## Δ.Ε. ειδικής μορφής:

**1. Γραμμικές Δ.Ε.** $p, q \in C[a,b]$

$$y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)$$

**2. Εξισώσεις του Bernoulli** $p, q \in C[a,b]$.

$$(*)\quad y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)\,[y(t)]^{\sigma} \qquad \sigma \in \mathbb{R},\ a \le t \le b$$

$\sigma \neq 0$ και $\sigma \neq 1$.

- Αν $\sigma > 0$ τότε $y(t) = 0$ είναι λύση.
- Ζητούμε να βρούμε μη μηδενικές λύσεις. Θέτουμε $v(t) := [y(t)]^{1-\sigma}$

Ισχυρισμός: Η (*) ανάγεται σε γραμμική εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση $v$. Άρα θα παραγωγίσω την $v$ όπως την $y'(t)$

Πράγματι, έχουμε $v'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma}\, y'(t)$.
οπότε

$$\frac{1}{1-\sigma}[y(t)]^{\sigma}\cdot v'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)\,[y(t)]^{\sigma}$$

Δηλαδή

$$\frac{1}{1-\sigma}v'(t) = p(t)\underbrace{[y(t)]^{1-\sigma}}_{=\, v(t)} + q(t)$$

Άρα $\dfrac{1}{1-\sigma}v'(t) = p(t)\cdot v(t) + q(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow v'(t) = \underbrace{(1-\sigma)\,p(t)}_{\tilde{p}(t)}\cdot v(t) + \underbrace{(1-\sigma)\,q(t)}_{\tilde{q}(t)}.$$

Επιλύουμε αυτή τη Δ.Ε., αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στη $v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$ και προσδιορίζουμε την $y$.

Εκ των υστέρων πρέπει να ελέγχουμε κατά πόσο οι πράξεις που κάναμε επιτρέπονται.

## Παράδειγμα.

$$y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 \quad , a \le t \le b.$$

Αυτή είναι Δ.Ε Bernoulli με $p(t) = -1$, $q(t) = 1$ και $\sigma = 2 > 0$

(Η $y(t) = 0$ είναι λύση αφού $\sigma > 0$)

### Λύση

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μη μηδενικές λύσεις.

Θέτουμε $v(t) = (y(t))^{-1} = \dfrac{1}{y(t)}$

Αντί να κάνουμε όλες τις πράξεις μπορούμε να θυμόμαστε τον $v'(t) = (1-\sigma) \cdot p(t) \cdot v(t) + (1-\sigma) q(t)$

Έχουμε $v'(t) = -(y(t))^{-2} y'(t) = -\dfrac{y'(t)}{[y(t)]^2}$ ,

οπότε $-[y(t)]^2 v'(t) = -y(t) + [y(t)]^2$ / Διώχνουμε τα $y$

ή

$$-v'(t) = -\underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{v(t)} + 1 \Rightarrow v'(t) = v(t) - 1.$$

Πάλι μπορούμε να θυμόμαστε τον τύπο

Τώρα $v'(t) = v(t) - 1 \Leftrightarrow v'(t) - v(t) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-t} v'(t) - e^{-t} v(t)}_{(e^{-t} v(t))'} = -e^{-t} \Leftrightarrow (e^{-t} v(t))' = -e^{-t} \Rightarrow$

αυτός είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας, για για $p(t)$ έχαμε $e^{-\int_a^t p(\tau) d\tau}$
Εδώ $P(t) = -1$ όπου το ολοκλήρωμα κάνει $e^{-t}$.

$\Rightarrow e^{-t} v(t) = \underbrace{-\int e^{-t} dt}_{e^{-t}+c} \Rightarrow e^{-t} \cdot v(t) = e^{-t} + c \Rightarrow \boxed{v(t) = 1 + c e^{t}}$

με c αυθαίρετη σταθερά.

Επομένως, $\left( \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{t}} \right)$ $y(t) = \frac{1}{1 + c e^{t}}$

Αυτή η $y$ αποτελεί λύση, αν το c είναι τ.ω.
$1 + c \cdot e^{t} \neq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$

$\left. \begin{array}{l} \varphi(t) = 1 + c \cdot e^{t} \\ \varphi'(t) = c \underset{>0}{e^{t}} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi$ γνησίως μον.,
Άρα η $\varphi$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο στο $[a, b]$, αν δεν μηδενίζεται στα άκρα a και b του διαστήματος.

3. Εξισώσεις του Riccati $a \leq t \leq b$

(+) $y'(t) = r(t) + p(t) \cdot y(t) + q(t) \cdot [y(t)]^2$.

Εξισώσεις αυτής της μορφής λέγονται Δ.Ε. του Riccati.

→ Ειδικές περιπτώσεις $q(t) = 0 \rightsquigarrow$ γραμμική Δ.Ε.
$r(t) = 0 \rightsquigarrow$ ΔΕ Bernoulli $\sigma = 2$

30 Γενικώς, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις.

· Έστω $y_\varepsilon$ μία ειδική λύση της Δ.Ε.

__Ισχυρισμός:__ Θέτοντας $y(t) = y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}$, η (+) ανάγεται σε γραμμική ως προς την $z$.

Έχουμε $y'(t) = y'_\varepsilon(t) - \frac{z'(t)}{[z(t)]^2}$.

Άρα $y'_\varepsilon(t) - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = r(t) + p(t) \cdot \left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right] + q(t) \cdot \left[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\right]^2$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left\{y'_\varepsilon(t) - r(t) - p(t) \cdot y_\varepsilon(t) - q(t) \cdot [y_\varepsilon(t)]^2\right\}}_{0} - \frac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t) =$$

Ξέρω ότι $y_\varepsilon(t)$ ειδική λύση. Άρα τα φέρνω όλα στο (α)' μέλος γιατί θα κάνει 0.

$$= p(t) \cdot \frac{1}{z(t)} + 2q(t) y_\varepsilon(t) \cdot \frac{1}{z(t)} + \frac{q(t)}{[z(t)]^2}$$

δηλαδή:

$$-\frac{1}{[z(t)]^2} \cdot z'(t) = [p(t) + 2q(t) y_\varepsilon(t)] \frac{1}{z(t)} + q(t) \cdot \frac{1}{[z(t)]^2}$$

ή $$-z'(t) = \underbrace{[p(t) + 2q(t) y_\varepsilon(t)]}_{\text{Τον ξέρουμε αυτόν τον όρο αφού } y_\varepsilon(t) \text{ λύση.}} z(t) + q(t)$$

Αυτή είναι γραμμική Δ.Ε.

__Παράδειγμα:__

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2 \qquad 1 \le t \le 2.$$

Δίνεται $y_\varepsilon(t)=\frac{1}{t}$ ειδική λύση.

Λύση /→ Μπορούμε κι εδώ να θυμόμαστε απλά όλους τους τύπους!

$$y(t)=y_\varepsilon(t)+\frac{1}{z(t)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{z(t)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t)=-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t)$$

Άρα

$$-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{z(t)}\right]-\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{z(t)}\right]^2$$

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t)=\cancel{\frac{1}{t^2}}-\cancel{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{z(t)}-\cancel{\frac{1}{t^2}}-\frac{2}{t}\frac{1}{z(t)}-\frac{1}{[z(t)]^2}\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{[z(t)]^2}\cdot z'(t)=-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{z(t)}-\frac{1}{[z(t)]^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -z'(t)=-\frac{3}{t}z(t)-1\Leftrightarrow z'(t)=\frac{3}{t}z(t)+1$$

$$\Leftrightarrow z'(t)-\frac{3}{t}z(t)=1\Leftrightarrow \overbrace{\frac{1}{t^3}z'(t)-\frac{3}{t^4}z(t)}^{*_1}=\frac{1}{t^3}$$

$*_1=\left(\frac{1}{t^3}z(t)\right)'$

Γρόπως κ' πριν ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι το ολοκλήρωμα του $y_\varepsilon$. Άρα:

$$\int\frac{1}{t}dt=\log t.$$

$$e^{-3\int\frac{1}{t}dt}=e^{-3\log t}=e^{-\log t^3}=e^{\log\frac{1}{t^3}}=\frac{1}{t^3}$$

$$\left(\frac{1}{t^3}\cdot z(t)\right)'=\frac{1}{t^3}\Rightarrow\frac{1}{t^3}z(t)=\int\frac{1}{t^3}dt=\int t^{-3}dt=$$

$$=\frac{t^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{2t^2}+c\Rightarrow z(t)=ct^3-\frac{t}{2}.$$

32.

Επομένως έχουμε,

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}} \qquad 1 \le t \le 2.$$

Για να είναι αυτή η συνάρτηση λύση πρέπει

$$ct^3 - \frac{t}{2} \neq 0 \quad , \quad t \in [1,2]$$

ή $ct^2 - \frac{1}{2} \neq 0 \quad t \in [1,2]$

$\phi(t) = ct^2 - \frac{1}{2} \qquad t \in [1,2]$.

$\phi'(t) = 2ct$ διατηρεί το πρόσημο.

$\Rightarrow \phi(t)$ μονότονη στο $[1,2]$.

~~Επομένως η $\phi(t)$ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$ αν δεν μηδενίζεται στα άκρα 1 και 2, δηλαδή~~

$$\cancel{c \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \neq 0 \text{ και } c \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \neq 0.}$$

$$\cancel{\text{ή } c \neq \frac{1}{2} \text{ και } c \neq \frac{1}{8}}$$

(λάθος συλλογισμού)

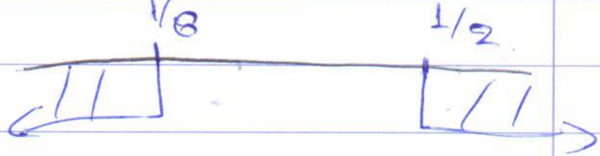
Πρέπει το c να είναι τέτοιο ώστε αρχικώς

$$ct^2 - \frac{1}{2} \neq 0 \text{ για } t=1 \text{ και } t=2.$$

• $ct^2 - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow c \cdot 1^2 - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow c > \frac{1}{2}$

$c > 0$

•• $ct^2 - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$




• $c \le 0$ ✓

• $c > 0 \quad c2^2 - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow c - \frac{1}{8} < 0 \Rightarrow c < \frac{1}{8}$

αφού είναι αύξουσα αν είναι αρνητική στο 2 επαρκεί.

Άσκηση 1.5 $f:[\alpha,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\|\cdot\|$ Ευκλείδεια νόρμα

$\exists L \geq 0 \quad \forall t\in[\alpha,b] \quad \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$:

$$\|f(t,x)-f(t,\tilde{x})\| \leq L\,\|x-\tilde{x}\|$$

ΝΔΟ

$$\|y(t)-z(t)\| \leq e^{L(t-\alpha)}\,\|y_0-z_0\|$$

Απόδειξη

$\varepsilon(t) := y(t)-z(t)$.

$\varepsilon'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon'(t),\varepsilon(t)) = (f(t,y(t))-f(t,z(t)),\ \varepsilon(t))$

$$(\varepsilon'(t),\varepsilon(t)) = \underbrace{\varepsilon_1'(t)\,\varepsilon_1(t)}_{\frac{1}{2}((\varepsilon_1(t))^2)'} + \underbrace{\varepsilon_2'(t)\cdot\varepsilon_2(t)}_{\frac{1}{2}((\varepsilon_2(t))^2)'} + \dots + \underbrace{\varepsilon_m'(t)\,\varepsilon_m(t)}_{\frac{1}{2}((\varepsilon_m(t))^2)'} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\varepsilon_1(t))^2 + (\varepsilon_2(t))^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2\right]' =$$

$$= \frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)'$$

Επομένως

$$\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq \underbrace{\|f(t,y(t))-f(t,z(t))\|}_{\leq L\|y(t)-z(t)\|}\cdot\|\varepsilon(t)\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq L\cdot\|\varepsilon(t)\|^2$$

Με $\phi(t) = \|\varepsilon(t)\|^2$ έχουμε

34. ~~Με $\phi(t)$:~~

$\frac{1}{2}\phi'(t) \leq L\phi(t) \Rightarrow \phi'(t) - 2L\phi(t) \leq 0 \Rightarrow (e^{-2L}\phi(t))' \leq 0$

$\Rightarrow e^{-2Lt}\phi(t) \leq e^{-2La}\phi(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(t) \leq e^{2L(t-a)}\phi(a) \Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \leq e^{2L(t-a)}\|y_0 - z_0\|^2$

Άσκηση 1.10 $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\|\cdot\|$ Ευκλείδια νόρμα.

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \leq 0.$

ΝΔΟ $\|y(t) - z(t)\| \leq \cancel{e^{L(t-a)}}\|y_0 - z_0\|$

Απόδειξη

$\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = \underbrace{(f(t,y(t)) - f(t, z(t)), \varepsilon(t))}_{\leq 0}$

$(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) = \cdots$ όπως πριν.

Επομένως $\frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\varepsilon(t)\|^2 \leq \|\varepsilon(a)\|^2 \quad \forall t \in [a,b]$

$\Rightarrow \|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$

**Άσκηση 1.9** (αναφέρεται σε εξισώσεις)

$$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

$$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq \nu (y_1 - y_2)^2$$

<u>ΝΔΟ</u>

$$|y(t) - z(t)| \leq e^{\nu(t-a)} |y_0 - z_0|$$

<u>Απόδειξη</u>

$\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$

$\varepsilon'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$

$$\varepsilon(t)\,\varepsilon'(t) = \underbrace{[f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \cdot [y(t) - z(t)]}_{\leq \nu\, \underbrace{|y(t) - z(t)|^2}_{|\varepsilon(t)|^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left( (\varepsilon(t))^2 \right)' \leq \nu (\varepsilon(t))^2$$

Με $\phi(t) = (\varepsilon(t))^2$ έχουμε $\phi'(t) \leq 2\nu\phi(t)$

Άρα $\phi'(t) - 2\nu\phi(t) \leq 0 \Rightarrow \left( e^{-2\nu t} \phi(t) \right)' \leq 0$ δηλ. είναι

$\Rightarrow e^{-2\nu t}\phi(t) \leq e^{-2\nu a} \cdot \phi(a) \quad \forall t \in [a,b]$. $\to$ φθίνουσα

$\Rightarrow \phi(t) \leq e^{2\nu(t-a)} \phi(a) \Rightarrow (\varepsilon(t))^2 \leq e^{2\nu(t-a)} (y_0 - z_0)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{\nu(t-a)} |y_0 - z_0|$

36. SOS

## Άσκηση 1.12 Ανισότητα του Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή.

$\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\geq 0$.

Αν ισχύει

$$\phi(t)\leq \alpha+\beta\int_0^t \phi(s)\,ds \quad \forall t\in[0,T], \text{ τότε}$$

$$\phi(t)\leq \alpha e^{\beta t} \quad \forall t\in[0,T]$$

### Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε για τη συνάρτηση $\psi(t)=(\alpha+\varepsilon)e^{\beta t}$ $t\in[0,T]$ ισχύει

(*) $\psi(t)=\alpha+\varepsilon+\beta\int_0^t \psi(s)\,ds \quad \forall t\in[0,T]$

↳ Απόδειξη της (*)

$$\alpha+\varepsilon+\beta\cdot\int_0^t \psi(s)\,ds=\alpha+\varepsilon+\beta\int_0^t \underbrace{(\alpha+\varepsilon)}_{\text{είναι αριθμός}}\cdot e^{\beta s}\,ds=$$

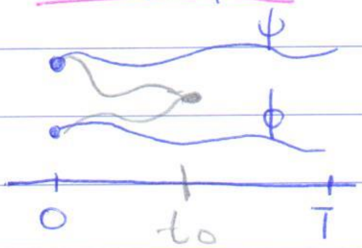
$$=\alpha+\varepsilon+\beta\cdot(\alpha+\varepsilon)\underbrace{\int_0^t e^{\beta s}\,ds}_{\text{με αλλαγή μεταβλητής }=\frac{1}{\beta}[e^{\beta t}-e^{\beta\cdot 0}]}=\cancel{\alpha+\varepsilon}+(\alpha+\varepsilon)(e^{\beta t}\cancel{-1})=$$

$$=(\alpha+\varepsilon)e^{\beta t}=\psi(t) \quad \blacksquare$$

Ισχυρισμός: $\forall t\in[0,T]$ $\phi(t)<\psi(t)$

αντικατάσταση $t=0$

$\phi(0)\leq\alpha<\alpha+\varepsilon=\psi(0)$




αυτό σημαίνει
$\phi(t)<(\alpha+\varepsilon)\cdot e^{\beta t}$
$\Rightarrow \phi(t)\leq \alpha e^{\beta t}$
~~[illegible]~~ αφού
αν $\gamma<\delta+\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$
$\Rightarrow\gamma\leq\delta$

Έστω $t_0$ ο μικρότερος αριθμός τ.ω.

$\phi(t_0)=\psi(t_0)$ και $\phi(t)<\psi(t)$ $\forall t\in[0,t_0)$

Θα αποδείξουμε ότι $\phi(t_0)<\psi(t_0)$ για να δείξουμε ότι η ισότητα $\psi(t_0)=\phi(t_0)$ είναι άτοπη

Έχουμε $\phi(t_0) \le a + b\int_0^{t_0}\phi(s)\,ds < a + b\int_0^{t_0}\psi(s)\,ds$

$$< a+\varepsilon + b\cdot\int_0^{t_0}\psi(s)\,ds = \psi(t_0)$$

Άτοπο αφού υπέθεσα ότι είναι ίσα

Συμπέρασμα: τέτοιο $t_0$ ∄ οπότε $\phi(t)<\psi(t)\ \forall t\in[0,T]$


$\phi(t)=c\cdot t^2 - 1/2$.

Για ποιες τιμές του $c$ δεν μηδενίζεται η $\phi$ σε κανένα σημείο του $[1,2]$.

• 1η Περίπτωση: $c\le 0 \Rightarrow \phi(t)\le -\frac{1}{2}$.

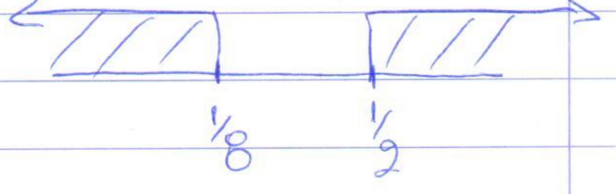
Άρα η $\phi$ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$

• 2η Περίπτωση: $c>0$, $\phi'(t)=2ct>0$
$\Rightarrow \phi$ αύξουσα.

Τότε η $\phi$ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$ αν $\phi(1)>0$ ή $\phi(2)<0$, δηλαδή

$c-\frac{1}{2}>0$ ή $4c-\frac{1}{2}<0$ δηλαδή

$c>\frac{1}{2}$ ή $c<\frac{1}{8}$




## 4. Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

(*) $y'(t) = \dfrac{g(t)}{f(y(t))}$

Υπόθεση: $f(y(t))$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο ενός διαστήματος $I$.

38. Τότε η (*) γράφεται στη μορφή

$$f(y(s)) \cdot y'(s) = g(s)$$

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $a$ στο $I$ και ολοκληρώνουμε από $a$ μέχρι $t$ με $t \in I$, και έχουμε:

$$\int_a^t f(y(s)) \cdot y'(s)\, ds = \int_a^t g(s)\, ds$$

Υποθέτουμε ότι η $y$ είναι γνησίως μονότονη στο $I$ και με την αλλαγή μεταβλητής $\tau := y(s)$ έχουμε

$$\int_{y(a)}^{y(t)} f(\tau)\, d\tau = \int_a^t g(s)\, ds$$

Έστω $F$ και $G$ παράγουσες (αόριστα ολοκληρώματα) των $f$ και $g$, αντίστοιχα, δηλαδή $F' = f$ κ' $G' = g$. Τότε

$$(+) \quad F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(a)$$

• 1η Περίπτωση: Αν μας έχει δοθεί η αρχική τιμή $y(a)$, τότε η (+) είναι μία εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση $y(t)$.

• 2η Περίπτωση: Διαφορετικά, θέτουμε

$c := F(y(a)) - G(a)$, αυθαίρετη σταθερά και η (+) γράφεται στη μορφή

$$F(y(t)) = G(t) + c$$

**Παράδειγμα:** $e^{y(t)}y'(t) = t+t^3$

Λύση

Για σταθεροποιημένο α έχουμε:

$$\int_a^t e^{y(s)}y'(s)ds = \underbrace{\int_a^t (s+s^3)ds}_{\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}}$$

Θέτω $\tau = y(s)$, $d\tau = y'(s)ds$

$$\underbrace{\int_{y(a)}^{y(t)} e^{\tau}d\tau}_{e^{y(t)}-e^{y(a)}} = \frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}$$

$$e^{y(t)} = \frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+\underbrace{\left[e^{y(a)}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right]}_{c}$$

$$e^{y(t)} = \frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+c$$

Για κάποιο σταθερό $c$, αυτή η σχέση έχει νόημα για $t$ τ.ω:

$$\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+c>0$$

Τότε $\boxed{y(t) = \log\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+c\right)}$

40. ## 5. Ομογενείς Δ.Ε.

άλλο είναι οι ομογενείς γραμμικές εξισώσεις για τις οποίες ισχύει: $y'(t)=p(t)\,y(t)+\cancel{q(t)}$

Αυτές είναι οι εξισώσεις της μορφής: $y'(t)=g\left(\frac{y(t)}{t}\right)$

·Έστω f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(t,y)$. Αυτή λέγεται ομογενής βαθμού ν., αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(\lambda t,\lambda y)=\lambda^{\nu} f(t,y) \qquad \forall \lambda, t, y \in \mathbb{R}$$

·Έστω M και N ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ν.

Ισχυρισμός: Η συνάρτηση $f(t,y):=-\frac{M(t,y)}{N(t,y)}$ είναι ομογενής βαθμού μηδέν.

$$f(\lambda t,\lambda y)=-\frac{M(\lambda t,\lambda y)}{N(\lambda t,\lambda y)}=-\frac{\lambda^{\nu} M(t,y)}{\lambda^{\nu} N(t,y)}=$$

$$=-\lambda^{0}\frac{M(t,y)}{N(t,y)}=\lambda^{0} f(t,y)$$

$$y'(t)=f(t,y(t))$$

→ Υπόθεση: Η f ομογενής βαθμού μηδέν.

$$y'(t)=-\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$$

$$M(t,y)\,dt+N(t,y)\,dy=0.$$

$$f(t,y)=t^{0} f\left(1,\frac{y}{t}\right)$$

$$\underbrace{f\left(1\cdot t,\frac{y}{t}t\right)}_{f(t,y)}=t^{0} f\left(1,\frac{y}{t}\right)=g\left(\frac{y}{t}\right)$$

Θέτω $v(t) := \frac{y(t)}{t}$ $t \neq 0$.

Έχω $y(t) = t \cdot v(t)$ οπότε $y'(t) = v(t) + t\,v'(t)$
η Δ.Ε γράφεται στη μορφή: $v(t) + t\,v'(t) = g(v(t))$

(*) $t\,v'(t) = g(v(t)) - v(t)$

Η (*) είναι Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές.
Αν την επιλύσω βρίσκω την v οπότε από τη σχέση: $y(t) = t \cdot v(t)$ προκύπτει η λύση της αρχικής.

Από την (*) έχω:

$$\frac{v'(s)}{g(v(s)) - v(s)} = \frac{1}{s}$$ υπό την προϋπόθεση ότι

$g(v(t)) - v(t) \neq 0 \quad \forall t$.

→ Σταθεροποιώ ένα σημείο α και ολοκληρώνω.

$$\int_a^t \frac{v'(s)}{g(v(s)) - v(s)}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$

(για να έχει νόημα το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος πρέπει $at > 0$)

με αλλαγή μεταβλητής $\tau := v(s)$

$$\Leftrightarrow \int_a^t \frac{1}{g(\tau) - \tau}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$$

→ Αν G μία παράγουσα της $\frac{1}{g(\tau)-\tau}$ τότε παίρνω με:

42. $(+)\quad G(v(t)) - G(a) = \log|t| - \log|a|$

Οπότε βρίσκω την $G(v(t))$ ▸ Αν έχει προκαθοριστεί η $y(a)$ τότε ξέρω την $G(a)$.
Είναι μία αλγεβρική εξίσωση ως προς $v(t)$. Αν μπορούμε να την επιλύσουμε βρίσκαμε την $v(t)$ οπότε και την $y(t)$ από τη σχέση:
$y(t) = t \cdot v(t)$

Αν δεν έχει προκαθοριστεί η $y(a)$ γράφω την $(+)$ στη μορφή $G(v(t)) = \log|t| + \underbrace{G(v(a)) - \log|a|}_{c}$

$G(v(t)) = \log|t| + c$ όπου $c$ αυθαίρετη σταθερά.

▸ Παράδειγμα: $y'(t) = \dfrac{(y(t))^2 + 2t\,y(t)}{t^2}$

• $M(t,y) := (y(t))^2 + 2t\,y(t)$ ομογενής $2^{ου}$ βαθμού, αφού:
$M(\lambda t, \lambda y) = (y(t\lambda))^2 + 2t\lambda\, y(\lambda t) =$
$= \lambda^2 (y(t))^2 + \lambda^2 2t\,y(t) = \lambda^2 \left[(y(t))^2 + 2t\,y(t)\right]$

• $N(t,y) = t^2$

$y'(t) = \dfrac{(y(t))^2}{t^2} + \dfrac{2y(t)}{t}$ ομογενής Δ.Ε.

Λύση.

Θέτω $v(t) := \dfrac{y(t)}{t}$ και έχω $y(t) = t \cdot v(t)$
οπότε:
$y'(t) = v(t) + t \cdot v'(t)$

Αντικαθιστώ στην $y'(t) = \frac{(y(t))^2}{t^2} + 2\,\frac{y(t)}{t}$ οπότε γράφεται στη μορφή.

$$v(t) + t\cdot v'(t) = (v(t))^2 + 2v(t)$$

$$\Rightarrow t\cdot v'(t) = [v(t)]^2 + v(t) \quad (**)$$

* Βρίσκω πρώτα τις ιδιάζουσες λύσεις:

Έχω $(v^*)^2 + v^* = 0 \Rightarrow v^* = 0$ ή $v^* = -1$.

Άρα $y(t)=0$ και $y(t)=-1$

* Μη ιδιάζουσες:

Υποθέτω ότι $v(t) \neq 0$ και $v(t) = -1 \ \forall t$

Τότε η $(**)$ γράφεται στη μορφή $\frac{v'(s)}{[v(s)]^2 + v(s)} = \frac{1}{s}$ οπότε:

$$\Leftrightarrow \int_a^t \frac{v'(s)}{[v(s)]^2 + v(s)}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds \underset{\tau = v(s)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau^2+\tau}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$$

Ας βρούμε το ολοκλήρωμα $\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau^2+\tau}\,d\tau = \log|t| - \log|a|$

$$\frac{1}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau}\,d\tau}_{=} - \underbrace{\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau}_{=} = \log|t| - \log|a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|v(t)| - \log|v(a)| - \left(\log|v(t)+1| - \log|v(a)+1|\right) = \log|t| - \log|a| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log|v(t)| - \log|v(t)+1| = \log|t| - \underbrace{\left(\log|a| + \log|v(a)| - \log|v(a)+1|\right)}_{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left|\frac{v(t)}{v(t)+1}\right| = \underbrace{\log|t| + \log|c|}_{\log c\cdot t} \Leftrightarrow \frac{v(t)}{v(t)+1} = c\cdot t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(t) = \frac{c\cdot t}{1-ct} \quad \text{Άρα } y(t) = \frac{ct^2}{1-ct} \text{ με } \boxed{1-ct \neq 0 \Rightarrow t \neq \frac{1}{c}}$$

## 6. Πλήρεις Δ.Ε.

$$(*)\ y'(t) = -\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$$

Η παραπάνω διαφορική λέγεται πλήρης αν $\exists$ συνάρτηση $f(t,y)$:

$$(**)\ \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \text{ κ' } \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = N(t,y)$$

- Αν η $(*)$ είναι πλήρης τότε παίρνω την παράγωγο της $f$ ως προς $t$: $\frac{\partial f(t,y(t))}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial f(t,y(t))\,y'(t)}{\partial y} =$

$$= M(t,y(t)) + N(t,y(t))\cdot y'(t) \overset{(*)}{=} 0$$

Άρα $f(t,y(t)) = c$ $(+)$ για κάποια σταθερά $c$. Για δεδομένη τιμή της σταθεράς $c$ η $(+)$ είναι αλγεβρική εξίσωση ως προς $y(t)$.

Αν μπορώ να τη λύσω βρίσκω την $y(t)$.

??→ Ερωτήματα:

1) Πότε $\exists$ η $f$ που ικανοποιεί την $(**)$?

2) Πώς προσδιορίζουμε μια τέτοια συνάρτηση?

Απαντήσεις

1ο Θέλω $\frac{\partial f}{\partial t} = M$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ → Αν είναι 2 φορές παρ/μη και ομαλή ξέρω ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}$

→ Υποθέτω λοιπόν ότι οι $M, N$ είναι αρκετά ομαλές συναρτήσεις, οπότε: $\frac{\partial f}{\partial t} = M \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} = M_y$

και $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = N_t$.

Ισχυρισμός: η (**) ικανοποιείται αν $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$

2ο Αν η εξίσωση είναι πλήρης πώς μπορούμε να βρούμε μία τέτοια $f$?

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) \Rightarrow \boxed{f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y)} \quad (1)$$

Αυτή είναι μία αυθαίρετη ομαλή συνάρτηση

Προφανώς κάθε $f$ αυτής της μορφής ικανοποιεί την:
$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y)$

Επιπλέον έχω: $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \int \underbrace{M_y(t,y)}_{= N_t(t,y) \text{ από υπόθεση.}} dt + g'(y) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)}_{= N(t,y)} = \int N_t(t,y)\,dt + g'(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(y) = N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g(y) = \int \left[ N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \right] dy + c} \quad (2)$$

Από ①,② $\Rightarrow f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \int \left[N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt\right] dy + c$

## Παράδειγμα

$$y'(t) = -\frac{e^{y(t)}}{t e^{y(t)} + 2y(t)}$$

Είναι πλήρης διότι:

$$\left.\begin{array}{l} M(t,y) = e^y \\ N(t,y) = te^y + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^y$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = e^y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

→ Ζητούμε να βρούμε 1 συνάρτηση $f$ : $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)$

Δηλαδή:

$$\Rightarrow \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} = e^y \Rightarrow f(t,y) = \int e^y dt + g(y) = te^y + g(y)$$

με αυθαίρετη $g$.

### Λύση

Παραγωγίζω την $f$ ως προς $y$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = te^y + g'(y) \quad \text{οπότε}$$

$$\cancel{te^y} + g'(y) = N(t,y) \quad \text{δηλαδή} = \cancel{te^y} + 2y$$

$$\Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + c$$

Άρα $f = t\cdot e^y + g(y) = t\cdot e^y + y^2 \underbrace{+c}$
όχι απαραίτητη.

Πώς βρίσκουμε τώρα την $y$;

$$f(t, y(t)) = c \quad \text{ή} \quad t\cdot e^{y(t)} + [y(t)]^2 = c. \quad (3)$$
με $c$ αυθαίρετη σταθερά.

Αυτή η σχέση (3) μας δίνει την $y$ σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή.

## Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής

**Άσκηση 1.3.** Ασκήσεις σημειώσεων ιστοσελίδας!
όχι από 1ο κεφάλαιο βιβλίου..!

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2 & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η Δ.Ε είναι εξίσωση του Bernoulli με $\sigma = 2$.
Την επιλύσαμε στο Παράδειγμα 1.3 και η λύση της είναι

(*) $y(t) = \dfrac{1}{c \cdot e^t + 1}$ με $c \in \mathbb{R}$, εκεί που $c \cdot e^t + 1 \neq 0$.

α) Η (*) είναι λύση της Δ.Ε στο διάστημα $[1,2]$, ανν είτε $c < -\dfrac{1}{e}$ είτε $c > -\dfrac{1}{e^2}$

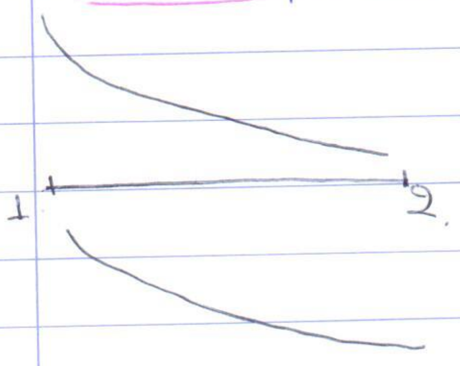
**Λύση**

* Θέλουμε η $y(t) = \dfrac{1}{ce^t + 1}$ να είναι καλά ορισμένη στο $[1,2]$, δηλαδή $ce^t + 1 \neq 0$.

Θέτουμε $\phi(t) = ce^t + 1$.

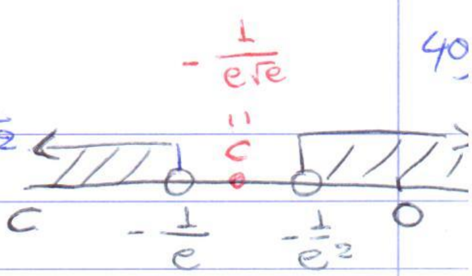
1η περίπτωση: $c \ge 0$. Τότε $\phi(t) \ge 1 \ \forall t \in [1,2]$ οπότε η (*) είναι λύση της Δ.Ε. στο $[1,2]$.

2η περίπτωση: $c < 0$. Τότε η $\phi$ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η $\phi$ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$, ανν είτε $\phi(1) < 0$ είτε $\phi(2) > 0$




Τώρα
$\phi(1) < 0 \Leftrightarrow c \cdot e + 1 < 0 \Leftrightarrow$

$$\phi(2) > 0 \iff c\cdot e^2 + 1 > 0 \iff c > -\frac{1}{e^2}$$




β) Αν $y_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$ Νδό το πρόβλημα δεν έχει λύση.
$y(t) \to \infty$, $t \uparrow 3/2$

στο $3/2$ η λύση πηγαίνει στο $\infty$.

Λύση

$$y(1) = y_0 \iff \frac{1}{c\cdot e+1} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \iff c\cdot e\sqrt{e} + \cancel{\sqrt{e}} = \cancel{\sqrt{e}} - 1$$

$$\iff c = -\frac{1}{e\sqrt{e}}$$

όπου τος βρίσκεται ανάμεσα στα $-\frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e^2}$ όπου από (α) ερώτημα δν υπάρχει λύση εκεί.

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e\sqrt{e}}e^t} = \frac{1}{1-e^{t-\frac{3}{2}}} \to \infty, \quad t \uparrow 3/2.$$

Για $t < \frac{3}{2}$ $\quad e^{t-\frac{3}{2}} < 1$.

γ) $y = ;$ για $y_0 = -1$.

$$y(1) = y_0 \iff \frac{1}{ce+1} = -1 \iff 1 = -ce - 1 \iff c\cdot e = -2 \iff$$
$$\iff c = -\frac{2}{e}$$

Άρα:

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{2}{e}e^t} = \frac{1}{1-2e^{t-1}}$$

Ισχυρισμός: $1 - 2\cdot e^{t-1} \neq 0 \quad t \in [1,2]$

$$1 \neq 2\underbrace{e^{t-1}}_{\geq 1}$$

50. Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί την $y$ στο μέγιστο δυνατό ανοιχτό διάστημα I.

Η Δ.Ε είναι εξίσωση του Bernoulli με $\sigma=2$.

Λύση.

*→ Για την επίλυση της Δ.Ε:

Θέτουμε $u(t) = [y(t)]^{1-\sigma} = \frac{1}{y(t)}$

Έχουμε $u'(t) = -\frac{1}{[y(t)]^2} \cdot y'(t)$ οπότε η Δ.Ε.

γράφεται στη μορφή:

$-[y(t)]^2 u'(t) = y(t) - [y(t)]^2$ /→ Διώχνω τα y.

Υποθέτω $y(t) \neq 0$.

Διαιρώντας δια $[y(t)]^2$ παίρνουμε:

$-u'(t) = \underbrace{\frac{1}{y(t)}}_{=u(t)} - 1 \iff \underbrace{u'(t) + u(t) = 1}_{\text{γραμμική Δ.Ε}} \iff$

$\iff (e^t u(t))' = e^t \iff e^t u(t) = e^t + c \iff$

$\iff u(t) = 1 + c \cdot e^{-t}$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-t}} \leftarrow *$$

Τώρα $y(0) = 2 \iff \frac{1}{1+c} = 2 \iff c = -\frac{1}{2}$.

Άρα $y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-t}}$

Έχουμε $1-\frac{1}{2}e^{-t}=0 \Leftrightarrow e^{-t}=2 \Leftrightarrow -t=\log 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t=-\log 2$.

Άρα η y είναι λύση στα διαστήματα $(-\infty,-\log 2)$ και $(-\log 2,\infty)$

Επειδή το 0 πρέπει να ανήκει στο διάστημα συμπεραίνουμε ότι $I=(-\log 2,\infty)$

* Δν μπορούμε να πούμε ότι η λύση είναι $\mathbb{R}-\{\log 2\}$.
Δν έχει νόημα, πρέπει να ανήκει σε ένα διάστημα.

## Πλήρεις (ακριβείς) Δ.Ε.

(*) $y'(t)=-\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ με M και N ομαλές συναρτήσεις τ.ω: $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}}$ (+)

Τότε υπάρχει συνάρτηση $f(t,y)$: $\frac{\partial f}{\partial t}=M$ κ' $\frac{\partial f}{\partial y}=N$

Οι λύσεις της (*) δίνονται στη μορφή:
$f(t,y(t))=c$, $c\in\mathbb{R}$.

## Δ.Ε. που ανάγονται σε πλήρεις

Έστω $y'(t)=-\frac{M(t,y(t))}{N(t,y(t))}$ Δ.Ε. που δεν είναι πλήρης.

Ερώτημα. 1) Υπάρχει συνάρτηση $\mu(t,y)$ τ.ω. η

52 ΔΕ (**) $y'(t) = -\dfrac{\mu(t,y(t))\, M(t,y(t))}{\mu(t,y(t))\, N(t,y(t))}$ να είναι πλήρης;

2) Μπορούμε να προσδιορίσουμε τέτοια μ;

• Αν υπάρχει τέτοιο μ, λέγεται ολοκληρωτικός παράγοντας.

▶ Απάντηση Ερωτήματος:

1) Η (**) είναι πλήρης αν $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

ή

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

ή

$$N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right)$$

ή

(++) $$\frac{1}{\mu} \left( N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

2) Η επίλυση της (++) είναι πολύ πιο δύσκολη από την επίλυση της αρχικής εξίσωσης!!

■ Ειδικές περιπτώσεις: Ζητούμε ολοκληρωτικούς παράγοντες $\mu(t)$ ή $\mu(y)$

→ 1η περίπτωση: $\mu = \mu(t)$

Τότε η (++) γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}\cdot N = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

ή $$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \quad (***)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να ισχύει αν η $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$

είναι ανεξάρτητη του y.

Τότε η (***) είναι γραμμική Σ.Δ.Ε. και μια λύση της είναι

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \cdot dt}$$

→ 2η περίπτωση $\mu = \mu(y)$

Τότε η (++) γράφεται στη μορφή:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}$$ → Αν ανεξάρτ. του t.

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M} dy}$$

▶ Παράδειγμα. $y'(t) = -\dfrac{y(t)}{t^2 y(t) - t}$

$M(t,y) = y$

$N(t,y) = t^2 y - t.$

Λύση

54. $\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1.$

Έχουμε $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$ άρα η εξίσωση δεν είναι πλήρης.

Η συνάρτηση $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}(t,y) = \frac{1-[(2ty)-1]}{t^2y-t} = -\frac{2}{t}$

ανεξάρτητη του $y$.

Επομένως υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t)$. ($\nexists$ ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(y)$)

Άρα σύμφωνα με την $(***)$ έχουμε:

$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = -\frac{2}{t}$ δηλαδή $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = -\frac{2}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log|\mu(t)| = -2\log|t| = \log\frac{1}{t^2}$

$\Rightarrow \mu(t) = \pm\frac{1}{t^2}$

Επιλέγουμε $\mu(t) = \frac{1}{t^2}$ (τυχαία επιλογή) Δν έχει σημασία.

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή στο δεξιό μέλος επί $\frac{1}{t^2}$ παίρνουμε:

$$y'(t) = -\frac{\frac{y(t)}{t^2}}{y(t)-\frac{1}{t}}$$

$M(t,y) = \frac{y}{t^2}$, $N(t,y) = y - \frac{1}{t}$.

– Ζητείται μία $f$ τ.ω. $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = M(t,y) = \frac{y}{t^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t,y) = \int \frac{y}{t^2}\,dt + g(y) = -\frac{y}{t} + g(y)$$

Τώρα $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -\frac{1}{t} + g'(y) = N(t,y) = y - \frac{1}{t}$

$\Rightarrow g'(y) = y \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} + c.$

Άρα $f(t,y) = -\frac{y}{t} + \frac{y^2}{2} + c.$

Συμπέρασμα: Οι λύσεις $y(t)$ της Δ.Ε δίνονται από τη σχέση $f(t,y(t))=0$ ή $-\frac{y(t)}{t} + \frac{[y(t)]^2}{2} + c = 0$

με $c \in \mathbb{R}$.

7. Γραμμικά συστήματα Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. (σελ 24-36 σημειώσεις ιστοσελίδας)

Βαθμωτή περίπτωση:

$$(*) \begin{cases} y'(t) = p(t)\cdot y + q(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $p, q \in C[a,b]$.

Το πρόβλημα έχει μοναδική λύση και αυτή δίνεται από την παράσταση

$$(**)\ y(t) = e^{\int_a^t p(s)ds} + \int_a^t q(s)\cdot e^{\int_s^t p(\tau)d\tau}\,ds,$$

$a \le t \le b$.

56. Συστήματα:

$$(+)\quad \begin{cases} y'(t) = A(t)\cdot y(t) + f(t) \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases} \qquad a\le t\le b.$$

$y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$
$f: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ συνεχής
$A: [a,b] \to \mathbb{R}^{m,m}$.

→ 1ο ερώτημα: Τι μπορούμε να πούμε για ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης;

Απάντηση: Θετική (ικανοποιείται η συνθήκη του Lipschitz)

→ 2ο ερώτημα: Μπορούμε να παραστήσουμε τη λύση σε μορφή ανάλογη της (**)

Απάντηση: Γενικά αρνητική!

↳ Καταφατική αν οι πίνακες $A(t)$ και $A(s)$, $s,t\in[a,b]$ αντιμετατίθενται

π.χ. $A(t) = p(t)\cdot A$ με $p:[a,b]\to\mathbb{R}$.
ανεξ. του t.

Θα ασχοληθούμε με την ειδική περίπτωση $A(t) = A$ (ανεξ. του t).

$$\begin{cases} y'(t) = A\cdot y(t) + f(t) \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases} \qquad t\in[a,b].$$

• Το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} y'(t) = A\cdot y(t) \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

$$(++)\ \begin{cases} y'(t) = a\cdot y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$$

Λύση: $y(t) = e^{at}\cdot y_0$.

→ 1η προσπάθεια: Μήπως η λύση του $(++)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$(+++)\ y(t) = e^{\lambda t}\cdot y^{(0)}$ → το $y(t)$ είναι διάνυσμα αφού $e^{\lambda t}$ πολ/ται με το διάνυσμα $y^{(0)}$.

για κατάλληλο $\lambda\in\mathbb{C}$ τουλάχιστον σε κάποιες περιπτώσεις;

- Χπ.τγ $y^{(0)}\neq 0$.

Αρχική συνθήκη: $y(0) = e^{\lambda 0}\cdot y^{(0)} = y^{(0)}$ ✓

ικανοποιείται $\forall\lambda\in\mathbb{C}$

Σύστημα Δ.Ε.: $y'(t) = (e^{\lambda t})' y^{(0)} = \lambda\cdot e^{\lambda t} y^{(0)}$

$$A\cdot y(t) = A\cdot e^{\lambda t} y^{(0)} = e^{\lambda t}\cdot A\cdot y^{(0)}$$

Άρα $y'(t) = A\cdot y(t) \Leftrightarrow \lambda\cdot \cancel{e^{\lambda t}} y^{(0)} = \cancel{e^{\lambda t}}\cdot A\cdot y^{(0)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{A\cdot y^{(0)} = \lambda\cdot y^{(0)}}$ → Ξέρουμε ότι για διάνυσμα $x$ αν $Ax=\lambda x$ τότε $\lambda$ ιδιοτιμή του $A$ και το $x$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

Συμπέρασμα: Η $(+++)$ είναι λύση του $(++)$ αν το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $A$ και το $y^{(0)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

58.

Γενίκευση: Έστω το $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του A.

Δηλαδή, έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του A, $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)}$$

με $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$

Αν το $y^{(0)}$ και το A είναι πραγματικοί τότε παρόλο που τα x και τα c μπορεί να $\in \mathbb{C}$, το αποτέλεσμα είναι πάντα πραγματικό!

- Ισχυρισμός: Η λύση y του (++) είναι

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$$

Αρχική συνθήκη: $y(0) = c_1$

$$y(0) = c_1 \cancel{e^0} x^{(1)} + c_2 \cancel{e^0} x^{(2)} + \dots + c_m \cancel{e^0} x^{(m)} =$$
$$= c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_m x^{(m)} = y^{(0)}$$

Έχουμε

$$y'(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_m \lambda_m e^{\lambda_m t} x^{(m)}$$

$$A y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underbrace{A x^{(1)}}_{\lambda_1 x^{(1)}} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underbrace{A x^{(2)}}_{\lambda_2 x^{(2)}} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \underbrace{A x^{(m)}}_{\lambda_m x^{(m)}}$$

$$\Rightarrow y'(t) = A y(t)$$

• Για το πρόβλημα

$$(1) \begin{cases} y'(t) = A y(t) \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

* Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

→ Υπόθεση: ο A έχει n γραμμικοί ανεξάρτη-

τα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$
(με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

Τότε γράφουμε το $y^{(0)}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ (αφού αυτά αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$)

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

(Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τα $c_i$. Ο πίνακας συντελεστών $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ είναι αντιστρέψιμος (αφού οι στήλες του είναι γραμμ. ανεξ.),

Τότε σύμφωνα με τα προηγούμενα η λύση είναι:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x^{(1)} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} x^{(2)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x^{(n)} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ένας πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ανν η γεωμετρική $^{*1}$ και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής $\lambda$ του A συμπίπτουν.

$*_1$ αν $(A - \lambda I_n) x = 0$ οι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του x (το πλήθος τους) είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα.

Π.χ. αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους.

Γενική περίπτωση: Ο A δεν έχει αναγκαστικά n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

→ Κίνητρο:

$$\begin{cases} y'(t) = a\, y(t) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Λύση. $y(t)=e^{at}\cdot y_0$

Φυσιολογικό ερώτημα: Είναι η ② $y(t)=e^{tA}\cdot y^{(0)}$ λύση του ①;

1ο πρόβλημα: Τι σημαίνει $e^A$;

Ξέραμε

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^l}{l!}+\cdots \quad \text{για } z\in\mathbb{C}$$

Φυσιολογικός ορισμός:

$$e^A = \underbrace{I_n}_{A^0} + A + \frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^l}{l!}+\cdots = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{l!}$$

Ιδιότητες:
- $e^0 = I_n$
- $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda}\cdot I_n$
- $(e^{tA})' = A\cdot e^{tA}$

και $e^A\cdot e^B = e^{A+B}$ αν $AB=BA$.

→ Ισχυρισμός Η ② αποτελεί λύση του ①.

Αρχική συνθήκη $y(0)=e^{0A}\cdot y^{(0)} = e^0\cdot y^{(0)} = I_n\cdot y^{(0)} = y^{(0)}$

Σύστημα ΔΕ. $y'(t) = (e^{tA}\cdot y^{(0)})' = (e^{tA})' y^{(0)} = A\cdot e^{tA}\cdot y^{(0)} = A\cdot y(t)$.

βλ. σελ 65.

* Εκκρεμότητα: Πώς υπολογίζουμε το δεξιό μέλος της ②; *

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(a) = y^{(0)} \end{cases} \qquad y(t) = e^{(t-a)\cdot A}\cdot y^{(0)}$$

- Το μη-ομογενές σύστημα:

$$③ \begin{cases} y'(t) = A\cdot y(t) + f(t) \\ y(0) = y^{(0)}. \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Μεταβολή των σταθερών: $y(t) = e^{tA}\, u(t)$

Αρχική συνθήκη: $e^{0} u(0) = y^{(0)} \Leftrightarrow \boxed{u(0) = y^{(0)}}$

Σύστημα ΔΕ: $y(t) = e^{tA}\, u(t)$

$$\Rightarrow y'(t) = (e^{tA})'\, u(t) + e^{tA}\, u'(t) = A\cdot e^{tA} u(t) + e^{tA} u'(t) = \\ = A\cdot y(t) + e^{tA}\, u'(t)$$

Το σύστημα ΔΕ ③ ικανοποιείται ανν $e^{sA} u'(s) = f(s)$

Άρα:

$$u'(s) = e^{-sA}\cdot f(s) \Rightarrow \underbrace{\int_0^t u'(s)\,ds}_{u(t)-u(0)} = \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

$$u(t) = y^{(0)} + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds$$

Συμπέρασμα: $y(t) = e^{tA} y^{(0)} + e^{tA}\int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds =$

$$= e^{tA} y^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds$$

* Αν έχω αρχική τιμή σε ένα σημείο α, αντί για το 0:

$$y(t) = e^{(t-a)A} y^{(0)} + \int_a^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds.$$

69. Άσκηση 1.5 $\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2 & 1 \le t \le 2 \\ y(1) = y_0 \end{cases}$

Την $y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2$ την είχαμε λύσει στο παράδειγμα 1.4, με λύση την $y(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}}$ με $c \in \mathbb{R}$

α) Νδο για $y_0 = 5$ το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ακριβέστερα $y(t) \to \infty$ $t \uparrow \sqrt{2}$

$y(1) = 5 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}$.

Άρα $y(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{1}{4}t^3 - \frac{t}{2}} = \frac{1}{t} - \frac{4}{t^3 - 2t} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t(2-t^2)}$

λύση στ $[1, \sqrt{2})$ ⊢▸ αφού οι παρονομαστές $t \neq 0$ με $0 \notin$ στο διάστημα $[1,2]$ και $t(2-t^2)$ μηδενίζεται στο $\sqrt{2}$ άρα το διάστημα της λύσης είναι $[1, \sqrt{2})$

Τώρα $y(t) \to \infty$, $t \uparrow \sqrt{2}$.

Συμπέρασμα $\nexists$ λύση (σε όλο το διάστημα).

β) $y_0 = 3$ Να προσδιορίσουμε τη λύση. ⊢▸ πρέπει να βρούμε κατάλληλο c.

$y(1) = 3 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{c - \frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{t}$$

Καλώς ορισμένη λύση για $t \in [1,2]$.

Άσκηση 1.6: $y'(t) = \dfrac{1+[y(t)]^2}{2t\,y(t)}$ ← πρέπει στο τέλος να ελέγξω αν $t \neq 0$ κ' $y(t) \neq 0$?

Ζητείται η γενική λύση (σε πεπλεγμένη μορφή).

## Λύση

$$y'(t) = \frac{1+[y(t)]^2}{2t\,y(t)} \iff \frac{2y(t)}{1+[y(t)]^2}\cdot y'(t) = \frac{1}{t}.$$

Εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών.

Σταθεροποιούμε ένα σημείο α και ολοκληρώνουμε από α έως t,

$$\int_\alpha^t \frac{2y(s)}{1+[y(s)]^2}\cdot y'(s)\,ds = \int_\alpha^t \frac{1}{s}\,ds.$$

Με $\tau := [y(s)]^2$ έχουμε:

•κανονικά η αλλαγή μεταβλητής είναι $\tau := y(s)$ αλλά εδώ παρατηρούμε ότι μας βολεύει το $[y(s)]^2$.

$$\int_{[y(\alpha)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\,d\tau = \int_\alpha^t \frac{1}{s}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left[[y(t)]^2+1\right] - \log\left[[y(\alpha)]^2+1\right] = \log|t| - \log|\alpha| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left[[y(t)]^2+1\right] = \log|t| + \underbrace{\log[y(\alpha)]^2 - \log|\alpha|}_{\log|c|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left\{[y(t)]^2+1\right\} = \log|ct| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y(t)]^2 + 1 = |c\cdot t| \Rightarrow [y(t)]^2 = \underbrace{|ct|-1}_{>0} \Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{|ct|-1}$$

Άσκηση 1.7 $y'(t) = \dfrac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$

Γενική λύση (σε πεπλεγμένη μορφή).

Λύση

$$y'(t) = \frac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)} \iff \{[y(t)]^3 - y(t)\} \cdot y'(t) = 2t-1 \iff$$

$$\Rightarrow \int_a^t \{[y(s)]^3 - y(s)\} \cdot y'(s)\, ds = \int_a^t (2s-1)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3 - \tau)\, d\tau = \int_a^t (2s-1)\, ds \Rightarrow$$

$\tau := y(s)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 + \frac{1}{2}[y(a)]^2 = t^2 - a^2 - t + a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = t^2 - t + c. \quad \text{με } c \in \mathbb{R}.$$

Η λύση πρέπει να είναι τέτοια ώστε $y(t) \neq 0$:
$[y(t)]^3 - y(t) \neq 0 \iff y(t) \neq \pm 1$.

Άσκηση 1.9

$$y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2 \cdot y(t)}$$

Παρατηρούμε ότι η Δ.Ε. είναι → ομογενής κ'
→ πλήρης. / μπορούμε να τη λύσουμε κ' με τους 2 τρόπους.

$M(t,y) := 2t + y$
$N(t,y) := t + 2y$.

Τώρα $\dfrac{\partial M}{\partial y}(t,y) = 1$ και $\dfrac{\partial N}{\partial t}(t,y) = 1$ άρα η Δ.Ε είναι πλήρης.

Ζητείται μία συνάρτηση $f = f(t,y)$ τ.ω.:
$\frac{\partial f}{\partial t} = M$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. ⟼ ανάποδα ότι παράγωγο βρήκαμε πριν, την άλλη θα βρω τώρα.

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t+y \Rightarrow \boxed{f(t,y) = t^2 + ty + g(y)}$$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = t + g'(y)$

Θέλουμε $t+g'(y) = N(t,y) = t+2y \Rightarrow g'(y) = 2y$
π.χ. $g(y) = y^2$ (το $+c$ δεν έχει σημασία).

Συμπέρασμα: $f(t,y) = t^2 + ty + y^2$.
Η γενική λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή, από την σχέση $f(t,y(t)) = c$, δηλαδή:
$$t^2 + ty(t) + [y(t)]^2 = c \text{ με } c \in \mathbb{R}.$$

---

$$* \begin{cases} y'(t) = A\cdot y(t) & , t\in\mathbb{R} \\ y(0) = y^{(0)} \end{cases} \Rightarrow y(t) = e^{tA}\cdot y^{(0)}, \ t\in\mathbb{R}.$$

Ζητούμενο: "Εύχρηστοι" τρόποι υπολογισμού της έκφρασης $e^{tA}\cdot x$, με δεδομένο $x\in\mathbb{C}$, και $t\in\mathbb{R}$

- 1η περίπτωση: $x$ ιδιοδιάνυσμα του $A$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda$.

Τότε $e^{tA}\cdot x = e^{\lambda t I_n} e^{tA-\lambda t I_n}\cdot x \overset{*}{=} e^{\lambda t}\cdot I_n e^{t(A-\lambda I_n)}\cdot x =$

* $I_n$ και $A-\lambda I_n$ αντιμετατίθενται.

$$= e^{\lambda t} e^{t(A-\lambda I_n)} \cdot x =$$

$$e^{B} = I_n + B + \frac{B^2}{2!} + \cdots$$

$$= e^{\lambda t}\left[I_n \cdot x + t\,\underbrace{(A-\lambda I_n)\cdot x}_{=0} + \frac{1}{2}\,t^2\,\underbrace{(A-\lambda I_n)^2 x}_{=0} + \cdots\right] =$$

αφού λ ιδιοτιμή και x ιδιοδιάνυσμα!

$$= e^{\lambda t} \cdot x.$$

$$y^{(0)} = c_1 \underset{\lambda_1}{x^{(1)}} + c_2 \underset{\lambda_2}{x^{(2)}}$$

$$e^{tA} y^{(0)} = c_1 \underbrace{e^{tA} x^{(1)}}_{e^{\lambda_1 t} x^{(1)}} + c_2 \underbrace{e^{tA} x^{(2)}}_{e^{\lambda_2 t} x^{(2)}}$$

• <u>2η περίπτωση</u>:

Υπόθεση: με λ ιδιοτιμή του A και m κατάλληλο φυσικό, υποθέτουμε ότι:

$$(*)\ (A-\lambda I_n)^m x = 0.$$

Όταν ισχύει για $(A-\lambda I_n)^m$ δε σημαίνει ότι ισχύει και για $(A-\lambda I_n)$!

Τότε έχουμε, όπως προηγουμένως:

$$e^{tA} x = e^{\lambda t}\left[I_n \cdot x + t(A-\lambda I_n)\cdot x + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} (A-\lambda I_n)^{m-1} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m!} t^m \underbrace{(A-\lambda I_n)^m x}_{=0} + \underbrace{\cdots}_{=0}\right] =$$

$$= e^{\lambda t}\left[x + t(A-\lambda I_n)x + \cdots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1}(A-\lambda I_n)^{m-1} x\right].$$

→ Αν ο A έχει <u>n γραμμικά ανεξάρτητα</u> ιδιοδιανύσματα, τότε το $y^{(0)}$ ($\forall\, y^{(0)}$) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του A και για τον υπολογισμό της $e^{tA} y^{(0)}$ αρκούν μόνο οι πράξεις της περίπτωσης 1.

→ Διαφορετικά, δεν επαρκούν τα ιδιοδιανύσματα του A για να γράψουμε κάθε $y^{(0)}$ ως γραμμικό συνδυασμό τους. Χρειαζόμαστε επιπλέον <u>γενικευμένα</u> ιδιοδιανύσματα του A.

Έστω $\lambda$ ιδιοτιμή του $A$, αλγεβρικής πολλαπλότητας (δηλαδή πολλαπλότητας ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του $A$) $m$. Τότε οι μηδενικές λύσεις του γραμμικού συστήματος

$$(A-\lambda I_n)^m \cdot x = 0$$

λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$ ως προς την ιδιοτιμή $\lambda$.

Από τη γραμμική άλγεβρα είναι γνωστό ότι υπάρχουν $m$ γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$ ως προς $\lambda$.

Επιπλέον γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Συμπέρασμα: Υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{n,n}$).

Έστω $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$. Τότε

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)},$$

οπότε

$$e^{tA} \cdot y^{(0)} = c_1 \cdot e^{tA} x^{(1)} + c_2 e^{tA} x^{(2)} + \dots + c_n e^{tA} x^{(n)}$$

και ο υπολογισμός κάθε όρου $e^{tA} x^{(k)}$ γίνεται όπως στην $1^η$ ή στη $2^η$ περίπτωση.

Τρόπος υπολογισμού γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων

Δεδομένα: $\lambda$ ιδιοτιμή του $A$ αλγεβρικής πολλαπλότητας $m$.

Ζητούμενο: $m$ γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του, ως προς $\lambda$.

τα γενικευμένα δεν είναι κατ' ανάγκη ιδιοδιανύσματα ε 68.

1η Δυνατότητα: λύνουμε το (*)

2η Δυνατότητα.

Προσοχή: Τα γενικευμένα δεν είναι κατ' ανάγκη ιδιοδιανύσματα, το αντίστροφο ισχύει πάντα!

O_o

1. Λύνουμε $(A-\lambda I_n)x=0$.
Βρίσκουμε $r(\leq m)$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα
($r$ = γεωμετρική πολλαπλότητα).

2. Λύνουμε $(A-\lambda I_n)^2 x=0$
Βρίσκουμε λύσεις τ.ω. μαζί με εκείνες του 1ου βήματος να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

3. Λύνουμε $(A-\lambda I_n)^3 \cdot x=0$
κ.ο.κ.

---

(*) $y'(t)=A\cdot y(t)$, $t\in\mathbb{R}$
$A\in\mathbb{R}^{n,n}$
$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{C}$ γραμμικά ανεξάρτητα.
Τότε $\phi^{(i)}(t) := e^{tA}x^{(i)}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (*)

Για $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ η συνάρτηση
$$y(t)=c_1\cdot\phi^{(1)}(t)+\dots+c_n\phi^{(n)}(t)=$$
$$=c_1 e^{tA}x^{(1)}+\dots+c_n e^{tA}x^{(n)}$$ είναι λύση του (*).
Μάλιστα είναι η γενική λύση του (*)

Στην περίπτωση που τα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ είναι γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του $A$, είδαμε με ποιον τρόπο υπολογίζουμε τις $\phi^{(i)}$, οπότε και τη γενική λύση.

**Παράδειγμα:** $y'(t) = A \cdot y(t), \ t \in \mathbb{R}$

με $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ζητείται η γενική λύση.

**Λύση**

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

το γινόμενο των ριζών είναι 6. Άρα οι ρίζες είναι και διαιρέτες του, άρα θα είναι και $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ δοκιμάζω τ/ όρισ

Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ίδιος με το μέγεθος του πίνακα $(3 \times 3)$

**Ιδιοτιμές:** $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -2$.

Οι ιδιοτιμές είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, οπότε υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^3$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ του A.

$x^{(1)}$ κανονικά, $x \neq 0$!

a) $\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda_1 I_3) \cdot x = 0 \iff$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff \left.\begin{aligned} -x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\leadsto x_2 = 4x_3 \\ & \\ &r_2 - r_3: \ x_1 + x_3 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 4x_3 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}\right\}$$

Για $x_3 = 1$, έχουμε $x_1 = -1$ και $x_2 = 4$.

$I_1$

70. Αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

οποιοδήποτε πολλαπλάσιο αυτού είναι ιδιοδιάνυσμα. $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$

Αντίστοιχη λύση: $\phi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

β) $\lambda_2 = 3$: $(A - \lambda_2 I_3) x = 0 \rightsquigarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

άρα $\phi^{(2)}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

γ) $\lambda_3 = -2$: $(A - \lambda_3 I_3) \cdot x = 0 \rightsquigarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

άρα $\phi^{(3)}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Γενική λύση: $y(t) = c_1 \phi^{(1)}(t) + c_2 \phi^{(2)}(t) + c_3 \phi^{(3)}(t) =$

$$= c_1 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

με $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$(**) \Rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} -c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{-2t} \\ 4 c_1 e^{t} + 2 c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \\ c_1 \cdot e^{t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

αυτό γράφεται κι έτσι. Εγώ μπορώ να το γράψω μ' όποιον τρόπο θέλω.

Συμπλήρωμα: Π.Α.Τ: (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών)

$$\begin{cases} y'(t) = A\, y(t) \\ y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να βρούμε τα $c_1, c_2, c_3$ στην $(**)$ έτσι ώστε $y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} -c_1e^2+c_2e^6-c_3e^{-4} \\ 4c_1e^2+2c_2e^6+c_3e^{-4} \\ c_1e^2+c_2e^6+c_3e^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 e^2 + c_2e^6 - c_3e^{-4} = 1 \\ 4c_1e^2 + 2c_2e^6 + c_3e^{-4} = 2 \\ c_1e^2 + c_2e^6 + c_3e^{-4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \dots \begin{cases} c_1 = -e^{-2} \\ c_2 = 2e^{-6} \\ c_3 = 2e^2 \end{cases}$$

**Παράδειγμα.** $y'(t) = A\cdot y(t)$, $t\in\mathbb{R}$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

να βρώ τη γενική λύση

**Λύση** Έχω άνω τριγωνικό πίνακα οπότε το χαρ. πολυώνυμο είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του και ιδιοτιμές τα διαγώνια στοιχεία

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Ιδιοτιμές:

$\lambda_1 = 2$ απλή

$\lambda_2 = 1$ διπλή.

a) $\lambda_1 = 2$: $(A-\lambda_1 I_3)\cdot x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_3$ αυθαίρετο

$-x_2 = 0$

$-x_1 + x_2 = 0$

π.χ. $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ άρα $\phi^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f2.

β) $\lambda_2 = 1$: $(A-\lambda_2 I_3)\cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$

$x_1$ αυθ.

$x_2=x_3=0$.

Υπάρχει ένα μόνο γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα

→ μόνο αυτό μπορώ να αλλάξω.

$x^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (Γεωμ. πολλ. $=1$)

(Σε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα πάμε όταν η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι μικρότερη απ' την αλγεβρική)

$\phi^{(2)}(t) = e^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Χρειαζόμαστε και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή $\lambda_2$, γραμμικά ανεξ. του $x^{(2)}$.

$(A-\lambda_2 I_3)^2\cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$

$x_3=0$

$\Rightarrow x_1, x_2$ αυθ. π.χ. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$.

→ το $x_2$ δεν επιτρέπεται να είναι 0 γιατί αλλιώς θα είναι γραμμ. εξαρτημένο

$x^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Άρα

$\phi^{(3)}(t) = e^{tA}x^{(3)} = e^t\left[x^{(3)} + t(A-\lambda_2 I_3)x^{(3)}\right] =$

$= e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot e^t\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} =$

$= e^t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Γενική λύση: $y(t) = c_1\phi^{(1)}(t) + c_2\phi^{(2)}(t) + c_3\phi^{(3)}(t) =$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} (c_2+c_3 t) e^t \\ c_3 e^t \\ c_1 e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Άσκηση 1.8** $y'(t) = \dfrac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\, y(t)}$ ομογενής Δ.Ε.

α) Γενική λύση (πεπλεγμένη μορφή).

$$v(t) = \frac{y(t)}{t} \Rightarrow y(t) = t \cdot v(t) \Rightarrow y'(t) = v(t) + t \cdot v'(t)$$

Άρα η αρχική Δ.Ε. γράφεται ως

$$t v'(t) + v(t) = \frac{3\cancel{t^2}[v(t)]^2 + \cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}\, v(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot v'(t) + v(t) = \frac{3}{2} v(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{v(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot v'(t) = \frac{1}{2} v(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{v(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 v'(t)}{v(t) + \frac{1}{v(t)}} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{2 v(t) v'(t)}{[v(t)]^2 + 1} = \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int_a^t \frac{v(s)\, v'(s)}{[v(s)]^2 + 1}\, ds = \int_a^t \frac{1}{s}\, ds$$

$$\tau := [v(s)]^2$$

$$\int_{[v(a)]^2}^{[v(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\, d\tau = \log|t| - \log|a| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\{1 + [v(t)]^2\} - \log\{1 + [v(a)]^2\} = \log|t| - \log|a|$$

$$\Rightarrow \log\{1 + [v(t)]^2\} = \log|t| + \underbrace{\log\{1 + [v(a)]^2\} - \log|a|}_{=: \log|c|}$$

44.

$$\Rightarrow \log\{1+[v(t)]^2\} = \log|ct| \Rightarrow 1+[v(t)]^2 = \underbrace{ct}_{>1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[v(t)]^2 = ct-1} \Rightarrow v(t) = \pm\sqrt{ct-1} \text{ για } ct-1>0$$

$$[v(t)]^2 = ct-1 \Rightarrow \frac{[y(t)]^2}{t^2} = ct-1 \Rightarrow [y(t)]^2 = t^2(ct-1)$$

β) ΠΑΤ $y(1)=1$.
και το μέγιστο ανοικτό διάστημα στο οποίο ορίζεται.

$$y(1)=1 \Leftrightarrow 1^2 = 1(c\cdot 1-1) \Rightarrow c=2.$$

$$[y(t)]^2 = t^2\underbrace{(2t-1)}_{>0}$$

$$2t-1>0 \Rightarrow t>\frac{1}{2}$$

Κατ'αρχάς έχουμε $y(t) = \pm t\sqrt{2t-1}$
Το − απορρίπτεται γιατί δίνει $y(1)=-1$.
Συμπέρασμα:

$$y(t) = t\sqrt{2t-1}, \quad \boxed{1/2 < t < \infty}$$

Άσκηση 1.10 $\quad y'(t) = -\dfrac{t+[y(t)]^2}{t\cdot y(t)}$ (δεν είναι ομογενής)

Γενική λύση

Είναι πλήρης;
$M(t,y) = t+y^2, \quad N(t,y) = t\cdot y$

$$2t = \frac{\partial M}{\partial y} \cancel{\overset{?}{=}} \frac{\partial N}{\partial t}\ y \qquad \text{Όχι πλήρης!}$$

Ανάγεται σε πλήρη;

Έχουμε

$$\frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]=\frac{y}{ty}=\frac{1}{t}\ \left(\text{ανεξ. } y\right)$$

άρα υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\varphi=\varphi(t)$

Έχουμε

$$\varphi(t)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}{N(t,y)}dt}=e^{\int\frac{1}{t}dt}=e^{\log t}\overset{\text{για } t>0}{=}t.$$

Γράφουμε τη Δ.Ε στη μορφή

$$(*)\quad y'(t)=-\frac{t^2+t[y(t)]^2}{t^2y(t)}$$

$$\tilde{M}(t,y)=t^2+ty^2\ ,\quad \tilde{N}(t,y)=t^2y$$

Τώρα

$$2ty=\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}(t,y)=\frac{\partial\tilde{N}}{\partial t}=2ty$$

Άρα η $(*)$ είναι πλήρης.

→ Ζητείται $f=f(t,y)$ : $\frac{\partial f}{\partial t}=\tilde{M}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}=\tilde{N}$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)=t^2+ty^2\Rightarrow\boxed{f(t,y)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}y^2+g(y)}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)=t^2\cdot y+g'(y)=t^2\cdot y\Rightarrow g'(y)=0$$

π.χ. $g(y)=0$

Άρα $f(t,y)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}y^2$

76.

Λύσεις της αρχικής εξίσωσης
$f(t, y(t)) = c$, $c$ σταθερά

δηλ. $\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2 = c.$

*** Επαλήθευση: $y'(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{t \cdot y(t)}$

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2 = c.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}[y(t)]^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\cancel{2}} + \cancel{t}[y(t)]^2 + \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\cancel{2}y(t) \cdot y'(t) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{t \cdot y(t)}$$