1η πρόοδος 23-11-13
2η πρόοδος 14-11-13
3η πρόοδος 18-1-14
} Σάββατο 10:00.

$y'(t)=0 \Rightarrow y(t)=c \quad c\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Επιπρόσθετες συνθήκες: αρχικές, συνοριακές.
Τα προβλήματα θα είναι τα εξής:

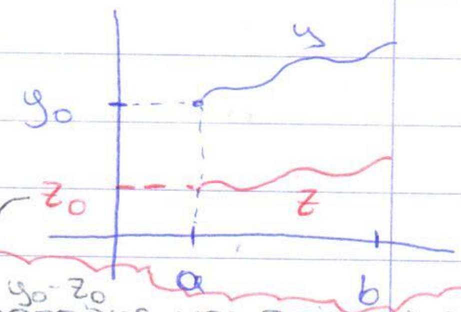
1ο Προβλήματα αρχικών τιμών.

$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ $[a,b]$

Δεδομένα: $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $y_0\in\mathbb{R}^m$

1η μεταβλητή ορίζεται στο $[a,b]$ 2η στο $\mathbb{R}$.

Ζητούμενα: $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ τ.ω.



$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

Ευστάθεια: Αν y_0-z_0 μικρή, τότε τι μπορούμε να πούμε για την απόσταση $y-z$ στο b.

- Ύπαρξη λύσης
- Μοναδικότητα λύσης ($\nexists$ περισσότερα από 1)
- Ευστάθεια (Συνεχής εξάρτηση)
- Γενίκευση για συστήματα.
- Επίλυση Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής.

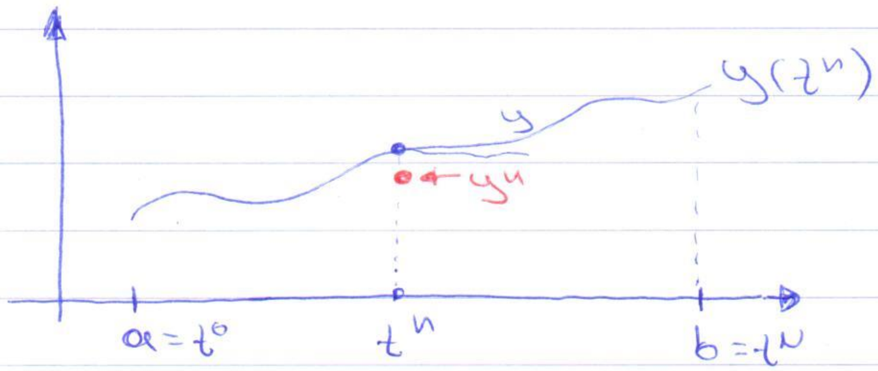
2η Μέθοδος του Euler.

Βρίσκουμε προσεγγίσεις των τιμών της λύσης y σε κάποια σημεία $t^0, t^1, t^2, \dots, t^N$ → δείκτες όχι εκθέτες.

π.χ. για $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$, $t^n := a + nh$
$n = 0, \dots, N$.
$(t^0 = a,\ t^N = b)$

* Βρίσκουμε προσεγγίσεις y^m των τιμών $y(t^m)$
$m = 0, \dots, N$.

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n) & n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$



- Πώς προκύπτει η μέθοδος;
- Κόστος (ανά βήμα)
- Ποιότητα των προσεγγίσεων
- Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα
- Πότε χρησιμοποιείται.

3 Μέθοδοι των Runge-Kutta

$q \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q}$ $b, \tau \in \mathbb{R}^q$
διανύσματα

(Συνήθως $\tau_i \in [0,1]$ $i = 1, \dots, q$)

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$y^n \to y^{n+1}$ $t^{n,i} := t^n + \tau_i h$ $i = 1, \dots, q$

$(\tau_i \in [0,1] \Rightarrow t^{n,i} \in [t^n, t^{n+1}])$

→ Χρησιμοποιούμε τον A και το τ για να προσδιορίσουμε προσεγγίσεις $y^{n,i}$ των $y(t^{n,i})$:

$$y^{n,i} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad i = 1, \dots, q$$

Σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους

→ Χρησιμοποιούμε τα $y^{n,1}, \dots, y^{n,q}$ και το b και βρίσκουμε την προσέγγιση y^{n+1} της $y(t^{n+1})$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Δ.Ε. πρώτης τάξης !

4 || Πολυβηματικές μέθοδοι

Έστω $k \in \mathbb{N}$ $\quad a_0, \dots, a_k$

$b_0, \dots, b_k$

$\underbrace{y^0, \dots, y^{k-1}}$ δεδομένα

χρησιμοποιώ k προσεγγίσεις εκεί πριν 1 !

$$a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n =$$
$$= h\,[\,b_k \cdot f(t^{n+k}, y^{n+k}) + b_{k-1} \cdot f(t^{n+k-1}, y^{n+k-1}) + \dots$$
$$\dots + b_0\, f(t^n, y^n)\,] \qquad n = 0, \dots, N-k$$

$y''(t)=0$

$y'(t)=c_1 \Rightarrow y(t)=c_1 \cdot t + c_2$

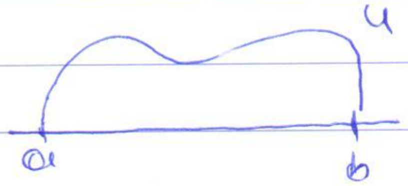
↳ 2η παράγωγος 2 c_1, c_2 και άρα 2 συνθήκες

5ο || Το πρόβλημα 2 σημείων.

Δεδομένα: $q, f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Ζητούμενο: $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad u=u(x)$.

$$\begin{cases} -u'' + q(x)\cdot u = f(x) & \text{στο } [a,b] \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$$



- Ύπαρξη
- Μοναδικότητα
- Ο ρόλος που παίζει το πρόσημο της q

1ο) Προβλήματα αρχικ

1ο Προβλήματα αρχικών τιμών

Δεδομένα: $f:[\alpha,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$y_0\in\mathbb{R}$

Ζητούμενο: $y:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$

$$(*)\quad \begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) \\ y(\alpha)=y_0 \end{cases} \qquad \alpha\le t\le b$$

→ Υπόθεση: f συνεχής.

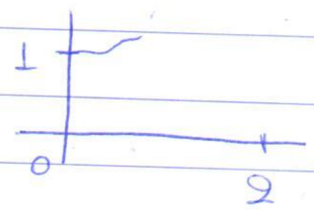
Κάθε $y\in C^1[\alpha,b]$: να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση στο $[\alpha,b]$ και την αρχική τιμή στο α, λέγεται λύση του $(*)$

1ο παράδειγμα μη ύπαρξης λύσης

$$(*)\quad \begin{cases} y'=y^2\ge 0 \quad 0\le t\le 2 \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad (\Leftrightarrow y'(t)=(y(t))^2)$$

$f(t,y)=y^2$. → άπειρες φορές παρ/μη f ομαλή

→ Ισχυρισμός: $\nexists$ λύση του $(*)$



Λύση

→ Η y (αν $\exists$) έχει στο 0 την τιμή 1 και είναι αύξουσα (γνήσια) άρα δεν μηδενίζεται

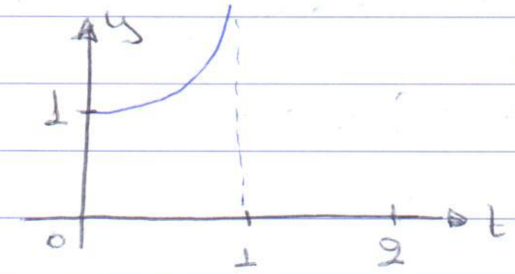
$$y'(s)=[y(s)]^2 \Leftrightarrow \frac{y'(s)}{[y(s)]^2}=1 \quad (1)$$

Ισχύει ότι $\left(\frac{1}{y(s)}\right)' = -\frac{1}{[y(s)]^2}\cdot y'(s)$.

Επομένως η (1) $\Rightarrow -\left(\frac{1}{y(s)}\right)' = 1 \Rightarrow -\int_0^t \left(\frac{1}{y(s)}\right)' ds = \int_0^t ds \Rightarrow$

$\Rightarrow -\left[\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)}\right] = t \Rightarrow -\frac{1}{y(t)} = t-1 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{t-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$



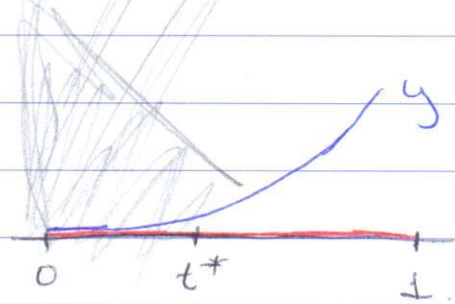
$t \to 1$
$y \to \infty$

Η συνάρτηση αυτή είναι η μοναδική λύση στο $[0,1)$ και δεν επεκτείνεται ως συνεχώς παρ/μη σε όλο το $[a,b]$. Άρα $\nexists$ λύση.

2ο Παράδειγμα μη-μοναδικότητας

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & 0 \le t \le 1. \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$\rightarrow y(t) = 0 \quad t \in [0,1]$ λύση.



$y(t) > 0, \ t > t^*$.

$\frac{y'(s)}{\sqrt{|y(s)|}} = 1 \iff \frac{y'(s)}{\sqrt{y(s)}} = 1 \quad (1).$

Ισχύει $(\sqrt{y(s)})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y(s)}}\cdot y'(s)$.

(1) $\Rightarrow 2(\sqrt{y(s)})' = 1 \iff 2\int_{t^*}^t (\sqrt{y(s)})' ds = \int_{t^*}^t ds \Rightarrow$

$\Rightarrow 2[\sqrt{y(t)} - \cancel{\sqrt{y(t^*)}}^{\,0}] = t - t^* \Rightarrow \sqrt{y(t)} = \frac{t-t^*}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(t-t^*)^2 \quad t^* \le t \le 1. \quad y \in C^1[0,1].$

3ο παράδειγμα:

$$\begin{cases} y' = p(t)\cdot y + q(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Υπόθεση $p, q \in C[a,b]$.

Δ.Ε. αυτής της μορφής λέγονται γραμμικές.

- Για $q(t)=0$ $\forall t$ προκύπτει η αντίστοιχη ομογενής γραμμική Δ.Ε.

- Ισχυρισμός: Το πρόβλημα αυτό έχει ακριβώς μία λύση, την

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds}\left[y_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds\right] \quad \forall a \le t \le b$$

για $t=a$, ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(a)=y_0$

δεν έχει σημασία που έβαλα τ, αλλά επειδή απ' έξω έχω $q(s)$

$$\left(= y_0 \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + \int_a^t q(s)\cdot \underbrace{e^{\int_a^t p(\tau)d\tau}\, e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}}_{\substack{e^{\int_a^t p(\tau)d\tau - \int_a^s p(\tau)d\tau} \\ \| \\ e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}}} ds\right)$$

Απόδειξη.

- 1^{η} περίπτωση: $p(t)=0$.

$$y'(s) = q(s) \Rightarrow \underbrace{\int_a^t y'(s)ds}_{y(t)-y(a)} = \int_a^t q(s)ds \Rightarrow$$

$\Rightarrow y(t) = y_0 + \int_\alpha^t q(s)\,ds \quad , \quad \alpha \le t \le b$

- 2η περίπτωση: γενική. *Φέρνω το p στο α' μέλος για να έχω μόνο το q στο β' όπως πριν.

$y'(s) - p(s)y(s) = q(s)$ *Αν καταφέρω ότι έχω αριστερά ως παράγωγο κάποιου πράγματος, τότε έχω τελειώσει, για να ολοκληρώσω όπως πριν

$$\phi(s)\cdot y'(s) - \phi(s)\cdot p(s)\cdot y(s) = (\phi(s)\cdot y(s))' = \phi(s)\cdot y'(s) + \phi'(s)\cdot y(s)$$

*₁

$\phi'(s) = -\phi(s)\cdot p(s)$ *₁ Δεν είναι απαραίτητα, αρκεί να θυμάμαι το συμπέρασμα

$(e^s)' = e^s$

$(e^{\psi(s)})' = e^{\psi(s)}\cdot \psi'(s)$

$\psi'(s) = -p(s)$

$\psi(s) = -\int_\alpha^s p(\tau)\,d\tau$

- Συμπέρασμα $\phi(s) = e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}$ Ολοκληρωτικός παράγοντας

Πολλαπλασιάζουμε τη Δ.Ε επί $e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}$

Άρα έχουμε:

$$\underbrace{e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\left[y'(s) - p(s)\cdot y(s)\right]}_{\left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\, y(s)\right)'} = q(s)\cdot e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}$$

$$* \left(e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\right)' = e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\left(-\int_\alpha^s p(\tau)\,d\tau\right)' = -e^{-\int_\alpha^s p(\tau)d\tau}\cdot p(s)$$

Άρα:

$$\left(e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \cdot y(s)\right)' = q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau}$$

→ φτάσαμε στη μορφή που θέλαμε. $\phi'(s) = q(s)$ και εργαζόμαστε κατά τα γνωστά.

Ολοκληρώνοντας από α έως t, παίρνουμε:

$$e^{-\int_a^t p(\tau)d\tau} \cdot y(t) - y_0 = \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds$$

Αποδείξαμε την παράσταση και ότι έχει και μία λύση.

Θεώρημα: Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων.

Έστω $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, η οποία επιπλέον ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή

→ δεν εξαρτάται από το t.

$$\exists L>0\ \forall t\in[a,b]\ \forall y_1,y_2\in\mathbb{R} : |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L\cdot|y_1-y_2|$$

Τότε το πρόβλημα:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 & f \text{ συνεχής} \end{cases}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

- **Υπόθεση**: f_y συνεχής.

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $\quad f(t,y_1)-f(t,y_2) = f_y(t,\tilde{y})(y_1-y_2)$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})|\cdot|y_1-y_2|$$

→ Συμπέρασμα.
Σε αυτήν την περίπτωση η συνθήκη του Lipschitz ικανοποιείται αν και μόνο αν
$|f_y(t,\tilde{y})| \le L$. δηλαδή η f_y φραγμένη.
(τρίβιο από γραφτικά πολυώνυμα)
π.χ η $f(t,y)=y^2$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz αφού $f_y(t,y)=2y$, $|f_y(t,y)| \to \infty$
$y \to \infty$
ή $y \to -\infty$

Η συνθήκη του Lipschitz λέγεται ολική συνθήκη του Lipschitz. (γιατί ισχύει για όλα τα $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$!)

εξασφαλίζει ύπαρξη, μοναδικότητα και βρίσκει κ' το b. !

Θεώρημα : Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα.
Έστω $c>0$, $f \in C([a,b]\times[y_0-c, y_0+c])$
Αν η f ικανοποιεί την τοπική συνθήκη του Lipschitz, ομοιόμορφα ως προς t.
$\exists L>0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in [y_0-c, y_0+c]$:
όλες οι συναρτήσεις που είναι παράγωγες ως προς y, την ικανοποιούν

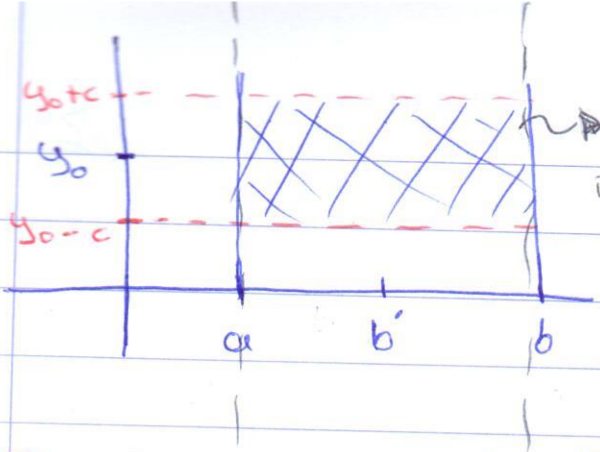
$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le L \cdot |y_1-y_2|$$

Τότε το πρόβλημα : $\begin{cases} y'=f(t,y) & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 & f \text{ συνεχής.} \end{cases}$

έχει ακριβώς μία λύση τουλάχιστον σε ένα διάστημα $[a,b']$, όπου με
Α είναι το μέγιστο της f στο ορθογώνιο.

$$A = \max_{\substack{a\le t\le b \\ y_0-c\le x\le y_0+c}} |f(t,x)|$$

έχουμε $b' = \min\left(b, a+\frac{c}{A}\right)$



→ Ουσιαστικά στην ολική συνθήκη που ισχύει $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ πρέπει να $\exists$ λύση σε ολόκληρη τη ζώνη!

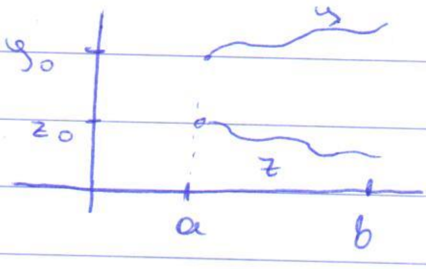
π.χ. η $f(t,y)=\sqrt{y}$

$f_y(t,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}} \to \infty, \quad y \to 0$ → Επειδή έχω $y(0)=0$, αν είχα μια άλλη θετική αρχική τιμή θα ισχυε!

• Η συνέχεια της f εξασφαλίζει ύπαρξη λύσης, τουλάχιστον σ'ένα διάστημα $[a,\tilde{b})$, αλλά όχι μοναδικότητα. (2ο παράδειγμα)

2. Ευστάθεια

$$\begin{cases} z'=f(t,z) \\ z(a)=z_0 \end{cases} \qquad a \le t \le b$$



▶ 1η περίπτωση: Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Θέτουμε $\varepsilon(t):=y(t)-z(t)$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την $|\varepsilon(t)|$ συναρτήσει της $|\varepsilon(a)|=|y_0-z_0|$.

Για την εκτίμηση χρειαζόμαστε πληροφορία για την παράγωγο της $(\varepsilon(t))^2$ → αφού $|x|$ δν παρ/ζεται στο 0 άρα και $|\varepsilon(t)|$!

Έχουμε

$$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$$

άρα εφόσον $((\varepsilon(t))^2)' = 2\varepsilon(t)\varepsilon'(t)$

** $\underbrace{\varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t)} = [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\cdot\varepsilon(t)$

$$\frac{1}{2}((\varepsilon(t))^2)' \le |f(t,y(t)) - f(t,z(t))|\cdot|\varepsilon(t)|$$

$$\le L\cdot\underbrace{|y(t)-z(t)|}_{|\varepsilon(t)| \to \varepsilon(t) := y(t)-z(t)}\cdot|\varepsilon(t)| = L\cdot(\varepsilon(t))^2$$

Επομένως: $((\varepsilon(t))^2)' \le 2L\underbrace{(\varepsilon(t))^2}_{\phi(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi'(t) \le 2L\cdot\phi(t) \Rightarrow \phi'(t) - 2L\cdot\phi(t) \le 0$$

$$\Rightarrow (e^{-2Lt}\phi(t))' \le 0 \quad t\in[a,b]$$

Άρα η $e^{-2Lt}\phi(t)$ είναι φθίνουσα, οπότε

$$e^{-2Lt}\phi(t) \le e^{-2La}\phi(a) \quad \forall\, t \ge a$$

$$\Rightarrow \phi(t) \le e^{2(t-a)L}\phi(a) \Rightarrow \boxed{|\varepsilon(t)| \le e^{L(t-a)}\cdot|\varepsilon(a)|}$$

$a \le t \le b$.

Επομένως

(+) $|y(t)-z(t)| \le \overbrace{e^{L(t-a)}}^{\text{αύξουσα}}\cdot|y_0 - z_0| \quad a\le t\le b.$

Άρα

(++) $\max\limits_{a\le t\le b} |y(t)-z(t)| \le e^{L(b-a)}|y_0 - z_0|.$

Οι (+) κ' (++) είναι εκτιμήσεις ευστάθειας.
Από την ευστάθεια ((+), (++)) έπεται αμέσως μοναδικότητα της λύσης.

Στην περίπτωση που το γινόμενο $L(b-a)$ είναι πολύ μεγάλο, οι εκτιμήσεις ευστάθειας (+) κ' (++) δεν είναι χρήσιμες στην πράξη.

2η περίπτωση:

Υπόθεση $\forall t \in [a,b]$ και $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1)-f(t,y_2)](y_1-y_2) \le 0$$

$y_1 > y_2 \Rightarrow f(t,y_1) \le f(t,y_2)$ (η f φθίνουσα ως προς y_2.

Μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz. Η συνθήκη αυτή λέει ότι για σταθερό t, η $f(t,\cdot)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Τότε, σύμφωνα με την (**)

$$\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)' = \underbrace{[f(t,y(t))-f(t,z(t))]\cdot[y(t)-z(t)]}_{\le 0 \text{ σύμφωνα με την υπόθεση (μονόπλευρη Lipschitz)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left((\varepsilon(t))^2\right)' \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \le (\varepsilon(a))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \le |\varepsilon(a)| \Rightarrow |y(t)-z(t)| \le |y_0-z_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_{a\le t\le b} |y(t)-z(t)| \le |y_0-z_0| \quad *_1$$

$\Rightarrow$ Μοναδικότητα, Ύπαρξη.

$*_1$ Ουσιαστικά η y φθίνει και οι τιμές πλησιάζουν στην z.
Είναι η 1η περίπτωση όπου αντί για $e^{L(t-a)}$ ή $e^{L(b-a)}$ έχουμε μονάδα.

Παράδειγμα. Γραμμική Δ.Ε.

y^1 γι' αυτό γραμμική!

$$f(t,y)=\lambda(t)\cdot y+\varphi(t) \qquad t\in[a,b].$$

Ερώτημα: Πότε η f ικανοποιεί την:

$$[f(t,y_1)-f(t,y_2)]\cdot(y_1-y_2)\leq 0.$$

Λύση

$$f(t,y_1)-f(t,y_2)=[\lambda(t)\cdot y_1+\cancel{\varphi(t)}]-[\lambda(t)\cdot y_2+\cancel{\varphi(t)}]$$
$$=\lambda(t)\cdot(y_1-y_2)$$

Η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz γράφεται στη μορφή

$$\lambda(t)\,(y_1-y_2)^2\leq 0$$

Η συνθήκη ικανοποιείται ανν $\lambda(t)\leq 0$ $t\in[a,b]$

---

* Γραμμική Δ.Ε.: $f(t,y)=\lambda(t)\cdot y+\varphi(t)$

$y(t)$, $z(t)$.

Όταν από μία γραμμική Δ.Ε αφαιρέσω τον σταθερό όρο $\varphi(t)$ προκύπτει η αντίστοιχη ομογενής.

$\varepsilon(t):=y(t)-z(t)$

Ποια εξίσωση ικανοποιεί η ε;

Έχουμε

$$\varepsilon'(t)=y'(t)-z'(t)$$
$$=[\lambda(t)\cdot y(t)+\cancel{\varphi(t)}]-[\lambda(t)z(t)+\cancel{\varphi(t)}]$$
$$=\lambda(t)\underbrace{[y(t)-z(t)]}_{\varepsilon(t)}.$$

$$\begin{cases} \varepsilon'(t) = \lambda(t)\cdot\varepsilon(t) & a\le t\le b \\ \varepsilon(a) = y_0 - z_0 \end{cases}$$

(αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε.)

Συμπέρασμα: Στη γραμμική περίπτωση αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\cdot y(t) & a\le t\le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Όταν $\lambda(t)\le 0$, η εκτίμηση ευστάθειας γράφεται στη μορφή:

$$\max_{a\le t\le b}|y(t)|\le|y_0|$$

→ Υπόθεση $y_0\neq 0$.

Μάλιστα αν u είναι η λύση του προβλήματος

$$(+++)\begin{cases} u'(t) = \lambda(t)\cdot u(t) \\ u(a) = 1 & a\le t\le b \end{cases}$$

τότε η λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \text{είναι } y(t) = y_0\cdot u(t)$$

Στην περίπτωση του (+++) η $\max_{a\le t\le b}|y(t)|\le|y_0|$ γράφεται

$$\max_{a\le t\le b}|u(t)|\le 1.$$

→ Το πρόβλημα $\begin{cases} y'(t) = \lambda\cdot y(t) & t\ge 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (λ σταθερά) είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα δοκιμής που θα μας απασχολήσουν.

Λύση: $y(t)=e^{\lambda t}$ $\quad t\geq 0$.

3. Συστήματα Δ.Ε.

Στη βαθμωτή περίπτωση $\boxed{m=1}$, για γραμμικά συστήματα $m>1$

Δεδομένα: $f:[a,b]\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Ζητούμενο: $y:[a,b]\to \mathbb{R}^m$ τ.ω.

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) & a\leq t\leq b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

- Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται πολύ συχνά στις εφαρμογές.
- Προβλήματα αρχικών τιμών για βαθμωτές Δ.Ε. (αλλά και για συστήματα) υψηλότερης τάξης ανάγονται σε προβλήματα της μορφής (1)

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$y^{(m)}(t)=f\left(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(m-1)}(t)\right) \quad a\leq t\leq b$$

Οι συνθήκες που παίρνω είναι της εξής μορφής:

$$\begin{cases} y^{(m)}(t)=f(t,y(t),\dots,y^{(m-1)}(t)) \\ y^{(i)}(a)=y_i \qquad 0\leq i\leq m-1. \end{cases}$$

Θέτουμε $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ z_m(t) \end{pmatrix}$

!! Ποιο πρόβλημα λύνει η $z(t)$;

Αν θέλω να εμφανίζονται καθόλου y; Βοηθητικοί τα χρησιμοποιώ

$$z'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \\ y^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix} =$$

(σύστημα 1ης τάξης)

$$= F(t, z(t))$$

Επιπλέον $z(\alpha) = \begin{pmatrix} y(\alpha) \\ y'(\alpha) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^m$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

i) $x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

iii) $x, y \in \mathbb{R}^m$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Θεώρημα: Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^m$. Αν η $f : [\alpha, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, δηλαδή:

$$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [\alpha, b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ \|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L \|x - \tilde{x}\|$$

Τότε το πρόβλημα $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) & a\le t\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

έχει ακριβώς μία λύση σε όλο το $[a,b]$.

Άσκηση 1.1

$$y'(t)=p(t)\cdot y(t)+q(t) \qquad t\in[a,b]$$
$$p,q\in C[a,b]$$

(*) $y'(t)=p(t)\cdot y(t) \qquad t\in[a,b]$

Ν.δ.ό. κάθε λύση y της (*) είναι της μορφής

(**) $y(t)=C\, e^{\int_a^t p(s)\,ds} \qquad t\in[a,b]$ με C σταθερά.

Λύση

1ο Κάθε συνάρτηση της μορφής (**) είναι λύση της (*).

Πράγματι:

$$y'(t)-p(t)\cdot y(t)=C\, e^{\int_a^t p(s)ds}\cdot \underbrace{p(t)}_{\left(\int_a^t p(s)ds\right)'}-p(t)\cdot C\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}=0$$

2ο Δεν υπάρχουν λύσεις y της (*) μορφής διαφορετικής της (**)

Έστω y μία λύση της (*)

Θεωρώ τότε τη συνάρτηση

$$u(t) := y(t)\, e^{-\int_a^t p(s)\,ds}$$ → Αρκεί νδο $u(t)=c$

Θα αποδείξουμε ότι $u(t)=c$, οπότε η y θα είναι της μορφής (**)

Πράγματι, έχουμε

$$u'(t) = y'(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)\,ds} + y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)\,ds}[-p(t)] =$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)\,ds}\,[\underbrace{y'(t) - p(t)\cdot y(t)}_{0}] = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(t) = c$

Άσκηση 1.2

(+) $y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t) \quad t\in[a,b]$

Νδο: Κάθε λύση της (+) είναι της μορφής

(++) $$y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds}\left[c + \int_a^t \underbrace{q(s)}_{\text{Αν } q=0 \text{ όπως στην προηγούμενη άσκηση.}}\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\right]$$

Λύση

1° κάθε y της μορφής (++) είναι λύση της (+): πράξεις όπως στην 1.1, απλά παραγωγίζω.

2° Δεν υπάρχουν άλλες λύσεις της (+) που να ρην είναι της μορφής (++)

Πράγματι:

Έστω $\tilde{y}$ μία άλλη λύση.

Τότε η $z := y - \tilde{y}$ αποτελεί λύση της

$z'(t) = p(t) \cdot z(t)$.

$$y'(t) = p(t) \cdot y(t) + q(t)$$
$$(-)\ \tilde{y}'(t) = p(t) \cdot \tilde{y}(t) + q(t)$$

$$\underbrace{y'(t) - \tilde{y}'(t)}_{z'(t)} = p(t) \left[\underbrace{y(t) - \tilde{y}(t)}_{z(t)} \right]$$

Άρα η z είναι της μορφής $z(t) = \tilde{c} \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds}$.

Τώρα $\tilde{y} = y - z$. Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι της μορφής (++), με κατάλληλη σταθερά.

3ο Πώς οδηγούμαστε στην (++) / → μπορούμε τ' όπως στην θεωρία.

Με κίνητρο την (**) προσπαθούμε να βρούμε λύσεις $y(t)$ της μορφής

(+++) $y(t) = C(t)\, e^{\int_a^t p(s)\,ds}$ $\quad t \in [a,b]$

με κατάλληλη συνάρτηση C

(τεχνική της μεταβολής των σταθερών).

Ερώτημα: Πώς προκύπτει κατάλληλη $c(t)$;

Αντικαθιστούμε την (+++) στην (+) και έχουμε

$$c'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds} + \cancel{c(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds} \cdot p(t)} = \cancel{p(t) \cdot c(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds}} + q(t)$$

$$\Leftrightarrow c'(t) = q(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}$$

Αυτή είναι πολύ εύκολη Δ.Ε και μπορούμε να τη λύσουμε. Έχουμε: (αλλάζουμε μεταβλητές)

$$c'(s) = q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^t c'(s)ds = \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(t) - \underbrace{c(a)}_{c_0} = \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds$$

πολ/ζω κ' με $e^{\int_a^t p(s)ds}$

$$\Rightarrow c(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} \left[c(a) + \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds \right].$$

Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y' = y^2 & 0 \le t \le 2. \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$f(t,y) = y^2$

$f_y(t,y) = 2y$

Άρα η f δεν ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz, ικανοποιεί όμως την τοπική » » σε κάθε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$.

Άρα το πρόβλημα έχει τοπικά σε ένα διάστημα της μορφής $[0, b']$, μοναδική λύση.

Ερώτημα: Για ποια επιλογή του c δίνει το Θεώρημα 1.2 (τοπική ύπαρξη κ' μοναδικότητα σελ 10) το μέγιστο b'.

$$b' = \min\left(2,\ 0 + \frac{c}{A}\right) \quad \text{με} \quad A := \max_{\substack{0\le t\le 2 \\ 1-c\le y\le 1+c}} |f(t,y)| = (1+c)^2$$

Άρα

$$b' = \min\left(2,\ \frac{c}{(1+c)^2}\right)$$

Ισχυρισμός: $\frac{c}{(1+c)^2} \le 2 \iff c \le 2(1+c)^2 \iff \dots$

$2 + 3c + c^2 \ge 0$ σωστό!

$$b' = \frac{c}{1+c^2}$$

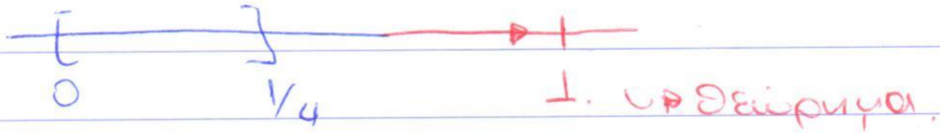
Ζητείται: $\max\limits_{c>0} \frac{c}{(1+c)^2}$. → Μπορώ να θεωρήσω το $\frac{c}{(1+c)^2}$ ως συνάρτηση του c να παραγωγίσω και να βρω το μέγιστο...

$$\frac{c}{(1+c)^2} = \frac{c}{1+2c+c^2} = \frac{1}{2+\left(c+\frac{1}{c}\right)}$$

Ισχυρισμός: $c+\frac{1}{c} \ge 2$ και ισότητα ισχύει μόνο για $\underline{c=1}$

$$c+\frac{1}{c} \ge 2 \iff c^2+1 \ge 2c \iff c^2-2c+1 \ge 0 \iff (c-1)^2 \ge 0.$$

Επομένως $\max\limits_{c>0} \frac{c}{(1+c)^2} \underset{c=1}{=} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$



$$\begin{cases} y' = f(t,y) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

$y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$

- Γραμμικό σύστημα Δ.Ε.:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)\cdot y(t) + g(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{m,m}$, $g(t) \in \mathbb{R}^m$.

- Ευστάθεια

$$\begin{cases} z' = f(t,z) & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

$\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$.

(*) $\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$

Ευκλείδια νόρμα: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

$(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$

$\|x\| = (x,x)^{1/2}$

Παίρνουμε στην (*) το εσωτερικό γινόμενο με $\varepsilon(t)$ και έχουμε:

(**) $(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), \varepsilon(t))$

24. $\left(\varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t)=\frac{1}{2}\left((\varepsilon(t))^2\right)'\right)$

$$(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))=\underbrace{\varepsilon_1'(t)\,\varepsilon_1(t)}_{\frac{1}{2}((\varepsilon_1(t))^2)'}+\varepsilon_2'(t)\varepsilon_2(t)+\cdots+\varepsilon_m'(t)\varepsilon_m(t)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{(\varepsilon_1(t))^2+(\varepsilon_2(t))^2+\cdots+(\varepsilon_m(t))^2}_{\|\varepsilon(t)\|^2}\Big)'$$

Άρα $(\varepsilon'(t),\varepsilon(t))=\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)'$

➜ 1η περίπτωση:

$\exists\, L>0\ \forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\quad \|f(t,x)-f(t,\tilde{x})\|\le L\|x-\tilde{x}\|$

$(x,y)\le\|x\|\cdot\|y\|$
ανισότητα Cauchy-Schwarz

Τότε $\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)'\le\|f(t,y(t))-f(t,z(t))\|\cdot\|\varepsilon(t)\|$

$$\le L\cdot\|y(t)-z(t)\|\cdot\|\varepsilon(t)\|$$

$$=L\cdot\underbrace{\|\varepsilon(t)\|^2}_{\phi(t)}$$

$\Rightarrow \ldots\ \|\varepsilon(t)\|\le e^{L(t-a)}\|\varepsilon(a)\|$

(Προβλήματα δοκιμής)

➜ 2η περίπτωση: Μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz

$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\quad (f(t,x)-f(t,\tilde{x}),\,x-\tilde{x})\le 0$

Τότε η (**) δίνει

$\frac{1}{2}\left(\|\varepsilon(t)\|^2\right)'\le 0\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2\le\|\varepsilon(a)\|^2\Rightarrow$

$\Rightarrow \|y(t)-z(t)\|\le\|y_0-z_0\|$

Πρόβλημα: Πότε ικανοποιείται για το γραμμικό σύστημα Δ.Ε. η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz;

$$f(t,x) = A(t)\cdot x + g(t).$$

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = A(t)x - A(t)\tilde{x} = A(t)(x-\tilde{x})$$
$$\Rightarrow (f(t,x)-f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}) = (A(t)(x-\tilde{x}), x-\tilde{x})$$

$$\forall t\in[a,b]\ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m\ (A(t)\underbrace{(x-\tilde{x})}_{z}, \underbrace{x-\tilde{x}}_{z}) \leq 0$$

$$\forall t\in[a,b]\ \forall z\in\mathbb{R}^m\ (A(t)z, z)\leq 0.$$

Πίνακες με αυτή την ιδιότητα λέγονται μη θετικά ορισμένοι (=διατηρεί σταθερό πρόσημο) ή αρνητικά ημιορισμένοι.

Απάντηση: Ανν οι $A(t)$, $\forall t\in[a,b]$ είναι μη θετικά ορισμένοι.

Θεωρούμε το πρόβλημα (δοκιμής) $y'(t) = \lambda y(t)$
με $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\lambda = a + i\beta \qquad a,\beta\in\mathbb{R}.$$
$$y(t) = y_1(t) + i y_2(t).$$

$$y'(t) = \lambda\cdot y(t) \Leftrightarrow y_1'(t) + i y_2'(t) = (a+i\beta)[y_1(t)+iy_2(t)]$$
$$= [a y_1(t) - \beta y_2(t)] + i[\beta y_1(t) + a y_2(t)]$$

26.

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) &= \alpha \cdot y_1(t) - \beta y_2(t) \\ y_2'(t) &= \beta y_1(t) + \alpha y_2(t) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{:= A.} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Τώρα $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = (\alpha x_1 - \beta x_2) x_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2) x_2 =$$

$$= \alpha (x_1^2 + x_2^2) = \alpha \|x\|^2 \leq 0$$

$\Leftarrow$ αν $\alpha \leq 0$.

Δηλαδή αν $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.