9º Μέθοδος του Euler.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση.

δείκτες

Έστω $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$
ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$.

δείκτης

Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i των τιμών $y(t^i)$, $i=0,\ldots,N$

Ομοιόμορφος διαμερισμός: $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$
(h = βήμα του διαμερισμού), $t^n := a + n \cdot h$ $n = 0,\ldots,N$.

Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} := y^n + h \cdot f(t^n, y^n) & n = 0,\ldots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

($y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$ βήμα της μεθόδου)

- Κόστος ανά βήμα: Ένας υπολογισμός της f.

- Βήμα της μεθόδου για μη ομοιόμορφο διαμερισμό:
$y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) f(t^n, y^n)$.

78. Τρόποι κατασκευής της μεθόδου.

1ος τρόπος: Αριθμητική διαφόριση

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

$$y'(t^n) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Άρα

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$$

* Αντικαθιστούμε τα $y(t^i)$ με y^i και το $\approx$ με $=$, και παίρνουμε

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^n, y^n)$$

2ος τρόπος: Αριθμητική ολοκλήρωση

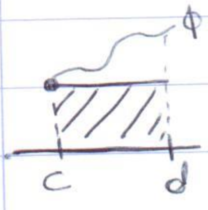
$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt}$$

$$\approx \underbrace{(t^{n+1} - t^n)}_{h} f(t^n, y(t^n))$$



$$\int_c^d \phi(x)\,dx \approx (d-c)\,\phi(c)$$

* Όπως και στον 1ο τρόπο αντικαθιστούμε τα $y(t^i)$ με y^i και το $\approx$ με $=$, και παίρνουμε

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h}=f(t^n,y^n)$$

3ος τρόπος: Ανάπτυγμα Taylor

$$y(t^{n+1})=y(t^n)+h\cdot\underbrace{y'(t^n)}_{f(t^n,\,y(t^n))}+O(h^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1})\approx y(t^n)+h\cdot f(t^n,y(t^n))$$

* Όπως και στον 1ο τρόπο αντικαθιστούμε τα $y(t^i)$ με y^i και το $\approx$ με $=$, και παίρνουμε

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h}=f(t^n,y^n)$$

Συνέπεια

$$\delta^n=y(t^{n+1})-y(t^n)-h\cdot f(t^n,y(t^n))$$

δ^n: σφάλμα συνέπειας, τοπικό σφάλμα

(το ίδιο καλά θα μπορούσα να θεωρήσω το $-\delta^n$ στη θέση του δ^n) → το πρόσημο δε παίζει κανένα ρόλο

Αντικαθιστούμε τα y^i στο βήμα της μεθόδου με τα $y(t^i)$. Τότε δεν έχουμε πια ισότητα, αλλά προκύπτει ένα σφάλμα, το δ^n → είναι η αντίθετη διαδικασία από αυτήν που ακολουθούσαμε στους 3 παραπάνω τρόπους.

80. $$\delta^n = y(t^{n+1}) - \underbrace{[y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))]}_{\tilde{y}^{n+1}}$$

ό,τι παίρναμε με ένα βήμα της μεθόδου ξεκινώντας από την $y(t^n)$ αντί της y^n.

Το δ^n δεν μπορεί να υπολογιστεί!
Είναι χρήσιμο για τη μελέτη της μεθόδου

Τι μπορούμε να πούμε για το δ^n;

- Υπόθεση $y \in C^2[a,b]$.

Τότε

$$\delta^n = [\cancel{y(t^n)} + \cancel{h \cdot \overset{}{y'(t^n)}} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)] - \cancel{y(t^n)} - \cancel{h \cdot f(t^n, y(t^n))} \Rightarrow$$

$y'(t^n)$

Taylor ως προς t^n.
Μπορώ να αναπτύξω ως προς όποιο σημείο θέλω. Αλλά παρατηρώ ότι το t^n εμφανίζεται περισσότερες φορές απ' το t^{n+1} (2 φορές) και έτσι το μόνο που θα χρειαστεί να αναπτύξω είναι ο πρώτος όρος $y(t^{n+1})$!

με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$!

$$\Rightarrow \boxed{\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)}$$

Λέμε ότι η μέθοδος είναι συνεπής αν το δ^n πηγαίνει στο μηδέν τουλάχιστον όπως το h^2 (δηλαδή είναι τάξης τουλάχιστον 2).

- Ευστάθεια:

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y,

$\exists\ L \geq 0\ \ \forall t \in [a,b]\ \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

με

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases} \qquad n = 0, \dots, N-1.$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h\cdot f(t^n, z^n) \\ z^0 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad , n = 0, \dots, N-1.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\cdot[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h\cdot \underbrace{|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|}_{\le L\,|y^n - z^n|}$$ τριγωνική ανισότητα

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + L\cdot h)\,|y^n - z^n| \qquad n = 0, \dots, N-1.$$ (+)

Γενικά

(*) $|y^n - z^n| \le (1+Lh)^n |y^0 - z^0| \qquad n = 0, \dots, N.$

(*) $n=0$: $|y^0 - z^0| \le |y^0 - z^0|$ ✓

$n \to n+1$: $|y^{n+1} - z^{n+1}| \underset{(+)}{\le} (1+Lh)\,|y^n - z^n| \le (1+Lh)^{n+1}|y^0 - z^0|$

$\le (1+Lh)^n |y^0 - z^0|$

ισχύει αφού $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ σειρά

Ισχυρισμός: $\forall x > 0 \quad 1 + x > e^x$

$\phi(x) := e^x - (1+x)$

$\phi(0) = 1 - 1 = 0$

$\phi'(x) = e^x - 1 \ge 0$ ϕ αύξουσα.

$\Rightarrow \phi(x) \ge 0 \quad \forall x \ge 0$

$\Rightarrow e^x \ge 1 + x \quad \forall x \ge 0.$

Άρα $1 + Lh \le e^{Lh} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+Lh)^n \le e^{L(\overset{= t^n - a}{h\cdot n})} \le e^{L(b-a)}$

Συμπέρασμα:

$$|y^n - z^n| \le e^{L(b-a)}\,|y^0 - z^0|$$

ανεξ. του h.

$C =$ σταθερά

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le e^{L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

(ευστάθεια)

*** ▶ Λήμμα** (Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Έστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, \ldots \ge 0$ τ.ω.

(*) $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + K \quad , i = 0, 1, 2, \ldots$

$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + Lh) |y^n - z^n| + 0 \quad (+)$

Τότε ισχύει

(**) $d_n \le d_0 \cdot e^{n\delta} + K \cdot \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Απόδειξη

• $n = 0$: $d_0 \le d_0 \cdot \underbrace{e^0}_{1} + K \cdot \underbrace{\dfrac{e^0 - 1}{\delta}}_{0}$

$= d_0$ ✓

• Έστω λοιπόν $n \ge 1$:

▶ Ισχυρισμός

(++) $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K [1 + (1+\delta) + \cdots + (1+\delta)^{n-1}]$

Απόδειξη ισχυρισμού.

Επαγωγή $n = 1$: $d_1 \le (1+\delta) d_0 + K$ σωστό σύμφωνα με την (*) (για $i=0$)

$n \to n+1$:

$$d_{n+1} \underset{(*)}{\le} (1+\delta) d_n + K \underset{\text{υπόθεση επαγωγής}}{\le} (1+\delta) \left\{ (1+\delta)^n d_0 + K \cdot [1 + (1+\delta) + \cdots + (1+\delta)^{n-1}] \right\} + K$$

$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + K [1 + (1+\delta) + (1+\delta)^2 + \cdots + (1+\delta)^n]$ ✓

γεωμετρικό άθροισμα

Ισχύει

$$d_n \le (1+\delta)^n \cdot d_0 + k \cdot [1 + (1+\delta) + \cdots + (1+\delta)^{n-1}]$$

$$\le e^{n\delta} d_0 + k \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta) - 1}$$

$$= e^{n\delta} d_0 + k \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

$S = 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}$

$\omega \cdot S = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n$

$\Rightarrow \omega S - S = \omega^n - 1$

$\Rightarrow S = \dfrac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$

$$(*) \begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h := \dfrac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$, $n = 0, \ldots, N$ (ομοιόμορφος διαμερισμός).

- Μέθοδος του Euler: $(+) \begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$ $\quad n = 0, \ldots, N-1$.

- Συνέπεια:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{``y'(t^n)"} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{με } \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

- Εκτίμηση του σφάλματος (σύγκλιση): Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια.

Θεώρημα: Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. να ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Έστω $y \in C^2[a,b]$ η λύση του $(*)$.

Αν $y^0, \ldots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που ικανοποιούν την $(+)$ τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος:

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L} [e^{L(b-a)} - 1] \cdot h$$ όπου $M := \max\limits_{a \le t \le b} (y''(t))$

Απόδειξη.

Θέτουμε $\varepsilon^i := y(t^i) - y^i \qquad i = 0, \dots, N$

(ολικό σφάλμα διακριτοποίησης, σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου).

Έχουμε: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n)) + \delta^n$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$$

άρα

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)] + \delta^n$$

(εξίσωση σφάλματος)

Επομένως:

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + h\,\underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - y^n|}_{\leq L|\varepsilon^n| \;\leadsto\; \text{Lipschitz}} + |\delta^n|$$

τριγωνική ανισότητα

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + Lh)\,|\varepsilon^n| + |\delta^n| \;\leadsto\; \text{Λήμμα}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq (1 + \underset{\delta}{\underset{\shortparallel}{Lh}})\,|\varepsilon^n| + \underbrace{\max_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|}_{K}$$

Ουσιαστικά ξανακάνω ό,τι έκανα στην ευστάθεια, μόνο που έχω έναν παραπάνω όρο.

Σύμφωνα με το βοηθητικό Λήμμα έχουμε

$$|\varepsilon^n| \leq e^{Lh \cdot n}\,|\cancel{\varepsilon^0}|^{\,0} + \frac{e^{nLh} - 1}{Lh} \cdot \max_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|$$

οπότε

$$|\varepsilon^n| \leq \frac{e^{L(t^n - a)} - 1}{L \cdot h} \cdot \max_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|$$

Τώρα $\leadsto$ Συνέπεια.

$$\delta^i = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \Rightarrow |\delta^i| \leq \frac{h^2}{2} M \Rightarrow \max_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i| \leq \frac{M}{2} h^2$$

Επομένως

$$|\varepsilon^n| \leq \frac{e^{L(t^n - a)} - 1}{L \cdot \cancel{h}} \frac{M}{2} h^{\cancel{2}} = \frac{M}{2L}\left[e^{L(t^n - a)} - 1\right] \cdot h \leq$$

$$\le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]\cdot h.$$

• Σχόλια: $\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le C\, h^{1}$!

C ανεξάρτητη του h.

τάξη της μεθόδου: $p \geq 1$!

*. για όλες τις μεθόδους ό,τι τάξη είναι το σφάλμα συνέπειας ένα λιγότερο είναι η τάξη της μεθόδου.

* γι αυτό στη συνέπεια θέλουμε να είναι τουλάχιστον 2 !

• Ερώτημα: Ισχύει $p \le 1$; → Δηλαδή δν μπορεί να βελτιωθεί η τάξη της μεθόδου.

→ Απάντηση ΝΑΙ.

► Παράδειγμα για την απόδειξη του παραπάνω ερωτήματος

$y(t)=t^2$ με Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t)=2t \\ y(0)=0 \end{cases}$

το επιλέγω έτσι για να είναι y'' σταθερή, γιατί ξέρω ότι η 2η παράγωγος παίζει ρόλο (από τύπο συνέπειας).

με $N\in\mathbb{N}$, $h=\frac{1}{N}$, $t^n=n\cdot h$ $\quad n=0,\dots,N$

$y^0=0$

$y^{n+1}=y^n+h\cdot 2t^n = y^n+2nh^2$

$y^{n+1}=y^n+2nh^2$

Ισχυρισμός: $y^n=y^0+2\left[1+2+\dots+(n-1)\right]\cdot h^2$.

$n\to n+1$: $y^{n+1}=y^n+2nh^2 = y^0+2\left[1+\dots+(n-1)\right]\cdot h^2+2nh$

$= y^0 + 2\,[1+2+\dots+(n-1)+n]\cdot h^2.$

(τετριμμένη επαγωγή)

$$y^n = \cancel{y^0}^{\,0} + 2\,\underbrace{[1+2+\dots+(n-1)]}_{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}}\,h^2 = n(n-1)\,h^2$$

• $n = N$:

$$y^N = N(N-1)\cdot h^2 = (N-1)\overset{=1 \text{ από υπόθεση}}{\underset{*_1}{(N\cdot h)}}\cdot h = Nh - h = 1-h$$

$$y(t^N) - y^N = y(1) - y^N = 1-(1-h) = h.$$

• Συμπέρασμα: $\max\limits_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \geq |y(t^N)-y^N| \geq \underset{1}{\overset{\shortparallel}{\tilde{c}}}\cdot h$

* Όσο πιο μεγάλη δύναμη τόσο πιο γρήγορα πάει στο 0, γιατί αν το εκτιμήσεις από πάνω με $c\cdot h^{1+\varepsilon}$ ($1+\varepsilon$ μία δύναμη $\varepsilon>0$) δεν μπορείς να το εκτιμήσεις από κάτω με μία $\tilde{c}h$ με h σε μικρότερη δύναμη αφού:

$$\tilde{c}h \le \dots \le C h^{1+\varepsilon>0} \Rightarrow \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\tilde{c}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{C h^{\varepsilon}} \quad h\to 0$$

Δηλαδή

• $y \in C^2[a,b]$: $\max\limits_{n} |y(t^n)-y^n| \le C h \Rightarrow p \ge 1$

• $\exists\, y \in C^\infty[a,b]$: $\max\limits_{n} |y(t^n)-y^n| \ge \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\tilde{C}} h \Rightarrow p \le 1$

Συμπέρασμα: $p = 1$.

- <u>Ερώτηση</u>: Τι αλλάζει στην περίπτωση συστημάτων Δ.Ε;
(Βέβαια οι απόλυτες τιμές πρέπει να αντικατασταθούν με νόρμες).
<u>Απάντηση</u>: Το μόνο που αλλάζει είναι η παράσταση του σφάλματος συνέπειας.

Taylor για βαθμωτές συναρτήσεις:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)}_{\delta^n} \qquad \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

Για $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ αυτή η παράσταση του υπολοίπου (δ^n) δεν ισχύει!!!
Αφού έχουμε:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h\cdot y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{n,i}) \qquad i=1,\dots,m.$$

οπότε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\, y'(t^n) + \underbrace{\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n,1}) \\ y_2''(\xi_{n,2}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{n,m}) \end{pmatrix}}_{\delta^n}$$

με $\delta^n = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n,1}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{n,m}) \end{pmatrix}$

<u>1η περίπτωση</u>: $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \max_{1\le i\le m} |y_i''(\xi_{n,i})|$$

$$\le \frac{h^2}{2} \max_{1\le i\le m} \max_{a\le t\le b} |y_i''(t)| = \frac{h^2}{2} \max_{a\le t\le b} \underbrace{\max_{1\le i\le m} |y_i''(t)|}_{\|y''(t)\|_\infty}$$

$$\Rightarrow \|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} M \qquad \text{με } M := \max_{a\le t\le b} \|y''(t)\|_\infty$$

2η Περίπτωση: $\|\cdot\|$ τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^m$.

Έχουμε $\exists\, C_1 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^m \;\; \|x\| \le C_1 \|x\|_\infty$.

Άρα $\|\delta^n\| \le C_1 \|\delta^n\|_\infty \le C_1 \frac{M}{2} h^2 \qquad M := \max\limits_{a \le t \le b} \|y''\|_\infty$

* Εκτός ύλης:

Άλλη παράσταση του υπολοίπου στον τύπο του Taylor:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\, y'(t^n) + \boxed{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, y''(t)\, dt}$$

Ισχύει τόσο για βαθμωτές όσο και για διανυσματικές συναρτήσεις.

• Βαθμωτή περίπτωση

$$|\delta^n| = \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, y''(t)\, dt \right| \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, |y''(t)|\, dt$$

$$\le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, |y''(t)|\, dt \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t) \max_{t^n \le s \le t^{n+1}} |y''(s)|\, dt =$$

$$= \frac{h^2}{2} \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |y''(t)|$$

• Διανυσματική περίπτωση: $\|\cdot\|$ τυχούσα νόρμα

$$\|\delta^n\| \le \frac{h^2}{2} \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} \|y''(t)\| \le \frac{M}{2} h^2$$

$$M := \max_{a \le t \le b} \|y''(t)\|$$

Περιοχή (απόλυτης) ευστάθειας

Α-ευστάθεια, Β-ευστάθεια (= Butcher)

↳ (Dahlquist)

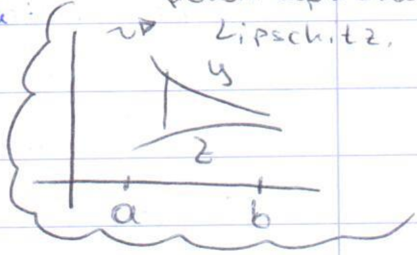
Μονοβηματική: λέγεται μία αριθμητική μέθοδος που για τον υπολογισμό του y^{n+1} χρησιμοποιεί μόνο την προσέγγιση y^n.

Ορισμός (Β-ευστάθεια): Μία μονοβηματική μέθοδος λέγεται Β-ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα,

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad a \le t \le b \quad \text{με } f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, δίνει προσεγγίσεις y^n και z^n τ.ω. η ακολουθία $\|y^n - z^n\|$, $n=0,\dots$ να είναι φθίνουσα:

μονόπλευρη συνθ. Lipschitz ⇒



$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| \quad n=0,\dots$$

(Δηλαδή ζητούμε η αριθμητική μέθοδος να μιμείται τη Δ.Ε. για την οποία ισχύει ότι η $\|y(t)-z(t)\|$ είναι φθίνουσα).

↳ Πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad t\in[a,b].$$

$$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$$

$$(f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\, x-\tilde{x}) \le 0.$$

$\|y(t)-z(t)\|$ φθίνουσα.

Επί Β-ευστάθεια: $y^0,\dots,y^N$ κ' $z^0,\dots,z^N$

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| \quad n=0,\dots$$

190. Πρόβλημα δοκιμής:

$$(*)\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0)=1 \end{cases} \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$Re\lambda \leq 0$ $\quad |y(t)|$ φθίνουσα

↳ θα μπορούσαμε κι εδώ να πάρουμε διαφορά (όπως στο αντίστοιχο πρόβλημα δοκιμής για Δ.Ε.)

• Ορισμός: (A-ευστάθεια) Μία αριθμητική μέθοδος λέγεται A ευσταθής αν όταν εφαρμοστεί στο (*) με $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \leq 0$ και τυχαίο βήμα h, δίνει προσεγγίσεις

y^n, $n=0,\dots$, τ.ω. η $|y^n|$ να είναι φθίνουσα

$$|y^{n+1}| \leq |y^n| \quad , n=0,1,\dots$$

Το πρόβλημα (*) γράφεται και ως πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα 2×2 σύστημα Δ.Ε. που ικανοποιεί την $(f(t,x)-f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}) \leq 0$ όταν $Re\lambda \leq 0$.

Οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην πράξη δίνουν τις ίδιες προσεγγίσεις όταν εφαρμοστούν είτε στη Δ.Ε. είτε στο αντίστοιχο σύστημα Δ.Ε.

Συμπέρασμα: B-ευστάθεια ⟹ A-ευστάθεια

• Το αντίστροφο δεν είναι σωστό (θα δούμε παράδειγμα αργότερα).

91

▶ Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι Α-ευσταθής (οπότε δεν είναι ούτε Β-ευσταθής).
(Γενικότερα καμία άμεση μέθοδος δεν είναι Α-ευσταθής.)

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n \Rightarrow \boxed{y^{n+1} = (1+\lambda h)\, y^n}$$

Θέσαμε $r(z) := 1+z$ και έχαμε: $y^{n+1} = r\lambda h\, y^n$.

Επομένως έχαμε: $|y^{n+1}| = |1+\lambda h| \cdot |y^n|$

Για $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda \le 0$ και h τ.ω. $|1+\lambda h| > 1$ δεν ισχύει

$$|y^{n+1}| \le |y^n| \quad (\text{αν } y^n \ne 0)$$

Η συνάρτηση $r(z) = 1+z$ με $z \in \mathbb{C}$ λέγεται συνάρτηση ευσταθείας της μεθόδου του Euler.

όταν δεν είναι ούτε Α-ευσταθής ούτε Β-ευσταθής για να μιμηθεί το $|y^{n+1}| \le |y^n|$ πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω

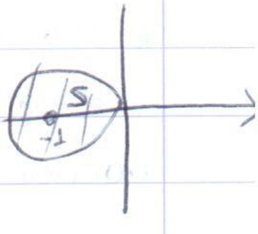
• Ορισμός (περιοχή (απόλυτης) ευσταθείας): Το σύνολο S των μιγαδικών αριθμών $z = \lambda h$ τ.ω. μία μονοβηματική μέθοδος όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα $(*)$ με λ και h: $\lambda h = z$ δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω.:

$$|y^{n+1}| \le |y^n| \quad n = \dots$$

▶ Περιοχή ευσταθείας της μεθόδου του Euler

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : \underbrace{|1+z|}_{r(z)} \le 1 \}.$$

$z+1 = z-(-1)$



(32.

Μια μέθοδος είναι Α-ευσταθής αν και μόνο αν το μη θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^-$,

$$\mathbb{C}^- := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0 \},$$

περιέχεται στην περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου,
$\mathbb{C}^- \subset S$

Παρατήρηση: Εφαρμόζουμε το πρόβλημα του Euler στο πρόβλημα (*). $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $t \geq 0$ $\lambda \in \mathbb{C}$, $y(t) = e^{\lambda t}$

Ποιο είναι το σφάλμα συνέπειας;

στην άλλη περίπτωση ήταν: $\delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + h f(t^n, y(t^n))]$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - (1 + \lambda h)\, y(t^n) = e^{(n+1)\lambda h} - (1 + \lambda h)\, e^{n \lambda h} =$$

$$= [e^{\lambda h} - (1 + \lambda h)]\, e^{\lambda n h}$$

" $y(t^n)$

$$|\delta^n| = |e^{\lambda h} - (1 + \lambda h)|\, \underbrace{|y(t^n)|}_{\neq 0}$$

Τι τάξης είναι το δ^n;

$e^z = 1 + z + O(z^2)$

$\delta^n = O(h^2)$ για σταθερό λ.

Συμπέρασμα: $\boxed{p \leq 1}$.

Πλεονεκτήματα: δηλ. απαιτούνται μόνο πράξεις για την εύρεση της y^{n+1}

Η μέθοδος είναι άμεση, είναι απλούστατο να προγραμματιστεί, απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f ανά βήμα.

Μειονεκτήματα: Έχει πολύ χαμηλή τάξη ακρίβειας (ένα), οπότε για να βρούμε προσεγγίσεις μεγάλης ακρίβειας πρέπει να εργαστούμε με πολύ μικρό h.
Συνέπειες: Υψηλό συνολικό κόστος, συσσώρευση σφαλμάτων στρογγύλευσης.
Δεν είναι B-ευσταθής (καμία άμεση μέθοδος δεν είναι), ούτε καν A-ευσταθής, και μάλιστα έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b]. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$ $\quad n = 0, \dots, N.$

$y^i \approx y(t^i)$

Άμεση μέθοδος του Euler: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \quad\quad n = 0, \dots, N-1. \end{cases}$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \quad\quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$

* Τρόποι κατασκευής:

$1^{\text{ος}}$ Με αριθμητική διαφόριση: $y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

94

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Αρα $\quad y^{n+1} \quad y^n \quad$ θα γίνει = κ' προκύπτει η προσέγγιση

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

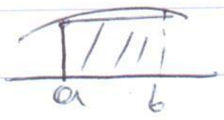
2ος Με αριθμητική ολοκλήρωση:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt.$$

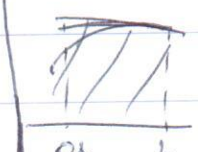
$$\approx y(t^n) + h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \approx (b-a)\,\phi(a)$$



αριστερός τύπος ορθ.

$$\int_a^b \phi(x)\,dx \approx (b-a)\,\phi(b)$$



δεξιός τύπος ορθ.

3ος Με ανάπτυγμα Taylor:

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) - h \cdot y'(t^{n+1}) + O(h^2)$$

$$\approx y(t^{n+1}) - h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1})).$$

Είναι η μέθοδος καλά ορισμένη (έχουμε δηλαδή ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων $y^1, \dots, y^N$);

Γενικά όχι!

Παράδειγμα: $y' = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Λύση

$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda y^{n+1} \Leftrightarrow$

Αν μου δώσεις το y^n λύνεται το y^{n+1} και είναι μοναδικά ορισμένο;

$\Leftrightarrow (1 - \lambda h)\, y^{n+1} = y^n$

- Αν $\lambda > 0$ και $h = \frac{1}{\lambda}$ τότε $0 \cdot y^{n+1} = y^n$.

Για $y^n \neq 0$ δεν υπάρχει λύση!
Για $y^n = 0$ κάθε $y^{n+1} \in \mathbb{R}$ είναι λύση!

Συμπέρασμα: Χρειάζονται υποθέσεις στην f και/ή στο h για να είναι η μέθοδος καλά ορισμένη.

1η περίπτωση:

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall [y_1, y_2] \in \mathbb{R}$
$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$.

- Ισχυρισμός: Για h αρκετά μικρό ώστε, $Lh < 1$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Ορίζουμε $g(x) := y^n + h \cdot f(t^{n+1}, x) \quad , x \in \mathbb{R}$

96. Κάθε λύση y^{n+1} της $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ είναι σταθερό σημείο της g κ' αντίστροφα.

Άρα: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Έχουμε:

Για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) - g(\tilde{x}) = h\,[f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |g(x) - g(\tilde{x})| = h\,|f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})| \leq L h\,|x - \tilde{x}|$$

Για $Lh < 1$ η g είναι συστολή, οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

2η περίπτωση:

Η f ικανοποιεί τη χαλαρότερη συνθήκη του Lipschitz.

για τον $\mathbb{R}^m$ ισχύουν τα ίδια μόνο με εσωτερικό γινόμενο

$$\forall t \in [a, b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad [f(t, y_1) - f(t, y_2)](y_1 - y_2) \leq 0 \qquad *_1$$

• Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες (χωρίς περιορισμό στο h).

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

Κάθε ρίζα είναι μια τέτοια προσέγγιση

αν $g(x) = 0$ τότε $x = y^n + h f(t^{n+1}, x)$ αν το πάω στο α' μέλος

Ορίζουμε $g(x) := x - y^n - h f(t^{n+1}, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γν αύξουσα, σταθερή — γν αύξουσα. από $*_1$ είναι φθίνουσα και με το − από μπροστά αύξουσα.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα

- **Μοναδικότητα:** Η g είναι γν. αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

Αρκεί να δείξω ότι η συνάρτηση παίρνει θετικές κ' αρνητικές τιμές (ΘΕΡ)
Όμως για να το δείξω αυτό θα χρησιμοποιήσω τη $g(x)$.

- **Ύπαρξη ρίζας:** Η g είναι συνεχής.

→ η $hf(t^{n+1},x)$ είναι φθίνουσα άρα για $x\le 0$ ισχύει

▸ Για $x \le 0$ έχουμε $f(t^{n+1},x) \ge f(t^{n+1},0)$
οπότε $-f(t^{n+1},x) \le -f(t^{n+1},0)$ άρα

* θα μπορούσα να τα αντικαταστήσω κι αυτά με 0 αλλά δε το κάνω

$$g(x) \le x \underbrace{- y^n - hf(t^{n+1},0)} \to -\infty, \text{ για } x \to -\infty$$

άρα η g παίρνει και αρνητικές τιμές.
(Για $x < y^n + hf(t^{n+1},0)$, έχουμε $g(x) < 0$)

▸ Για $x \ge 0$ έχουμε $f(t^{n+1},x) \le f(t^{n+1},0)$ οπότε

$$g(x) \ge x - y^n - h\cdot f(t^{n+1},0) \to \infty, \text{ για } x \to \infty,$$

άρα η g παίρνει και θετικές τιμές

Επομένως:
Η g είναι συνεχής και παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.
Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

- **Συνέπεια:** $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

σφάλμα συνέπειας, τοπικό σφάλμα.

$$= y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1})$$

Taylor: $y(t^n) = y(t^{n+1}) - h\cdot y'(t^{n+1}) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ με $\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

38. Άρα $\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \Rightarrow |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{t^n \le t \le t^{n+1}} |y''(t)|$

$$\le \frac{h^2}{2} M.$$

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{M}{2} h^2 \qquad M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

Ευστάθεια: $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f(t^{n+1}, z^{n+1}) & n=0,\dots,N-1 \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Άρα $\boxed{y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]}$ *

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Τότε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + h \underbrace{|f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})|}_{\le L |y^{n+1} - z^{n+1}|}$$

$$\Rightarrow (1 - Lh) |y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n|$$

Έστω ότι $Lh \le 1/2$. τυχαία επιλογή, είναρα ≤ 1! για να είναι το $(1-Lh) > 0$ και να μπορώ να διαιρέσω.

τότε $|y^{n+1} - z^{n+1}| \le \frac{1}{1-Lh} |y^n - z^n|$

Ισχυρισμός: $\frac{1}{1-Lh} \le 1 + 2Lh$ για $Lh \le \frac{1}{2}$ (στοιχειώδεις πράξεις)

Άρα $|y^{n+1} - z^{n+1}| \le (1 + 2Lh) |y^n - z^n|$

Άρα επαγωγικά $|y^n - z^n| \le \underbrace{(1+2Lh)^n}_{\le (e^{2Lh})^n = e^{2L(hn)}} |y^0 - z^0|$, $hn \le b-a$

$\Rightarrow \max\limits_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le e^{2L(b-a)} |y^0 - z^0|$.

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ (f(t,x)-f(t,\tilde{x}),(x-\tilde{x}))\le 0$.

Απόδειξη.

Παίρνουμε στην $(*)$ το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο με $y^{n+1}-z^{n+1}$ και έχουμε:

$$\|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2 = (y^n - z^n, (y^{n+1}-z^{n+1})) + h\underbrace{\left(f(t^{n+1},y^{n+1})-f(t^{n+1},z^{n+1}), (y^{n+1}-z^{n+1})\right)}_{\le 0}$$

$$\le (y^n - z^n, y^{n+1}-z^{n+1})$$

$$\underset{CS}{\le} \|y^n - z^n\| \cdot \|y^{n+1}-z^{n+1}\|.$$

$\Rightarrow \boxed{\|y^{n+1}-z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|}$ (+)

Ιδιαίτερα $\max\limits_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le \|y^0 - z^0\|$

→ Παρατήρηση: Σύμφωνα με την (+) η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι B-ευσταθής (ιδιαίτερα και A-ευσταθής) → γιατί η B-ευσταθής είναι πιο ισχυρή από την A-ευσταθή.

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [a,b]. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\, f(t^{n+1}, y^{n+1}) & n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

- Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

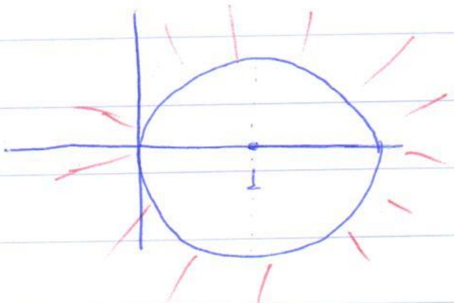
$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 & \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda y^{n+1} \Rightarrow (1 - \lambda h) y^{n+1} = y^n$$

$$y^{n+1} = r(\lambda h) y^n \qquad \text{με } r(z) = \frac{1}{1-z}$$

στην πεπλεγμένη μορφή είναι ρητή συνάρτηση ενώ πριν ήταν πολυώνυμο

$$S := \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq 1 \} \supset \mathbb{C}^-$$



- Εκτίμηση σφάλματος (σύγκλιση)

1η Περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια της μεθόδου, όπως στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler, για h: $Lh \leq \frac{1}{2}$, αποδεικνύουμε ότι:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{2L(b-a)} - 1\right]}_{C} h^{1}$$

με $M := \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$ $\quad$ $p=1$

2η περίπτωση: Η f ($f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για ευκολία) ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

Έχουμε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n$$
$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] + \delta^n.$$

$\varepsilon^m := y(t^m) - y^m$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1}$ παίρνουμε:

$$(\varepsilon^{n+1})^2 \le \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1}.$$

↳ σε συνδυασμό με τη μονόπλευρη συνθήκη του Euler.

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}|^2 \le |\varepsilon^n|\cdot|\varepsilon^{n+1}| + |\delta^n|\,|\varepsilon^{n+1}|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + |\delta^n|}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le n\cdot \underbrace{\max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|}_{\le \frac{M}{2}h^2}$$ ⤳ Επαγωγικά!

$\varepsilon^0 = 0$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \le \underbrace{nh}_{\le b-a} \frac{M}{2} h \Rightarrow |\varepsilon^n| \le \frac{b-a}{2} M\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{b-a}{2} M\cdot h.$$

102. Άλλες χρήσιμες μέθοδοι χαμηλής τάξης

1. Μέθοδος του τραπεζίου:

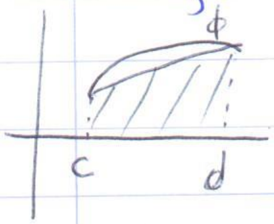
$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Το y^{n+1} εμφανίζεται κ' στο α' μέλος κ' στο β', πρέπει να λύσω εξίσωση για να το βρω, άρα είναι πεπλεγμένη

- Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη
- Τάξη ακρίβειας $p=2$
- Τρόπος κατασκευής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$



$$\approx y(t^n) + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))\right]$$

$$\int_c^d \phi(x)\,dx \approx \frac{d-c}{2}\left[\phi(c) - \phi(d)\right]$$

- Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α ευσταθής

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

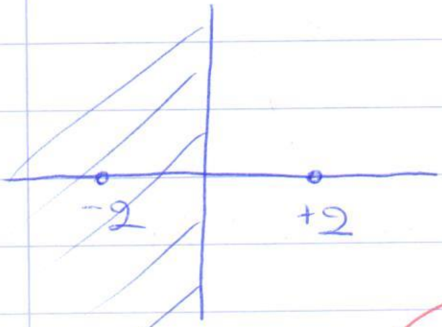
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right] \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\, y^n$$

επειδή η μέθοδος είναι πεπλεγμένη η συνάρτηση ευστάθειας είναι ρητή

$$y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n \quad \text{με} \quad r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

$S' = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2| \} =$
$= \mathbb{C}^-$



Τώρα θα δείξω ότι η B ευστάθεια είναι πιο ισχυρή από την A, αφού η μέθοδος μας είναι A ευσταθής και όχι δεν είναι B !

Ισχυρισμός: Η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής.

θα βρω ένα παράδειγμα που ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz αλλά η διαφορά δεν φθίνει !

$y'(t) = \lambda(t) \cdot y(t)$ με $\lambda(t) \leq 0$.
$f(t,y) = \lambda(t) \cdot y$.

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [\lambda(t^n) y^n + \lambda(t^{n+1}) y^{n+1}]$$

Για αυθαίρετο h επιλέγουμε τη λ έτσι ώστε:
$h\lambda(t^n) = -8$ και $h \cdot \lambda(t^{n+1}) = -1$

τυχαίες επιλογές δεν έχουν σημασία !

Τότε
$$y^{n+1} = y^n - 4y^n - \frac{1}{2} y^{n+1} \Rightarrow \frac{3}{2} y^{n+1} = -3y^n$$

$$y^{n+1} = -2y^n \Rightarrow |y^{n+1}| = 2|y^n| > |y^n|$$
$|y^n| > 0.$

2. Μέθοδος του μέσου:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) & n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

104 - Πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας $p=2$.
- Η μέθοδος του μέσου για Δ.Ε. της μορφής $y' = \lambda y$ με $\lambda \in \mathbb{C}$ συμπίπτει με τη μέθοδο του τραπεζίου.

$$\left[y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda \frac{1}{2}\left(y^n + y^{n+1}\right) = y^n + \frac{h}{2}\left(\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right) \right]$$

$S = \mathbb{C}^{-1}$, ιδιαίτερα η μέθοδος είναι Α-ευσταθής.

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του μέσου είναι Β-ευσταθής:

$$\forall t \in [a,b] \;\; \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \;\; \left(f(t,x) - f(t,\tilde{x}),\, x - \tilde{x}\right) \leq 0.$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h\left(f\left(t^n + \frac{h}{2}\right), \frac{1}{2}\left(z^n + z^{n+1}\right)\right) \\ z^0 \text{ τυχαίο.} \end{cases}$$

• Αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) - f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right)\right]$$

• Παίρνουμε το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο με:
$\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1}) = \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)$
και λαμβάνουμε:

$$\left(\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right)\right) \leq$$

$$\left(y^n - z^n, \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n - z^n)\right)$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 + \cancel{\frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1}, y^n - z^n)} \leq$$

$$\cancel{\frac{1}{2}(y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})} + \frac{1}{2}\|y^n - z^n\|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}} \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 \leq \cancel{\tfrac{1}{2}} \|y^n - z^n\|^2 \Leftrightarrow \|y^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$$

Άσκηση 2.9

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) & t \geq 0. \\ y'(x) = x(t) \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ακριβής λύση: $x(t) = \cos t$
$y(t) = \sin t.$

Ο $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.

* [$A = (a_{ij})$ συμμετρικός ανν $a_{ij} = a_{ji}$ $A^T = A$.
$A = (a_{ij})$ αντισυμμετρικός ανν $a_{ij} = a_{ji}$ $A^T = -A$]

A αντισυμμετρικός ανν $A^T = -A$.

α) ΝΔΟ $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$, $t \geq 0$.

Έχουμε: $\left([x(t)]^2 + [y(t)]^2\right)' = 2x(t) \cdot \underset{\text{"}-y(t)\text{"}}{x'(t)} + 2y(t) \cdot \underset{\text{"}x(t)\text{"}}{y'(t)}$
$= -2x(t) \cdot y(t) + 2y(t)\, x(t) = 0.$

$\Rightarrow [x(t)]^2 + [y(t)]^2 =$ σταθερά
όμως $[x(0)]^2 + [y(0)]^2 = 1$
$\Big\} \Rightarrow [x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1.$

$(Ax, y) = (x, A^T y)$

$(Ax, x) = (x, A^T x)$

• A αντισυμμετρικός $A^T = -A$

$(Ax, x) = (x, -Ax) = -(x, Ax) = -(Ax, x) \Rightarrow \cancel{2}(Ax, x) = 0$

$y'(t) = Ay(t)$ A αντισυμμετρικός

$\Rightarrow (y'(t), y(t)) = \underbrace{(Ay(t), y(t))}_{=0} \Rightarrow (y'(t), y(t)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)' = 0 \Rightarrow \|y(t)\| = $ σταθ.

β) $h > 0$ (x^n, y^n) άμεση μέθοδος του Euler.

ΝΔΟ $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty, \ n \to \infty$ ~> κακή μέθοδος για τέτοια προβλήματα

↳ πρώτα θα γράψω τη μέθοδο γι αυτό το πρόβλημα

για $y'(t) = f(t, y(t))$ είναι $y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix}$$

↳ είναι διανύσματα εδώ αφού $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -y(t) \\ y'(x) = x(t) \\ x(0) \\ y(0) \end{array} \right.$

Άρα ισοδύναμα έχουμε: $\left. \begin{array}{l} x^{n+1} = x^n - h y^n \\ y^{n+1} = y^n + h x^n \end{array} \right\}$

$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - h y^n)^2 + (y^n + h x^n)^2 =$

τα διπλάσια γινόμενα φεύγουν ~> $= (x^n)^2 + h^2 (y^n)^2 + (y^n)^2 + h^2 (x^n)^2 =$

$= (1 + h^2)\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$

$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1 + h^2)^n \underbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right]}_{=1} \to \infty, \ n \to \infty$

Επαγωγικά

107

γ) $h>0$ (x^n, y^n) μέθοδος του τραπεζίου

ΝΔΟ $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$

* μέθοδος του τραπεζίου γενικά: $y'(t) = f(t, y(t))$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right]$$

ισοδύναμα ισχύει
$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n &= \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\}$$

προσπαθώ να δημιουργήσω διαφορά τετραγώνων

$$\Rightarrow (x^{n+1} - x^n)(x^{n+1} + x^n) + (y^{n+1} - y^n)(y^{n+1} + y^n)$$

$$= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \cdot (x^{n+1} + x^n) + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1})(y^{n+1} + y^n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{1}$$

παρατηρώ ότι κάθε ένας αριθμός είναι ίσος με τον προηγούμενο άρα όλοι είναι ίσοι με τον πρώτο!

δ) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: $(x^n)^2 + (y^n)^2$;

* πεπλεγμένη μέθοδος του Euler γενικά: $y' = f(t, y)$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{n+1} = x^n - h\cdot y^{n+1} \\ \Rightarrow\ y^{n+1} = y^n + h x^{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^n = x^{n+1} + h\, y^{n+1} \\ y^n = y^{n+1} - h\, x^{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^{n+1} + h y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2$$

Τα διπλάσια γινόμενα φεύγουν $\rightsquigarrow$ $= (x^{n+1})^2 + h^2 (y^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 + h^2 (x^{n+1})^2$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)\left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right]$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \frac{1}{1+h^2}\left[(x^n)^2 + (y^n)^2\right]$$

$$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n}\underbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2\right]}_{1} \to 0,\ n \to \infty$$

αφού $(1+h^2)^n \to \infty$ το $\frac{1}{(1+h^2)^n} \to 0$!

Ασκηση 2011

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler με βήμα h.
ΝΔΟ

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq (x^n)^2 + (y^n)^2$$

Λύση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (Ax, x) \leq 0$

$\hookrightarrow$ μη θετικά ορισμένος !

$$Ax = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

Ισχύει
$2ab \leq a^2 + b^2$
$(=) \ (a-b)^2 \geq 0$

$$(Ax, x) = (-2x_1 + x_2)x_1 + (2x_1 - 2x_2)x_2 =$$
$$= -2x_1^2 + x_2 x_1 + 2x_1 x_2 - 2x_2^2 =$$
$$= -2x_1^2 + 3x_1 x_2 - 2x_2^2$$
$$\leq -2x_1^2 + \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \leq 0.$$

Άρα ισχύει!

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \cdot A \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right) + h \underbrace{\left(A \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right)}_{\leq 0 \text{ (από ιδιότητα)}}$$

$$\Rightarrow (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \leq \left(\begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{CS} \rightarrow \leq \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2} \sqrt{(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2} \leq \sqrt{(x^n)^2 + (y^n)^2}$$

→ για το συνεχές πρόβλημα:

$y'(t) = Ay(t) \qquad (Ax, x) \leq 0$

$\Rightarrow (y'(t), y(t)) = (Ay(t), y(t)) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)' \leq 0 \Rightarrow \|y(t)\|$ φθίνουσα.

Άσκηση 2.12

$$\begin{cases} y'(t) = M y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad t \geq 0.$$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ τ.ω. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $(Mx, x) \leq 0$.
(αρνητικά ημιορισμένος).

$\|y(t)\|$ φθίνουσα

- Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler.

ΝΔο $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$ $n \in \mathbb{N}_0$.

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot M \cdot y^{n+1}.$$

Παίρνουμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με y^{n+1} και έχουμε

$$\|y^{n+1}\|^2 = (y^n, y^{n+1}) + h \cdot \underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0} \leq (y^n, y^{n+1})$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1}) \underset{CS}{\leq} \|y^n\| \cdot \|y^{n+1}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|}$$

$y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$ μέσου

$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$ τραπεζ.

- Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου (μέθοδος του τραπεζίου)

ΝΔο $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} M (y^n + y^{n+1}) \overset{*1}{\Rightarrow} y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} M (y^n + y^{n+1})$$

Παίρνουμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με

111 $y^n + y^{n+1}$ και έχουμε

$$\left(y^{n+1}-y^n,\, y^{n+1}+y^n\right) = \frac{h}{2}\underbrace{\left(M\left(y^n+y^{n+1}\right),\, y^n+y^{n+1}\right)}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \left(y^{n+1}-y^n,\, y^{n+1}+y^n\right) \leq 0 \Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 - \|y^n\|^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2 \Rightarrow \boxed{\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|}$$

*1. Θα μπορούσαμε και χωρίς να φέρουμε στο α' μέλος το y^n:

$$\left(y^{n+1},\, y^{n+1}+y^n\right) \leq \left(y^n,\, y^{n+1}+y^n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 + \cancel{\left(y^{n+1}, y^n\right)} \leq \|y^n\|^2 + \cancel{\left(y^{n+1}, y^n\right)}$$

Άσκηση 2.15

$$\begin{cases} y' = -e^y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler με βήμα h.

ΝΔΟ. Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

(μπορώ με συνθήκη του Lipschitz (αν έχω πληροφορία για το h) ή με μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Λύση

Θέτουμε $f(t,y) := -e^y \quad t \in [0,1],\ y \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $t \in [0,1]$ η $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y $\left(f_y(t,y) = -e^y < 0\right)$ οπότε ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. Από τη θεωρία ξέρουμε τότε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Άσκηση 2.17

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \qquad a \le t \le b \end{cases}$$

$\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\ [f(t,y_1) - f(t,y_2)] \cdot (y_1 - y_2) \le 0.$

• <u>Μέθοδος του μέσου</u>

<u>ΝΔΟ</u>: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για δεδομένο y^n, το y^{n+1} είναι καλά ορισμένο.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$ είναι καλά ορισμένη.

Έχουμε

$$2 \cdot \frac{1}{2}(y^{n+1} + y^n) = 2y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

ΝΔΟ είναι καλά ορισμένο

ό,τι κάναμε στη μέθοδο του Euler!

• Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) := 2x - 2y^n - h \cdot f(t^n + \frac{h}{2}, x)$ και θα αποδείξουμε ότι αυτή έχει ακριβώς μία ρίζα x^*.

(Τότε θα έχουμε $\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) = x^* \Rightarrow y^{n+1} = 2x^* - y^n$)

113. → ό,τι κάναμε και στη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

- Μοναδικότητα: Η g είναι γν. αύξουσα συνάρτηση (γιατί η $2x$ είναι γνησίως αύξουσα και η $-2y^n - h\cdot f(t^n+\frac{h}{2}, x)$ είναι αύξουσα)

Οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

- Ύπαρξη: Η συνάρτηση g είναι συνεχής.

• Για $x \leq 0$ έχουμε:

$$f(t^n+\frac{h}{2}, x) \geq f(t^n+\frac{h}{2}, 0)$$

οπότε $-h\cdot f(t^n+\frac{h}{2}, x) \leq -h\cdot f(t^n+\frac{h}{2}, 0)$ συνεπώς

Προσοχή δεν αντικαθιστούμε κ' αυτό με 0 γιατί μετά δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα για το που τείνει!

$g(x) \leq 2x - 2y^n - h\cdot f(t^n+\frac{h}{2}, 0) \to -\infty$ καθώς $x \to -\infty$, και αρνητικές τιμές.

• Για $x \geq 0$ έχουμε $f(t^n+\frac{h}{2}, x) = f(t^n+\frac{h}{2}, 0)$

οπότε

$$g(x) \geq 2x - 2y^n - h\cdot f(t^n+\frac{h}{2}, 0) \to \infty \text{ καθώς } x \to \infty$$

Η g παίρνει και θετικές τιμές.

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

→ Συμπέρασμα: Η g έχει ακριβώς μία ρίζα x^*.

Τότε $\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) = x^* \Rightarrow \boxed{y^{n+1} = 2x^* - y^n}$

Άσκηση 2.18 $\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ $t \in [a,b]$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Μέθοδος του τραπεζίου.

ΝΔό: προσεγγίσεις καλά ορισμένες

$$y^{n+1} = y^n + h/2 \, [f(y^n) + f(y^{n+1})]$$

$$g(x) := x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - h/2 \, f(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μία ρίζα.

- Μοναδικότητα: Η g είναι γνήσια αύξουσα (γιατί η x είναι γνήσια αύξουσα και η $-y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(x)$ είναι αύξουσα), οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

- Ύπαρξη:

- Για $x \leq 0$ έχουμε: $f(x) \geq f(0)$
  οπότε $-\frac{h}{2} f(x) \leq -\frac{h}{2} f(0)$

Δηλαδή $g(x) \leq x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \to -\infty$ και $x \to -\infty$

Ιδιαίτερα η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

- Για $x \geq 0$ έχουμε: $f(x) \leq f(0)$.

οπότε $g(x) \geq x - y^n - \frac{h}{2} f(y^n) - \frac{h}{2} f(0) \to \infty$ και $x \to \infty$

Ιδιαίτερα η g παίρνει και θετικές τιμές

115. Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Συμπέρασμα: Η g έχει ακριβώς μια ρίζα, x^*. Τότε $y^{n+1} = x^*$, οπότε είναι καλά ορισμένο.

Άσκηση 2.19 $\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \phi(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$

• Μέθοδος του τραπεζίου.

ΝΔό: προσεγγίσεις καλά ορισμένες.

$f(t,y) = -y^3 + \phi(t)$

$f_y(t,y) = -3y^2 \leq 0$

$\forall t$, η $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Το αποτέλεσμα αποδεικνύεται όπως στην προηγούμενη άσκηση.