Μέθοδος αλγεβρικά ευσταθής
(Ισχύει για όλες τις μεθόδους RK Gauss-Legendre,
$b_i > 0$, $i = 1, \dots, q$ $M = 0$)

3. Μέθοδος του τραπεζίου.

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$m_{11} = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

οπότε $\left(M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{4} < 0$.

Συμπέρασμα: Η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής.
Αφού $\underset{0}{c_1} \neq \underset{1}{c_2}$, η μέθοδος δεν είναι ούτε
B-ευσταθής.

149. **Άσκηση 3.13**: $\begin{cases} y'(t)=1 & t\in[0,1] \\ y(0)=0 \end{cases}$

με λύση $y(t)=t$.

$N\in\mathbb{N}$, $h=\frac{1}{N}$ → αφού $b-a=1$ εδώ ($t\in[0,1]$)!

και $y^N \approx y(1)$

Αν $y^N \mapsto 1$, για $N\to\infty$ νδό μέθοδος συνεπής.

Λύση

Παίρνω μία οποιαδήποτε μέθοδο $\dfrac{A \mid \tau}{b^T}$, $y^0=0$

$$y^{n+1}=y^n+h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot \underbrace{1}_{f(t^{n,i},y^{n,i})} = y^n+h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i$$

- Ισχυρισμός $y^n=n\cdot h\cdot\sum_{i=1}^{q} b_i$ (τετριμμένη επαγωγή).

Ιδιαίτερα $y^N=\underbrace{Nh}_{1}\sum_{i=1}^{q} b_i=\sum_{i=1}^{q} b_i$ → ανεξάρτητο του h.

Άρα: $y^N\mapsto 1$, $N\to\infty \iff \boxed{\sum_{i=1}^{q} b_i=1}$.

Σύμφωνα με την Άσκηση 3.12 η μέθοδος είναι συνεπής.

→ σελ 133

Άσκηση 3.14:

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$\begin{cases} y'(t)=f(t,y) \\ y(a)=y_0 \end{cases}$ $t\in[a,b]$.

$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) \qquad i = 1, \dots, q$$

<u>ΝΔό</u>: $\max_{n,i} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le C h.$

$$\max_{n} |y(t^{n,i}) - \zeta^{n,i}| \le C h^2 \iff \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i \quad i = 1, \dots, q$$

<u>Λύση</u>

- $f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) = f\left(t^n + \tau_j h, y(t^n) + h \cdot \sum_{\ell=1}^{q} a_{j\ell} f(t^{n,\ell}, \zeta^{n,\ell})\right)$ ~ ανάπτυγμα Taylor

$$= f(t^n, y(t^n)) + O(h)$$

- Άρα $\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} [f(t^n, y(t^n)) + O(h)] =$

$$= y(t^n) + h \cdot \left[\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right] \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} + O(h^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta^{n,i} = y(t^n) + y'(t^n) \cdot h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} + O(h^2)$$

- Τώρα $y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i h) \underset{\text{Taylor}}{=} y(t^n) + \tau_i h \cdot y'(t^n) + O(h^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(t^n) = y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) - O(h^2)$$

- Άρα $\zeta^{n,i} = y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) + y'(t^n) \cdot h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} + O(h^2) \iff$

$$\iff \zeta^{n,i} - y(t^{n,i}) = h \cdot y'(t^n) \left[\tau_i - \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\right] + O(h^2)$$

Επειδή γενικά $y'(t^n) \neq 0$, οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα.

151 • Άσκηση 3.15 :

1/12	-1/12	1/4	1/4
1/12	1/6	1/12	1/3
1/6	1/2	1/6	5/6
1/2	1/3	1/6.	

Είναι συνεπής και ραιτί;

Λύση

$$b_1+b_2+b_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

• Άσκηση 3.32 :

5/12	$-\frac{1}{12}$	1/3
3/4	1/4	1
3/4	1/4.	

Αλγεβρικά ευσταθής (στην προκειμένη περίπτωση κ' για B-ευσταθεια το ίδιο..)

Λύση

$$b_1=\frac{3}{4}\geq, \quad b_2=\frac{1}{4}\geq 0.$$

$$m_{11}=b_1 a_{11}+b_1\cdot a_{11}-b_1\cdot b_1=\dots=\frac{1}{16}.$$

$$m_{22}=\frac{1}{16}.$$

$$m_{12}=m_{21}=-\frac{1}{16}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^2 \quad (Mx,x)=\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\,x_i\cdot x_j=$$

$$=m_{11}x_1^2+(m_{12}+m_{21})x_1x_2+m_{22}x_2^2=\frac{1}{16}\underbrace{\left(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\right)}_{(x_1-x_2)^2\geq 0}\geq 0.$$

Άρα ο πίνακας είναι μη θετικά ορισμένος και ο ~~πίνακας~~ μέθοδος είναι αλγεβρικά ευσταθής.