ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
e-mail: akrivis@cs.uoi.gr

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

(Πρόχειρες σημειώσεις)

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2013

Πρόλογος

Με την αλλαγή του Προγράμματος Σπουδών του Τμήματος που πραγματοποιήθηκε το έτος 2012 επήλθαν κάποιες αλλαγές στην ύλη του μαθήματος «ΠΛΥ501: Υπολογιστικά Μαθηματικά». Ιδιαίτερα, προστέθηκαν κάποια στοιχεία από τη θεωρία των προβλημάτων αρχικών τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.), τα οποία δεν περιέχονται στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου [1]. Οι παρούσες, πρόχειρες, σημειώσεις προορίζονται ως βοήθημα για τους φοιτητές του εν λόγω μαθήματος και γράφτηκαν για να καλύψουν, κατά κάποια έννοια, το κενό που προαναφέραμε.

Θα ασχοληθούμε με τεχνικές επίλυσης ορισμένων απλών Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής, όπως οι γραμμικές Σ.Δ.Ε., οι εξισώσεις του Bernoulli, οι εξισώσεις του Riccati, οι εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές, οι ομογενείς εξισώσεις, οι πλήρεις εξισώσεις, καθώς και τα γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Με τον όρο επίλυση εννοούμε εδώ την αναπαράσταση της λύσης συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν επέκταση και βελτίωση μέρους χειρογράφων από την προετοιμασία μου για τη διδασκαλία του μαθήματος "Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ" (με αντικείμενο τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και τη Διανυσματική Ανάλυση) στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης το 1995. Τα εν λόγω χειρόγραφα είχαν με τη σειρά τους βασιστεί, σε κάποιο βαθμό, σε χειρόγραφες σημειώσεις Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων του συναδέλφου κ. Ιωάννη Αθανασόπουλου, οι οποίες είχαν διανεμηθεί στους φοιτητές.

Όλα τα βιβλία Θεωρίας Σ.Δ.Ε. πραγματεύονται διεξοδικά τα θέματα που θα μας απασχολήσουν σε αυτές τις σημειώσεις· βλ., φερ' ειπείν, τα βιβλία [2] και [6].

Σεπτέμβριος 2013 — Γ. Δ. Ακρίβης

Περιεχόμενα

1. Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής

Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου [1] δίνονται ορισμένα στοιχεία από τη θεωρία των προβλημάτων αρχικών τιμών για Σ.Δ.Ε., έτσι ώστε και ο μη μυημένος στο θέμα αναγνώστης να μπορεί να κατανοήσει τα θέματα αριθμητικής επίλυσης τέτοιων προβλημάτων. Αντικείμενο του [1] είναι οι μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων είτε αρχικών είτε συνοριακών τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.).

Πρόσφατα, προστέθηκαν στην ύλη του μαθήματος «ΠΛΥ501: Υπολογιστικά Μαθηματικά» κάποια στοιχεία από τη θεωρία των προβλημάτων αρχικών τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.), τα οποία δεν περιέχονται στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου [1]. Οι παρούσες, πρόχειρες, σημειώσεις προορίζονται ως βοήθημα για τους φοιτητές του εν λόγω μαθήματος και αποσκοπούν να καλύψουν, κατά κάποια έννοια, το κενό που προαναφέραμε.

Θα ασχοληθούμε με τεχνικές επίλυσης ορισμένων απλών Σ.Δ.Ε. ειδικής μορφής, όπως οι γραμμικές Σ.Δ.Ε., οι εξισώσεις του Bernoulli, οι εξισώσεις του Riccati, οι εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές, οι ομογενείς εξισώσεις, οι πλήρεις εξισώσεις, καθώς και τα γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές. Με τον όρο επίλυση εννοούμε εδώ την αναπαράσταση της λύσης συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

Η παρουσίαση είναι στοιχειώδης και, σε πολλά σημεία, συμβολική και όχι αυστηρή, με την έννοια ότι δίνουμε έμφαση στο υπολογιστικό μέρος του θέματος παραβλέποντας ζητήματα ύπαρξης, μοναδικότητας και ομαλότητας λύσεων. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις ικανοποιούν κατάλληλες κάθε φορά συνθήκες, ώστε να επιτρέπονται οι πράξεις που κάνουμε. Αν αυτό συμβαίνει όντως, τότε οδηγούμαστε πράγματι σε λύσεις. Εκ των υστέρων, πρέπει να ελέγχει κανείς κατά πόσον οι συναρτήσεις στις οποίες οδηγούμαστε, υποθέτοντας ότι οι πράξεις που κάνουμε επιτρέπονται, αποτελούν όντως λύσεις· ιδιαίτερα ότι είναι καλά ορισμένες και αρκετά ομαλές, και σε ποιο διάστημα συμβαίνει αυτό σε κάθε περίπτωση.

Για διεξοδική μελέτη των θεμάτων που πραγματευόμαστε συνοπτικά εδώ παραπέμπουμε σε βιβλία Θεωρίας Σ.Δ.Ε., όπως τα βιβλία των Coddington και Levinson [4], Birkhoff και Rota [3], Αλικάκου και Καλογερόπουλου [2], Σμυρλή [6], και Walter [7]. (Οι αριθμοί αναφέρονται στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος των σημειώσεων.)

Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Το τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: Ζητείται μια συνάρτηση $y : [a,b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Έστω ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση για $(t,y) \in [a,b]\times\mathbb{R}$. (Γράφουμε $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$.) Κάθε συνάρτηση $y \in C^1[a,b]$, η οποία ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση στην (1.1) όσο και την αρχική συνθήκη $y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του προβλήματος αρχικών τιμών (1.1).

Η γενική θεωρία των Σ.Δ.Ε. μελετά το πρόβλημα (1.1), ειδικότερα, π.χ., όσον αφορά συνθήκες για την f οι οποίες εξασφαλίζουν ύπαρξη ή/και μοναδικότητα της λύσης, και εξετάζει κατά πόσον η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα. Συνεχής εξάρτηση σημαίνει εδώ το εξής: Αν y η λύση του (1.1), και $\tilde{y}$ η λύση του αντίστοιχου προβλήματος με αρχική τιμή $\tilde{y}_0$ αντί y_0, τότε, όταν η διαφορά $|y_0 - \tilde{y}_0|$ είναι μικρή, θέλουμε και η αντίστοιχη διαφορά των λύσεων $\|y - \tilde{y}\|$ να είναι μικρή. (Η επιλογή της νόρμας συναρτήσεων ορισμένων στο $[a,b]$, στην οποία μετράμε τη διαφορά, αποτελεί, γενικά, μέρος του προβλήματος.)

Στο [1], καθώς και σε όλα τα βιβλία Θεωρίας Σ.Δ.Ε., δίνονται συνθήκες που εξασφαλίζουν ύπαρξη και/ή μοναδικότητα λύσεων του προβλήματος (1.1), και μελετάται η συνεχής εξάρτηση των λύσεων από τα αρχικά δεδομένα. Η λύση μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή (συνήθως με τη μορφή ολοκληρωμάτων γνωστών συναρτήσεων) μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις που η διαφορική εξίσωση είναι ειδικής μορφής. Τέτοιες εξισώσεις θα μας απασχολήσουν εδώ.

Τονίζουμε ότι με τον όρο 'επίλυση' δεν υπονοούμε εδώ ότι μπορούμε πράγματι να υπολογίσουμε την τιμή της λύσης σε κάποια σημεία, αλλά απλώς ότι εκφράζουμε τη λύση συναρτήσει (ολοκληρωμάτων) δεδομένων συναρτήσεων, οδηγούμαστε, όπως λέμε, σε μια αναπαράσταση της λύσης.

Το κεφάλαιο αποτελείται από επτά σύντομες ενότητες, καθεμία των οποίων αναφέρεται σε εξισώσεις μιας συγκεκριμένης μορφής.

1.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Στην ειδική περίπτωση στην οποία η f είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς y, η αντίστοιχη Σ.Δ.Ε. λέγεται *γραμμική* και το πρόβλημα (1.1) γράφεται στη μορφή

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Αν οι p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a,b]$, $p,q \in C[a,b]$, τότε το πρόβλημα (1.2) έχει μία ακριβώς λύση, η οποία μάλιστα δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}\Big[y_0 + \int_a^t q(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\Big], \quad a \le t \le b, \tag{1.3}$$

δηλαδή

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}y_0 + \int_a^t q(s)\mathrm{e}^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau}\,ds, \quad a \le t \le b.$$

Στη σχέση (1.3) μπορούμε να οδηγηθούμε ως εξής: Στην περίπτωση $p = 0$, το πρόβλημα λύνεται με απλή ολοκλήρωση. Όντως, σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση λαμβάνει τη μορφή $y'(s) = q(s)$, οπότε ολοκλήρωση και των δύο μελών στο διάστημα $[a,t]$, με $a < t \le b$, δίνει $y(t) - y(a) = \int_a^t q(s)\,ds$, δηλαδή

$$y(t) = y(a) + \int_a^t q(s)\,ds, \quad a \le t \le b.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη διαφορική εξίσωση με κατάλληλο *ολοκληρωτικό παράγοντα*, η γενική περίπτωση μπορεί να αναχθεί στην προηγούμενη. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή $y'(s) - p(s)y(s) = q(s)$ ή, ισοδύναμα,

$$\Big(\mathrm{e}^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}y(s)\Big)' = \mathrm{e}^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}q(s).$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση από a έως t, λαμβάνουμε την (1.3).

Σημειώνουμε ακόμα ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (1.2) λέγεται *ομογενής*, αν η συνάρτηση q είναι η μηδενική, $q(t) = 0$.

Παράδειγμα 1.1 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty(t) + t, & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Η Δ.Ε. στο πρόβλημα (1.4) είναι, βέβαια, γραμμική με $p(t) = 2t$ και $q(t) = t$. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1.3), με $a = 0$ και $y_0 = 1$, η λύση $y(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t 2s\,ds}\Big[1 + \int_0^t s\mathrm{e}^{-\int_0^s 2\tau\,d\tau}\,ds\Big], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, έχουμε

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^2}\Big[1 + \int_0^t s\mathrm{e}^{-s^2}\,ds\Big], \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Τώρα, με την αλλαγή μεταβλητής $\tau := -s^2$, έχουμε

$$\int_0^t s\mathrm{e}^{-s^2}\,ds = -\frac{1}{2}\int_0^{-t^2} \mathrm{e}^{\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-t^2}-1\big),$$

οπότε η (1.5) δίνει

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^2}\Big[1-\frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{-t^2}-1\big)\Big] = \mathrm{e}^{t^2}\Big[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\Big],$$

δηλαδή

$$y(t) = \frac{1}{2}\big(3\mathrm{e}^{t^2}-1\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$ □

Παράδειγμα 1.2 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσει της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = -\frac{1}{t}y(t) + 3t, \tag{1.6}$$

για μη μηδενικά t. Προφανώς, η Δ.Ε. (1.6) είναι γραμμική με $p(t) = -1/t$ και $q(t) = 3t$. Επομένως, θεωρώντας, φερ' ειπείν, την τιμή $y(1) = c$, με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c, η λύση $y(t)$ δίνεται, για θετικά t, από τον τύπο

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\int_1^t \frac{1}{s}\,ds}\Big[c + \int_1^t 3s\mathrm{e}^{\int_1^s \frac{1}{\tau}\,d\tau}\,ds\Big], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, έχουμε

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\log t}\Big[c + \int_1^t 3s\mathrm{e}^{\log s}\,ds\Big] = \frac{1}{t}\Big[c + \int_1^t 3ss\,ds\Big] = \frac{1}{t}(c+t^3-1),$$

δηλαδή

$$y(t) = t^2 + \frac{\tilde{c}}{t}, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά $\tilde{c} = c - 1$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση που δίνεται στην (1.7) αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.6) και για αρνητικά t. □

1.2 Εξισώσεις του Bernoulli

Οι *διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli* είναι της μορφής

$$y'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma}, \quad a \le t \le b, \tag{1.8}$$

όπου ο εκθέτης σ είναι μια πραγματική σταθερά, $\sigma \in \mathbb{R}$, διάφορη του μηδενός και της μονάδας. (Σημειώνουμε ότι στις περιπτώσεις $\sigma = 0$ και $\sigma = 1$ η διαφορική εξίσωση (1.8) είναι γραμμική, οπότε μπορούμε να την επιλύσουμε όπως στην προηγούμενη ενότητα.) Σημειώστε ακόμα ότι η συνάρτηση $y = 0$ είναι πάντα λύση της εξίσωσης (1.8), αν η σταθερά σ είναι θετική. Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μη τετριμμένες λύσεις.

Θέτοντας $v(t) := [y(t)]^{1-\sigma}$, η εξίσωση του Bernoulli (1.8) ανάγεται σε γραμμική μορφή. Πράγματι, έχουμε

$$v'(t) = (1-\sigma)[y(t)]^{-\sigma} y'(t),$$

και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την (1.8) στη μορφή

$$\frac{1}{1-\sigma}[y(t)]^{\sigma} v'(t) = p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^{\sigma},$$

δηλαδή

$$v'(t) = (1-\sigma)p(t)v(t) + (1-\sigma)q(t), \quad a \le t \le b. \tag{1.9}$$

Η διαφορική εξίσωση (1.9) είναι βεβαίως γραμμική· επιλύοντας την (1.9) ως προς v, μπορούμε εν συνεχεία να προσδιορίσουμε την y από τη σχέση $v(t) = [y(t)]^{1-\sigma}$.

Τονίζουμε, τέλος, ότι τα προαναφερθέντα έχουν νόημα μόνο αν οι συναρτήσεις $[y(t)]^{\sigma}$ και $[y(t)]^{1-\sigma}$ είναι καλά ορισμένες στο διάστημα $[a,b]$, για το τελικό αποτέλεσμα $y(t)$ των υπολογισμών μας.

Παράδειγμα 1.3 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της Δ.Ε.

$$y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, \quad a \le t \le b, \tag{1.10}$$

σε ένα κατάλληλο διάστημα $[a,b]$. Η Δ.Ε. (1.10) είναι, βέβαια, εξίσωση του Bernoulli με $\sigma = 2$. Προφανώς, η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση y, $y(t) = 0$ για κάθε $t \in [a,b]$, είναι λύση της εξίσωσης (1.10). Στη συνέχεια αναζητούμε, λοιπόν, μη τετριμμένες λύσεις.

Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, θέτουμε $v(t) := [y(t)]^{1-2} = 1/y(t)$, υποθέτοντας, βεβαίως, ότι η $y(t)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $[a,b]$, και έχουμε

$$v'(t) = -\frac{1}{[y(t)]^2} y'(t),$$

οπότε η Δ.Ε. (1.10) γράφεται στη μορφή

$$-[y(t)]^2 v'(t) = -y(t) + [y(t)]^2$$

ή

$$-v'(t) = -\frac{1}{y(t)} + 1$$

δηλαδή

$$v'(t) = v(t) - 1, \quad a \le t \le b. \tag{1.11}$$

Οι λύσεις της (1.11) είναι της μορφής $v(t) = c\mathrm{e}^t + 1$, με αυθαίρετη σταθερά $c \in \mathbb{R}$, οπότε οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης (1.10) είναι της μορφής

$$y(t) = \frac{1}{c\mathrm{e}^t + 1}, \quad a \le t \le b, \tag{1.12}$$

υπό την προϋπόθεση, βεβαίως, ότι η σταθερά c είναι τέτοια ώστε η $c\mathrm{e}^t + 1$ να μην μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $[a, b]$, $c\mathrm{e}^t + 1 \ne 0$, για κάθε $t \in [a, b]$.

Για προβλήματα αρχικών τιμών για τη διαφορική εξίσωση (1.10) παραπέμπουμε στην Άσκηση 1.3. □

1.3 Εξισώσεις του Riccati

Οι *διαφορικές εξισώσεις του Riccati* είναι της μορφής

$$y'(t) = r(t) + p(t)y(t) + q(t)[y(t)]^2, \quad a \le t \le b. \tag{1.13}$$

Σημειώστε ότι στην ειδική περίπτωση $q = 0$ η εξίσωση του Riccati είναι γραμμική και ότι στην περίπτωση $r = 0$ η εξίσωση του Riccati είναι και εξίσωση του Bernoulli με $\sigma = 2$.

Δεν είναι γενικά εφικτός ο προσδιορισμός της γενικής λύσης εξισώσεων του Riccati. Αν όμως γνωρίζουμε μια *ειδική λύση* της εξίσωσης (1.13), τότε η εν λόγω εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε γραμμική μορφή, γεγονός που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε και τη γενική λύση της (1.13).

Πράγματι, έστω y_ε μια ειδική λύση της (1.13). Γράφουμε τώρα τη γενική λύση της (1.13) στη μορφή

$$y(t) = y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}, \tag{1.14}$$

με άγνωστη τη συνάρτηση z, και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τη γενική μορφή της συνάρτησης z έτσι ώστε η y να αποτελεί όντως λύση της (1.13). Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1.14), ως προς t, λαμβάνουμε

$$y'(t) = y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t). \tag{1.15}$$

Αντικαθιστώντας τις $y(t)$ και $y'(t)$ στην (1.13) με τις εκφράσεις στις (1.14) και (1.15), αντίστοιχα, η αρχική μας διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y_\varepsilon'(t) - \frac{1}{[z(t)]^2} z'(t) = r(t) + p(t)\Big[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\Big] + q(t)\Big[y_\varepsilon(t) + \frac{1}{z(t)}\Big]^2, \quad a \le t \le b,$$

ή

$$\big[y_\varepsilon'(t) - r(t) - p(t)y_\varepsilon(t) - q(t)[y_\varepsilon(t)]^2\big] - \frac{1}{[z(t)]^2}z'(t) = \\ p(t)\frac{1}{z(t)} + 2q(t)y_\varepsilon(t)\frac{1}{z(t)} + q(t)\frac{1}{[z(t)]^2}.$$

Λαμβάνοντας εδώ υπ’ όψιν το γεγονός ότι η y_ε αποτελεί λύση της (1.13), οπότε ο πρώτος όρος σε αγκύλες στο αριστερό μέλος μηδενίζεται, γράφουμε την προηγούμενη εξίσωση στη μορφή

$$-\frac{1}{[z(t)]^2}z'(t) = p(t)\frac{1}{z(t)} + 2q(t)y_\varepsilon(t)\frac{1}{z(t)} + q(t)\frac{1}{[z(t)]^2}, \quad a \le t \le b,$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με $[z(t)]^2$,

$$-z'(t) = \big[p(t) + 2q(t)y_\varepsilon(t)\big]z(t) + q(t), \quad a \le t \le b. \tag{1.16}$$

Η διαφορική εξίσωση (1.16) είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση z (η συνάρτηση y_ε υποτίθεται ότι είναι γνωστή), οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γενική της λύση. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (1.14), οδηγούμαστε στη γενική λύση y της αρχικής εξίσωσης (1.13).

Παράδειγμα 1.4 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της Δ.Ε.

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2, \tag{1.17}$$

γνωρίζοντας ήδη ότι η συνάρτηση $y_\varepsilon(t) = 1/t$ αποτελεί λύση της εν λόγω εξίσωσης. (Σημειώστε ότι η ειδική λύση y_ε είναι καλά ορισμένη σε οποιοδήποτε διάστημα που δεν περιέχει το μηδέν.) Η Δ.Ε. (1.17) είναι, προφανώς, εξίσωση του Riccati. Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, θέτουμε

$$y(t) := \frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}, \tag{1.18}$$

με άγνωστη τη συνάρτηση z, υποθέτοντας, βεβαίως, ότι η $z(t)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $[1, 2]$, και έχουμε

$$y'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2}z'(t). \tag{1.19}$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω εκφράσεις (1.18) και (1.19) των $y(t)$ και $y'(t)$ στην (1.17), γράφουμε την αρχική μας διαφορική εξίσωση στη μορφή

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{[z(t)]^2}z'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\Big) - \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{z(t)}\Big)^2, \quad 1 \le t \le 2,$$

ή ισοδύναμα
$$-\frac{1}{[z(t)]^2}z'(t) = -\frac{3}{tz(t)} - \frac{1}{[z(t)]^2}, \quad 1 \le t \le 2,$$
οπότε, πολλαπλασιάζοντας με $[z(t)]^2$,

$$z'(t) - \frac{3}{t}z(t) = 1, \quad 1 \le t \le 2. \tag{1.20}$$

(Σημειώστε ότι για να οδηγηθούμε στην (1.20) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $y_\varepsilon(t) = 1/t$ αποτελεί λύση της (1.17)· αυτός είναι ο ουσιαστικός λόγος για τον οποίο διάφοροι όροι στην προηγούμενη διαδικασία αλληλοαναιρούνται.)

Τώρα, η διαφορική εξίσωση (1.20) είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση z, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γενική της λύση σύμφωνα με όσα είδαμε στην παράγραφο 1.1. Ας προσδιορίσουμε εδώ τις λύσεις, επαναλαμβάνοντας ουσιαστικά τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην ενότητα 1.1.

Πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, τη Δ.Ε. στην (1.20) με έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $\mathrm{e}^{\varphi(t)}$, με συνάρτηση φ που θα επιλεγεί κατάλληλα στη συνέχεια, και παίρνουμε
$$\mathrm{e}^{\varphi(t)}z'(t) - \frac{3}{t}\mathrm{e}^{\varphi(t)}z(t) = \mathrm{e}^{\varphi(t)}.$$
Αν η φ επιλεγεί έτσι ώστε $\varphi'(t) = -3/t$, για θετικά t, φερ' ειπείν ως $\varphi(t) = -3\log t$, οπότε $\mathrm{e}^{\varphi(t)} = 1/t^3$, η ανωτέρω εξίσωση γράφεται στη μορφή
$$\Big(\frac{1}{t^3}z(t)\Big)' = \frac{1}{t^3}.$$
Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση (για θετικά t), λαμβάνουμε
$$\frac{1}{t^3}z(t) = \int \frac{1}{t^3}\,dt = -\frac{1}{2t^2} + c,$$
δηλαδή

$$z(t) = ct^3 - \frac{t}{2}, \quad 1 \le t \le 2, \tag{1.21}$$

με αυθαίρετη πραγματική σταθερά $c, c \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα (1.21) στην (1.18) λαμβάνουμε

$$y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}}, \quad 1 \le t \le 2, \tag{1.22}$$

με αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. Παρατηρούμε ότι η εν λόγω συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1, 2]$, αν και μόνο αν
$$ct^2 \ne \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } t \in [1, 2],$$

δηλαδή αν και μόνο αν είτε $c < 1/8$ είτε $c > 1/2$.

Τέλος, σημειώνουμε ότι η συνάρτηση y που δίνεται στην (1.22) αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.17) σε κάθε διάστημα που δεν περιέχει το μηδέν (στο μηδέν δεν έχει έννοια η ειδική λύση $y_\varepsilon(t) = 1/t$) αρκεί η σταθερά c να επιλεγεί κατά τρόπον ώστε στο διάστημα που μας ενδιαφέρει να ισχύει $ct^2 \neq 1/2$, δηλαδή, με άλλα λόγια, σε κάθε διάστημα στο οποίο η y είναι καλά ορισμένη.

Για προβλήματα αρχικών τιμών για τη διαφορική εξίσωση (1.17) παραπέμπουμε στην Άσκηση 1.5. □

1.4 Εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Οι διαφορικές εξισώσεις αυτού του είδους είναι της μορφής

$$y'(t) = \frac{g(t)}{f(y(t))}. \tag{1.23}$$

Συχνά ακολουθείται η εξής “διαδικασία επίλυσης” τέτοιων εξισώσεων: Παραλείποντας την ανεξάρτητη μεταβλητή t στην εξαρτημένη μεταβλητή y, γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}.$$

Έτσι έχουμε

$$f(y)\,dy = g(t)\,dt. \tag{1.24}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα τα δύο μέλη της (1.24) και παίρνουμε

$$\int f(y)\,dy = \int g(t)\,dt, \tag{1.25}$$

οπότε, υποθέτοντας ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα, καταλήγουμε σε μια αλγεβρική εξίσωση της μορφής

$$F(y) = G(t) + c,$$

με μια σταθερά ολοκλήρωσης c. Τέλος, λύνοντας αυτήν την αλγεβρική εξίσωση, εκφράζουμε το y ως συνάρτηση του t, οπότε φθάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα $y(t)$.

Η διαδικασία αυτή είναι τουλάχιστον προβληματική για τους ακόλουθους λόγους:

α) Για να οδηγηθούμε στην (1.24) χειριστήκαμε την παράγωγο $\frac{dy}{dt}$ ως πηλίκο του dy δια dx. Αυτό βεβαίως δεν επιτρέπεται, εκτός αν είναι κανείς ιδιαίτερα καλοπροαίρετος και θεωρήσει ότι πρόκειται απλώς για μη αυστηρό συμβολισμό και ότι η αληθινή έννοια της (1.24) δεν είναι άλλη από την $y' = \frac{g(t)}{f(y)}$.

β) Εν συνεχεία ολοκληρώσαμε τα δύο μέλη της (1.24), το αριστερό ως προς y και το δεξιό ως προς t. Αυτό, δυστυχώς, δεν μπορεί να γίνει αποδεκτό, όσο καλή διάθεση και να δείξει κανείς.

Η ανωτέρω διαδικασία επίλυσης εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών *δεν* θα γίνεται αποδεκτή στο πλαίσιο του μαθήματος.

Παραμένοντας σε επίπεδο συμβολικών υπολογισμών, αφού δεν αποδεικνύουμε ύπαρξη λύσεων ούτε εξετάζουμε κατά πόσον ο παρονομαστής $f(y(t))$ μηδενίζεται σε κάποια σημεία, θα ακολουθήσουμε τώρα μια υπολογιστική διαδικασία που μπορεί να τεκμηριωθεί εκ των υστέρων, αν οι λύσεις που θα προσδιορίσουμε είναι καλά ορισμένες, ομαλές και τέτοιες ώστε ο παρονομαστής $f(y(t))$ να μην μηδενίζεται σε κανένα σημείο ενός διαστήματος I, στο οποίο θεωρούμε ότι αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης (1.23).

Γράφουμε, λοιπόν, τη διαφορική εξίσωση (1.23) στη μορφή

$$f(y(s))y'(s) = g(s), \quad s \in I,$$

σταθεροποιούμε ένα σημείο a στο διάστημα I και ολοκληρώνουμε από a έως t για να οδηγηθούμε στη σχέση

$$\int_a^t f(y(s))y'(s)\,ds = \int_a^t g(s)\,ds, \quad t \in I. \tag{1.26}$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση y είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I και χρησιμοποιούμε στο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (1.26) την αλλαγή μεταβλητής $\tau = y(s)$. Σημειώστε ότι τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται τώρα $y(a)$ και $y(t)$, οπότε, αφού $d\tau = y'(s)\,ds$, η (1.26) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\int_{y(a)}^{y(t)} f(\tau)\,d\tau = \int_a^t g(s)\,ds, \quad t \in I. \tag{1.27}$$

Έστω τώρα F και G παράγουσες (δηλαδή, αόριστα ολοκληρώματα) των συναρτήσεων f και g, αντίστοιχα (υποθέτουμε ότι μπορούν να προσδιοριστούν). Τότε η (1.27) γράφεται στη μορφή

$$F(y(t)) - F(y(a)) = G(t) - G(a), \quad t \in I. \tag{1.28}$$

Αν έχουμε προκαθορίσει την τιμή της y στο σημείο a, τότε η (1.28) είναι μια αλγεβρική εξίσωση με γνωστές τις $G(t), G(a), F(y(a))$ και F και άγνωστη την y. Η εξίσωση αυτή μας δίνει τη λύση y σε πεπλεγμένη (έμμεση) μορφή· αν μπορούμε να την επιλύσουμε, οδηγούμαστε στην y.

Στην περίπτωση που δεν επιθυμούμε να προκαθορίσουμε την τιμή της y στο σημείο a, αντικαθιστούμε στην (1.28) την τιμή $F(y(a))$ με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c και λαμβάνουμε

$$F(y(t)) = G(t) - G(a) + c, \quad t \in I, \tag{1.29}$$

που μας δίνει τις λύσεις σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να επιλύσουμε την (1.29) ως προς y, λαμβάνουμε τις λύσεις σε άμεση μορφή. (Βεβαίως, στην (1.29) μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο $G(a)$, αφού αυτός μπορεί να ενσωματωθεί στη σταθερά c.)

Παράδειγμα 1.5 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γενική λύση της Δ.Ε.

$$\mathrm{e}^{y(t)} y'(t) = t + t^3, \tag{1.30}$$

στο μέγιστο δυνατό διάστημα.

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (1.30) από a έως t (με ένα σταθεροποιημένο a, το οποίο, ενδεχομένως, θα χρειαστεί να επιλέξουμε κατάλληλα στη συνέχεια ώστε να ανήκει στο διάστημα στο οποίο η λύση θα είναι καλά ορισμένη), λαμβάνουμε

$$\int_a^t \mathrm{e}^{y(s)} y'(s)\, ds = \int_a^t (s + s^3)\, ds,$$

δηλαδή

$$\int_{y(a)}^{y(t)} \mathrm{e}^{\tau}\, d\tau = \int_a^t (s + s^3)\, ds,$$

οπότε

$$\mathrm{e}^{y(t)} - \mathrm{e}^{y(a)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}.$$

Τώρα, αφού δεν θέλουμε να προκαθορίσουμε την τιμή της y στο σημείο a, συμβολίζουμε με μια αυθαίρετη σταθερά c την έκφραση

$$\mathrm{e}^{y(a)} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4},$$

και η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{e}^{y(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c. \tag{1.31}$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει τη λύση y σε έμμεση μορφή, σε διαστήματα όπου το δεξιό μέλος είναι θετικό (για θετικό c σε όλο το $\mathbb{R}$), αφού το αριστερό μέλος είναι προφανώς θετικό. Η (1.31) επιλύεται εύκολα ως προς $y(t)$, αν πάρουμε λογαρίθμους, και δίνει

$$y(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c\right), \tag{1.32}$$

σε διαστήματα όπου το όρισμα του λογαρίθμου είναι θετικό. □

Παράδειγμα 1.6 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{3t^2+4t+2}{2[y(t)-1]}, & t \ge 0, \\ y(0) = -1, \end{cases} \tag{1.33}$$

αν υπάρχει τέτοια λύση.

Πριν προχωρήσουμε με τους υπολογισμούς παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει λύση, αυτή πρέπει να παίρνει τιμές διαφορετικές της μονάδας· δεδομένου ότι η αρχική τιμή -1 είναι μικρότερη της μονάδας, συμπεραίνουμε ότι η λύση πρέπει να παίρνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Τότε όμως το δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης είναι αρνητικό, οπότε η y θα είναι γνησίως φθίνουσα και, ιδιαίτερα, θα παίρνει όντως τιμές μικρότερες του -1, για θετικά t.

Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση στη μορφή

$$2[y(s)-1]y'(s) = 3s^2+4s+2$$

και ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη από 0 έως t, για θετικό t, οπότε λαμβάνουμε

$$\int_0^t 2[y(s)-1]y'(s)\,ds = \int_0^t (3s^2+4s+2)\,ds,$$

δηλαδή, με την αλλαγή μεταβλητής $\tau = y(s)$,

$$\int_{y(0)}^{y(t)} 2(\tau-1)\,d\tau = \int_0^t (3s^2+4s+2)\,ds,$$

οπότε

$$\big[[y(t)]^2 - 2y(t)\big] - \big[[y(0)]^2 - 2y(0)\big] = t^3+2t^2+2t.$$

Αφού $y(0) = -1$, συμπεραίνουμε ότι

$$[y(t)]^2 - 2y(t) = t^3+2t^2+2t+3. \tag{1.34}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί πολύ εύκολα και δίνει

$$y_1(t) = 1-\sqrt{t^3+2t^2+2t+4}, \quad y_2(t) = 1+\sqrt{t^3+2t^2+2t+4}, \quad t \ge 0. \tag{1.35}$$

Η $y_2(t)$ δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (αφού $y_2(0) = 3$), οπότε απορρίπτεται. Συνεπώς η μόνη λύση του προβλήματός μας είναι η $y(t) = y_1(t), t \ge 0.$ □

Παράδειγμα 1.7 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = ty(t)[y(t) - 2] \tag{1.36}$$

και τα διαστήματα στα οποία αυτές ορίζονται.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $y(t) = 0$ και $y(t) = 2$ αποτελούν, προφανώς, λύσεις της (1.36), και μάλιστα σε όλη την πραγματική ευθεία.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η $y(t)$ δεν λαμβάνει τις τιμές 0 και 2 σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, και γράφουμε την (1.36) στη μορφή

$$\frac{y'(s)}{y(s)[y(s) - 2]} = s.$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο a και ολοκληρώνουμε από a έως t, οπότε παίρνουμε

$$\int_a^t \frac{y'(s)}{y(s)[y(s) - 2]}\, ds = \int_a^t s\, ds,$$

δηλαδή, με την αλλαγή μεταβλητής $\tau := y(s)$,

$$\int_{y(a)}^{y(t)} \frac{1}{\tau(\tau - 2)}\, d\tau = \int_a^t s\, ds.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος, αναλύουμε πρώτα την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{\tau(\tau - 2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau - 2} - \frac{1}{\tau}\Big),$$

οπότε έχουμε

$$\frac{1}{2}\Big[\int_{y(a)}^{y(t)} \frac{1}{\tau - 2}\, d\tau - \int_{y(a)}^{y(t)} \frac{1}{\tau}\, d\tau\Big] = \int_a^t s\, ds,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{2}\big[\log|y(t) - 2| - \log|y(t)|\big] - \frac{1}{2}\big[\log|y(a) - 2| - \log|y(a)|\big] = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σχέση επί δύο και θεωρώντας την τιμή $\log|y(a) - 2| - \log|y(a)| - a^2$ ως μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c, αφού ούτε το a έχουμε προκαθορίσει ούτε, κυρίως, την τιμή της y στο a, λαμβάνουμε

$$\log|y(t) - 2| - \log|y(t)| = t^2 + c,$$

οπότε

$$\log\Big|\frac{y(t) - 2}{y(t)}\Big| = t^2 + c,$$

ή

$$\log\Big|1-\frac{2}{y(t)}\Big| = t^2 + c.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\Big|1-\frac{2}{y(t)}\Big| = \widetilde{C}\mathrm{e}^{t^2},$$

με μια θετική σταθερά $\widetilde{C}$, οπότε

$$1-\frac{2}{y(t)} = C\mathrm{e}^{t^2},$$

με μια μη μηδενική σταθερά C, δηλαδή

$$y(t) = \frac{2}{1+C\mathrm{e}^{t^2}} \tag{1.37}$$

με $C \neq 0$. Βεβαίως, για δεδομένο C, αυτή η y αποτελεί λύση της εξίσωσης στα διαστήματα όπου ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, $1 + C\mathrm{e}^{t^2} \neq 0$.

Για να καταλήξουμε στην (1.37), υποθέσαμε ότι η y δεν λαμβάνει τις τιμές 0 και 2. Παρά ταύτα, παρατηρούμε ότι για $C = 0$, η (1.37) μας δίνει πάλι λύση, την $y(t) = 2$.

Η λύση $y(t) = 0$ δεν προκύπτει από την (1.37) για κάποια τιμή της σταθεράς C, και καλείται *ιδιάζουσα λύση* της διαφορικής εξίσωσης (1.36). □

1.5 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$y'(t) = g\Big(\frac{y(t)}{t}\Big) \tag{1.38}$$

λέγονται *ομογενείς*.[1]

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών f λέγεται *ομογενής βαθμού* ν, αν ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^\nu f(t, y) \quad \forall \lambda, t, y \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

[1] Η έννοια αυτή της ομογένειας είναι εντελώς διαφορετική και πρέπει να διακρίνεται από την αντίστοιχη για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις· βλ. την ενότητα 1.1. Η χρήση του ιδίου όρου για δύο εντελώς διαφορετικά πράγματα είναι μάλλον ατυχής, αλλά έχει επικρατήσει. Ας αναφερθεί επίσης ότι στο βιβλίο [6] διατυπώνεται η άποψη ότι ο όρος “ομογενής” δεν είναι δόκιμος και ότι θα έπρεπε να αντικατασταθεί από τον όρο “ομοιογενής”. Παρά το γεγονός ότι τα επιχειρήματα που παρατίθενται στο [6] είναι πολύ πειστικά, θα χρησιμοποιούμε εδώ τον πρώτο όρο, αφού η χρήση του έχει πλέον καθιερωθεί στη βιβλιογραφία των διαφορικών εξισώσεων.

Αν M και N είναι δύο ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού, τότε η συνάρτηση f, $f(t,y) := -M(t,y)/N(t,y)$, είναι ομογενής μηδενικού βαθμού. Σε αυτήν την περίπτωση η διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = f\big(t, y(t)\big),$$

η οποία πολλές φορές γράφεται καταχρηστικά και ως

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0, \tag{1.40}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή (1.38) με $g(s) := f(1,s)$, αφού, προφανώς,

$$f(t,y) = t^0 f(1, \frac{y}{t}) = f(1, \frac{y}{t}).$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση (1.38). Εισάγουμε τη συνάρτηση $v(t) := y(t)/t$, για μη μηδενικά t, και έχουμε $y(t) = tv(t)$, συνεπώς

$$y'(t) = tv'(t) + v(t),$$

οπότε η (1.38) γράφεται στη μορφή

$$tv'(t) = g\big(v(t)\big) - v(t), \tag{1.41}$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές.

Για να επιλύσουμε την (1.41), υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g\big(v(t)\big) - v(t)$ λαμβάνει τιμές διάφορες του μηδενός, για κάθε t, και γράφουμε την (1.41) στη μορφή

$$\frac{v'(s)}{g\big(v(s)\big) - v(s)} = \frac{1}{s}. \tag{1.42}$$

Σταθεροποιούμε τώρα ένα αυθαίρετο σημείο a και ολοκληρώνουμε από a έως t (το διάστημα ολοκλήρωσης δεν πρέπει, βεβαίως, να περιέχει το μηδέν, για να είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση στο δεξιό μέλος, οπότε τα a και t πρέπει να είναι ομόσημα), οπότε παίρνουμε

$$\int_a^t \frac{v'(s)}{g\big(v(s)\big) - v(s)}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds, \tag{1.43}$$

δηλαδή, με την αλλαγή μεταβλητής $\tau = v(s)$,

$$\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{g(\tau) - \tau}\,d\tau = \log|t| - \log|a|. \tag{1.44}$$

Αν τώρα G είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $1/[g(\tau) - \tau]$, τότε η προηγούμενη σχέση δίνει

$$G(v(t)) - G(v(a)) = \log|t| - \log|a|, \quad t \in I. \tag{1.45}$$

Αν έχουμε προκαθορίσει την τιμή της y στο σημείο a, τότε η (1.45) είναι μια αλγεβρική εξίσωση με γνωστή τη G και άγνωστη την v. Η εξίσωση αυτή μας δίνει τη λύση v σε πεπλεγμένη (έμμεση) μορφή· αν μπορούμε να την επιλύσουμε οδηγούμαστε στην v.

Στην περίπτωση που δεν επιθυμούμε να προκαθορίσουμε την τιμή της v στο σημείο a, αντικαθιστούμε στην (1.45) την τιμή $G(v(a))-\log|a|$ με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c και λαμβάνουμε

$$G(v(t)) = \log|t| + c, \quad t \in I, \tag{1.46}$$

που μας δίνει τις λύσεις σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να επιλύσουμε την (1.46) ως προς v, λαμβάνουμε τις λύσεις σε άμεση μορφή. Αν γνωρίζουμε τη v, οδηγούμαστε αμέσως στην y μέσω της σχέσης $y(t) = tv(t)$.

Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι η συνάρτηση $g\big(v(t)\big) - v(t)$ λαμβάνει τιμές διάφορες του μηδενός. Αν, τώρα, υπάρχουν σταθερά σημεία $v^\star \in \mathbb{R}$ της συνάρτησης g, δηλαδή λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης $g(v) = v$, τότε η εξίσωση (1.41) γράφεται στη μορφή

$$tv'(t) = 0, \tag{1.47}$$

οπότε η v είναι σταθερά $v(t) = v^\star$. Αυτές οι λύσεις λέγονται *ιδιάζουσες* και οδηγούν στις ιδιάζουσες λύσεις $y(t) = v^\star t$ της αρχικής μας διαφορικής εξίσωσης (1.38).

Παράδειγμα 1.8 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = \frac{[y(t)]^2 + 2ty(t)}{t^2} \tag{1.48}$$

και τα διαστήματα στα οποία αυτές ορίζονται.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (1.48) είναι ομογενείς συναρτήσεις δευτέρου βαθμού. Επομένως, η (1.48) είναι όντως ομογενής.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στη θεωρία, θέτουμε $v(t) := y(t)/t$ και η διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$v(t) + tv'(t) = [v(t)]^2 + 2v(t)$$

ή

$$tv'(t) = [v(t)]^2 + v(t). \tag{1.49}$$

Τώρα, η βαθμωτή εξίσωση $v^2 + v = 0$ έχει προφανώς δύο λύσεις, τις $v = 0$ και $v = -1$. Επομένως, σύμφωνα με όσα είδαμε στη σχετική θεωρία, οι συναρτήσεις

$$y(t) = 0 \quad \text{και} \quad y(t) = -t \tag{1.50}$$

αποτελούν ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1.48).

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η $v(t)$ δεν λαμβάνει τις τιμές 0 και -1 σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της, και γράφουμε την (1.49) στη μορφή

$$\frac{v'(s)}{v(s)[v(s)+1]} = \frac{1}{s}.$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο a και ολοκληρώνουμε από a έως t, οπότε παίρνουμε

$$\int_a^t \frac{v'(s)}{v(s)[v(s)+1]}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds,$$

δηλαδή, με την αλλαγή μεταβλητής $\tau := v(s)$,

$$\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau(\tau+1)}\,d\tau = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds.$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος, αναλύουμε πρώτα την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα,

$$\frac{1}{\tau(\tau+1)} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau+1},$$

οπότε έχουμε

$$\int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau}\,d\tau - \int_{v(a)}^{v(t)} \frac{1}{\tau+1}\,d\tau = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds,$$

δηλαδή

$$\big[\log|v(t)| - \log|v(t)+1|\big] - \big[\log|v(a)| - \log|v(a)+1|\big] = \log|t| - \log|a|.$$

Θεωρώντας την τιμή $\log|v(a)| - \log|v(a)+1| - \log|a|$ ως μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά, που εδώ διευκολύνει να τη θεωρήσουμε ως $-\log|c|$, με μια μη μηδενική σταθερά c, αφού ούτε το a έχουμε προκαθορίσει ούτε, κυρίως, την τιμή της v στο a, λαμβάνουμε

$$\log|v(t)| - \log|v(t)+1| = \log|t| + \log|c|,$$

οπότε

$$\log\left|\frac{v(t)}{v(t)+1}\right| = \log|ct|,$$

ή

$$\frac{v(t)}{v(t)+1} = ct,$$

με μια μη μηδενική σταθερά c. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, αμέσως ότι

$$v(t) = \frac{ct}{1-ct},$$

οπότε οι ζητούμενες λύσεις $y(t) = tv(t)$ είναι

$$y(t) = \frac{ct^2}{1 - ct} \tag{1.51}$$

με μια μη μηδενική σταθερά c. Βεβαίως, για δεδομένο c, αυτή η y αποτελεί λύση της εξίσωσης στα διαστήματα όπου ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός, $t \neq 1/c$. □

1.6 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση στη μορφή

$$y'(t) = -\frac{M(t, y(t))}{N(t, y(t))} \tag{1.52}$$

Αυτή λέγεται *πλήρης*, αν υπάρχει συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = M(t, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = N(t, y). \tag{1.53}$$

(Στο βιβλίο [6] χρησιμοποιείται ο όρος 'ακριβής' στη θέση του 'πλήρης'.)

Σημειώνουμε ότι η διαφορική εξίσωση (1.52) γράφεται πολλές φορές καταχρηστικά και ως

$$M(t, y)\, dt + N(t, y)\, dy = 0. \tag{1.54}$$

Τώρα, υποθέτοντας ότι η διαφορική εξίσωση (1.52) είναι πλήρης και ότι γνωρίζουμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (1.53), παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} f(t, y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot y'(t) \\ &= M(t, y(t)) + N(t, y(t))\, y'(t) = 0,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει αμέσως από την (1.52). Οδηγούμαστε έτσι στο συμπέρασμα ότι η $f(t, y(t))$ είναι σταθερή συνάρτηση

$$f(t, y(t)) = c, \tag{1.55}$$

με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. Αυτή η σχέση μας δίνει τις λύσεις y της διαφορικής εξίσωσης (1.52) σε πεπλεγμένη μορφή. Αν μπορούμε να επιλύσουμε την αλγεβρική εξίσωση (1.55) ως προς y, οδηγούμαστε σε λύσεις της (1.52) σε άμεση μορφή.

Το φυσιολογικό ερώτημα είναι τώρα, βεβαίως, πότε ικανοποιείται η (1.53) για κάποια συνάρτηση f και, σε καταφατική περίπτωση, με ποιον τρόπο μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια τέτοια συνάρτηση f.

Κατ' αρχάς, στην περίπτωση που οι συναρτήσεις M και N είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι άμεση: Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t},$$

γεγονός που είναι ισοδύναμο με τη σχέση

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{1.56}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (1.56) και θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε μια συνάρτηση f της μορφής

$$f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + g(y), \tag{1.57}$$

με άγνωστη τη συνάρτηση g, που να ικανοποιεί την (1.53). Από την (1.57) προκύπτει αμέσως ότι $\frac{\partial f}{\partial t} = M$. Επίσης, παραγωγίζοντας την (1.57) ως προς y, βλέπουμε ότι η $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ γράφεται στη μορφή

$$\int M_y(t,y)\,dt + g'(y) = N(t,y).$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση την M_y με N_t, βλ. την (1.56), λαμβάνουμε

$$\int N_t(t,y)\,dt + g'(y) = N(t,y)$$

ή

$$g'(y) = N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt.$$

Παρατηρούμε, τώρα, ότι το δεξιό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του y, οπότε οδηγούμαστε στη σχέση

$$g(y) = \int \Big[N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \Big] dy + C, \tag{1.58}$$

με μια αυθαίρετη σταθερά C. Οδηγηθήκαμε, επομένως, σε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την (1.57), οπότε η (1.52) είναι όντως πλήρης, όταν ισχύει η (1.56).

Επομένως, πάντα στην περίπτωση ομαλών συναρτήσεων M και N, η (1.52) είναι πλήρης, αν και μόνο αν οι M και N ικανοποιούν την (1.56).

Σημειώνουμε, ακόμα, ότι σε αυτήν την περίπτωση οδηγούμαστε και σε μια συνάρτηση f, που ικανοποιεί την (1.53), συνδυάζοντας τις (1.57) και (1.58),

$$f(t,y) = \int M(t,y)\,dt + \int \Big[N(t,y) - \int N_t(t,y)\,dt \Big] dy + C. \tag{1.59}$$

Παράδειγμα 1.9 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = -\frac{\mathrm{e}^{y(t)}}{t\mathrm{e}^{y(t)} + 2y(t)}. \tag{1.60}$$

Εισάγουμε τις συναρτήσεις $M(t, y) := \mathrm{e}^y$ και $N(t, y) := t\mathrm{e}^y + 2y$, και παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y) = \mathrm{e}^y,$$

οπότε η διαφορική εξίσωση (1.60) είναι πλήρης. Άρα, υπάρχει συνάρτηση $f(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \mathrm{e}^y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = t\mathrm{e}^y + 2y.$$

Για να προσδιορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση, παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \mathrm{e}^y \implies f(t, y) = t\mathrm{e}^y + g(y),$$

με μια αυθαίρετη συνάρτηση $g(y)$. Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = t\mathrm{e}^y + 2y$ καταλήγουμε στην ισότητα

$$t\mathrm{e}^y + g'(y) = t\mathrm{e}^y + 2y,$$

δηλαδή $g'(y) = 2y$, οπότε $g(y) = y^2 + c$, με μια αυθαίρετη σταθερά c. Οι σχέσεις αυτές μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$f(t, y) = t\mathrm{e}^y + y^2 + c, \tag{1.61}$$

με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. Επομένως, οι λύσεις της (1.60) δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή από την

$$t\mathrm{e}^{y(t)} + [y(t)]^2 = c, \tag{1.62}$$

με μια αυθαίρετη σταθερά c. □

1.6.1 Διαφορικές εξισώσεις που ανάγονται σε πλήρεις

Αν η διαφορική εξίσωση (1.52) δεν είναι πλήρης, μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να γραφεί ισοδύναμα ως πλήρης διαφορική εξίσωση, αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή στο δεξιό μέλος με κατάλληλη συνάρτηση μ, δηλαδή ενδέχεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = -\frac{\mu(t, y(t))M(t, y(t))}{\mu(t, y(t))N(t, y(t))} \tag{1.63}$$

να είναι πλήρης. Σε αυτήν την περίπτωση η αντίστοιχη συνάρτηση μ λέγεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (1.52). Σύμφωνα με όσα είδαμε προηγουμένως, μια συνάρτηση μ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της (1.52), αν και μόνο αν

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}$$

ή ισοδύναμα

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial t} + N\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{\mu}\Big(N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\Big) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{1.64}$$

Το θέμα τώρα είναι ότι ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης μ που να ικανοποιεί την (1.64) είναι, γενικά, πρόβλημα πολύ δυσκολότερο από την απ' ευθείας επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (1.52). Το θετικό, όμως, είναι ότι στην περίπτωση που υπάρχει συνάρτηση μ *μίας* μόνο μεταβλητής, της t ή της y, που ικανοποιεί την (1.64), αυτή μπορεί να προσδιοριστεί σχετικά εύκολα. Διακρίνουμε, λοιπόν, δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $\mu = \mu(t)$.
Τότε, η (1.64) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}. \tag{1.65}$$

Αν το δεξιό μέλος της (1.65) εξαρτάται μόνο από το t, δηλαδή είναι ανεξάρτητο του y, τότε η (1.65) είναι γραμμική Σ.Δ.Ε. και οι λύσεις της $\mu = \mu(t)$ είναι σταθερά πολλαπλάσια της

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\,dt}. \tag{1.66}$$

2η περίπτωση: $\mu = \mu(y)$.
Τότε, η (1.64) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}. \tag{1.67}$$

Αν το δεξιό μέλος της (1.67) εξαρτάται μόνο από το y, δηλαδή είναι ανεξάρτητο του t, τότε, όπως διαπιστώνουμε αμέσως, υπάρχει λύση της $\mu = \mu(y)$,

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{M}\,dy}. \tag{1.68}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, στην περίπτωση που το πηλίκο

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

είναι ανεξάρτητο του y, υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t)$, και δίνεται από την (1.66), και στην περίπτωση που το πηλίκο

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}$$

είναι ανεξάρτητο του t, υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(y)$, και δίνεται από την (1.68).

Παράδειγμα 1.10 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t)=-\frac{y(t)}{t^2y(t)-t}. \tag{1.69}$$

Εισάγουμε τις συναρτήσεις $M(t,y):=y$ και $N(t,y):=t^2y-t$, και παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)=1,\quad \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)=2ty-1,\quad \text{οπότε}\quad \frac{\partial M}{\partial y}(t,y)\neq\frac{\partial N}{\partial t},$$

συνεπώς η διαφορική εξίσωση (1.69) δεν είναι πλήρης.

Τώρα, η συνάρτηση

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{M}(t,y)=\frac{-2ty+2}{y}=-2t+\frac{2}{y}$$

δεν είναι ανεξάρτητη του t, συνεπώς δεν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(y)$ που να είναι συνάρτηση μόνο του y.

Όμως, η συνάρτηση

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N}(t,y)=\frac{-2ty+2}{t^2y-t}=-\frac{2}{t}$$

είναι ανεξάρτητη του y, οπότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t)$ που είναι συνάρτηση μόνο του t. Για να προσδιορίσουμε έναν τέτοιον ολοκληρωτικό παράγοντα, παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με την (1.65),

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}(t)=-\frac{2}{t}\quad \text{ή}\quad \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=-\frac{2}{t},$$

οπότε, με μηδενική σταθερά ολοκλήρωσης, αφού αρκεί να προσδιορίσουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα,

$$\log|\mu(t)| = -2\log|t| = \log\frac{1}{t^2} \quad \text{οπότε} \quad \mu(t) = \pm\frac{1}{t^2}.$$

Το πρόσημο δεν παίζει, προφανώς, κανένα ρόλο, αφού πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο παράγοντα, οπότε ας επιλέξουμε $\mu(t) = 1/t^2$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή στο δεξιό μέλος της (1.69) επί $1/t^2$, τη γράφουμε στη μορφή

$$y'(t) = -\frac{\frac{y(t)}{t^2}}{y(t) - \frac{1}{t}}, \tag{1.70}$$

η οποία, σύμφωνα με τα προηγούμενα, είναι πλήρης. Για να επιλύσουμε την (1.70), θα προσδιορίσουμε πρώτα μια συνάρτηση $f = f(t, y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \frac{y}{t^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{ty - 1}{t}.$$

Τώρα,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) = \frac{y}{t^2} \implies f(t, y) = \int \frac{y}{t^2}\,dt + g(y) = -\frac{y}{t} + g(y).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -\frac{1}{t} + g'(y),$$

οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$-\frac{1}{t} + g'(y) = \frac{ty - 1}{t}$$

ή $g'(y) = y$, άρα $g(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$, με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. Επομένως,

$$f(t, y) = -\frac{y}{t} + \frac{1}{2}y^2 + c,$$

και οι λύσεις $y(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (1.69) δίνονται πεπλεγμένα από τη σχέση

$$-\frac{y(t)}{t} + \frac{1}{2}[y(t)]^2 + c = 0,$$

με αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. □

Παρατήρηση 1.1 (Η γραμμική Δ.Ε. ανάγεται σε πλήρη.) Γράφουμε τη γραμμική Δ.Ε. $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$ στη μορφή

$$y'(t) = -\frac{M(t, y(t))}{N(t, y(t))}$$

με

$$M(t,y) = -p(t)y - q(t) \quad \text{και} \quad N(t,y) = 1.$$

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για μη μηδενική συνάρτηση p,

$$-p(t) = \frac{\partial M}{\partial y}(t,y) \neq \frac{\partial N}{\partial t}(t,y) = 0,$$

οπότε η Δ.Ε. δεν είναι πλήρης. (Για $p = 0$ η εξίσωση είναι, προφανώς, πλήρης και επιλύεται πολύ εύκολα.) Όμως, η συνάρτηση

$$\frac{1}{N(t,y)}\Big[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\Big] = -p(t)$$

είναι ανεξάρτηση του t, οπότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t)$ είναι η συνάρτηση

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int[-p(t)]\,dt} = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt},$$

βλ. την (1.66). Η γραμμική Δ.Ε. ανάγεται δηλαδή όντως σε πλήρη.

Προχωρούμε τώρα στην επίλυσή της, χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητά της. Με τον συγκεκριμένο ολοκληρωτικό παράγοντα τη γράφουμε πρώτα στη μορφή

$$y'(t) = -\frac{\mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}\big[-p(t)y - q(t)\big]}{\mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}} = -\frac{\widetilde{M}(t,y(t))}{\widetilde{N}(t,y(t))},$$

με προφανή συμβολισμό για τις συναρτήσεις $\widetilde{M}$ και $\widetilde{N}$. Αναζητούμε τώρα μια συνάρτηση $f = f(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = \widetilde{M}(t,y) = -\big[p(t)y + q(t)\big]\mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = \widetilde{N}(t,y) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}.$$

Από τη δεύτερη σχέση συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$f(t,y) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}y + g(t)$$

με μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση g. Παραγωγίζοντας αυτή τη σχέση ως προς t και συγκρίνοντας με την πρώτη από τις παραπάνω δύο σχέσεις, συμπεραίνουμε ότι

$$g'(t) = -q(t)\mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}, \quad \text{οπότε, π.χ.,} \quad g(t) = -\int q(t)\mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}\,dt,$$

με μια αυθαίρετη σταθερά a (στο πεδίο ορισμού των συναρτήσεων p και q). Επομένως, μια επιλογή για την f (μοναδική, αν παραβλέψει κανείς προσθετικές σταθερές) είναι η

$$f(t,y) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}y - \int q(t)\mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}\,dt.$$

Κατά τα γνωστά, οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται τότε σε πεπλεγμένη μορφή από τις σχέσεις $f(t, y(t)) = C$, δηλαδή

$$\mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt} y(t) - \int q(t)\mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}\,dt = C,$$

με μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά C. Η εν λόγω εξίσωση είναι γραμμική ως προς την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ και επομένως επιλύεται εύκολα και οδηγεί στη σχέση

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}\Big[C + \int q(t)\mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}\,dt\Big],$$

δηλαδή στον γνωστό μας τύπο για τις λύσεις γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Βεβαίως, αυτή η διαδικασία επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. είναι πολύ πιο πολύπλοκη από τις δύο διαδικασίες που είδαμε στην παράγραφο 1.7 και στις Ασκήσεις 1.1 και 1.2, αντίστοιχα. Ο μόνος ουσιαστικός λόγος που αναφερθήκαμε και στη συγκεκριμένη διαδικασία επίλυσης γραμμικών Δ.Ε. είναι για να δικαιολογήσουμε τη χρήση του όρου “ολοκληρωτικός παράγοντας” τόσο για πλήρεις όσο και για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις· όπως είδαμε, οι γραμμικές ανάγονται σε πλήρεις. □

1.7 Γραμμικά συστήματα Σ.Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές

Θα μελετήσουμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών για γραμμικά συστήματα n διαφορικών εξισώσεων με n άγνωστες συναρτήσεις, δηλαδή

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y^{(0)}. \end{cases} \tag{1.71}$$

Εδώ $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις, με συνιστώσες $y_1(t), \dots, y_n(t)$ και $f_1(t), \dots, f_n(t)$, αντίστοιχα, η πρώτη συνεχώς παραγωγίσιμη και η δεύτερη συνεχής, και $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n,n}$ είναι μια συνεχής πινακοσυνάρτηση,

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{1.72}$$

$t \in [a, b]$.

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.71) αποτελεί γενίκευση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.2),

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y_0, \end{cases} \tag{1.73}$$

για γραμμικές βαθμωτές διαφορικές εξισώσεις. Αν οι p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, τότε, όπως γνωρίζουμε, το πρόβλημα (1.73) έχει μία ακριβώς λύση, η οποία μάλιστα δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds} y_0 + \int_a^t q(s)\mathrm{e}^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau}\,ds, \quad a \le t \le b. \tag{1.74}$$

Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.71) έχει ακριβώς μία λύση, αφού ικανοποιείται η ολική συνθήκη του Lipschitz· βλ. το πρόβλημα (1.21) στο [1].

Ένα πρώτο φυσιολογικό ερώτημα είναι, λοιπόν, κατά πόσον η λύση του (1.71) δίνεται από έναν τύπο αντίστοιχο του (1.74) στη βαθμωτή περίπτωση. Βεβαίως, πριν δώσουμε οποιαδήποτε απάντηση σε αυτό το ερώτημα, πρέπει να πούμε τι εννοούμε με εκφράσεις της μορφής e^A για τετραγωνικούς πίνακες A. Η απάντηση στο ανωτέρω ερώτημα είναι γενικά αρνητική. Είναι καταφατική μόνο στην περίπτωση που οι πίνακες $A(t)$ και $A(s)$ αντιμετατίθενται, για οποιαδήποτε t και s στο $[a, b]$, παραδείγματος χάριν αν είναι της μορφής $A(t) = p(t)A$, με μια βαθμωτή συνάρτηση p και έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Θα ασχοληθούμε στη συνέχεια με μια ειδική περίπτωση στην οποία αυτό προφανώς συμβαίνει, όταν $A(t) = A$, με πίνακα A ανεξάρτητο του t,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad a \le t \le b, \\ y(a) = y^{(0)}. \end{cases} \tag{1.75}$$

Ένα άλλο ενδιαφέρον ζήτημα είναι κατά πόσον τύποι αντίστοιχοι του (1.74), στην περίπτωση που ισχύουν για το πρόβλημα (1.75), είναι εύχρηστοι ή απαιτείται περαιτέρω προσπάθεια για να τους μετατρέψουμε σε εύχρηστους. Τέτοια θέματα θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

1.7.1 Συνοπτική παρουσίαση

Σε αυτήν την ενότητα θα αρκεσθούμε σε μια συνοπτική αντιμετώπιση του θέματος. Διεξοδική ανάπτυξη του θέματος δίνεται στις επόμενες παραγράφους.

Το ομογενές σύστημα. Αρχίζουμε τη μελέτη μας με το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.76}$$

δηλαδή για το ομογενές σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, αντίστοιχο του συστήματος στο (1.75). Υποθέσαμε, για απλότητα στους συμβολισμούς, ότι η αρχική συνθήκη δίνεται στο σημείο μηδέν· αυτό δεν αποτελεί περιορισμό της γενικότητας, αφού η γενική περίπτωση, με την αρχική συνθήκη σε ένα σημείο a, ανάγεται στην (1.76) με την αλλαγή μεταβλητής $t = s + a$. Σημειώστε ότι το πρόβλημα παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο για μη μηδενική αρχική τιμή $y^{(0)}$, αφού διαφορετικά η λύση είναι η μηδενική διανυσματική συνάρτηση, $y(t) = 0$.

Με κίνητρο το γεγονός ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

στη βαθμωτή περίπτωση, είναι $y(t) = \mathrm{e}^{at} y_0$, ας εξετάσουμε κατ' αρχάς κατά πόσον, σε κάποιες περιπτώσεις, μια διανυσματική συνάρτηση της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

με κατάλληλη σταθερά $\lambda \in \mathbb{C}$, αποτελεί λύση του προβλήματος (1.76).

Κατ' αρχάς, προφανώς, η αρχική συνθήκη ικανοποιείται, για οποιαδήποτε επιλογή του λ.

Ας δούμε, λοιπόν, πότε μια τέτοια διανυσματική συνάρτηση ικανοποιεί και το σύστημα διαφορικών στο (1.76). Έχουμε

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)} \implies y'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)},$$

συνεπώς η εν λόγω y ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $y'(t) = Ay(t)$, αν και μόνο αν

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)} = A \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)} = \mathrm{e}^{\lambda t} A y^{(0)},$$

ή, ισοδύναμα,

$$Ay^{(0)} = \lambda y^{(0)}.$$

Οδηγηθήκαμε έτσι στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση $y^{(0)} \neq 0$ (αφού η περίπτωση $y^{(0)} = 0$ δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον, όπως αναφέραμε ήδη) η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.76) είναι της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.77}$$

αν και μόνο αν το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και το $y^{(0)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην γενικότερη περίπτωση που η αρχική τιμή $y^{(0)}$ είναι γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A: Έστω, λοιπόν, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ιδιοτιμές του πίνακα A και $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, και

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \cdots + c_m x^{(m)},$$

με σταθερές $c_1, \dots, c_m$. Ισχυριζόμαστε, τότε, ότι η λύση y του (1.76) είναι

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \cdots + c_m \mathrm{e}^{\lambda_m t} x^{(m)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.78}$$

Πράγματι, κατ' αρχάς, η εν λόγω συνάρτηση ικανοποιεί, προφανώς, την αρχική συνθήκη. Όσον αφορά, τώρα, το σύστημα διαφορικών εξισώσεων, έχουμε αφ' ενός

$$y'(t) = c_1 \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \cdots + c_m \lambda_m \mathrm{e}^{\lambda_m t} x^{(m)}$$

και αφ' ετέρου, αφού $Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} Ay(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} A x^{(1)} + \cdots + c_m \mathrm{e}^{\lambda_m t} A x^{(m)} \\ &= c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \lambda_1 x^{(1)} + \cdots + c_m \mathrm{e}^{\lambda_m t} \lambda_m x^{(m)}, \end{aligned}$$

δηλαδή, όντως, $y'(t) = Ay(t), t \in \mathbb{R}$.

Σημειώστε ότι ενώ κάποια από τα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$ μπορεί να είναι μιγαδικά και κάποιοι από τους συντελεστές $c_1, \dots, c_m$ μιγαδικοί αριθμοί, ο γραμμικός συνδυασμός τους (1.78) δίνει πραγματική διανυσματική συνάρτηση, στην περίπτωση που $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Υπόθεση. Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in \mathbb{C}^n$. (Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A συμπίπτουν· ιδιαίτερα, όταν όλες οι ιδιοτιμές του A είναι απλές.)

Τότε τα διανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$, οπότε κάθε αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \cdots + c_n x^{(n)}, \tag{1.79}$$

με c_i μιγαδικές, γενικά, σταθερές. (Σημειώστε ότι, για δεδομένο $y^{(0)}$, το (1.79) είναι ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τα c_i, και αντιστρέψιμο πίνακα συντελεστών $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, με στήλες τα $x^{(i)}$.) Σε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με τα προηγούμενα, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.76) είναι

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} x^{(1)} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} x^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.80}$$

όπου λ_i ιδιοτιμή του A και $x^{(i)}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Σημείωση. Στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη τίθεται σε ένα σημείο a, $y(a) = y^{(0)}$, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 (t-a)} x^{(1)} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n (t-a)} x^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.81}$$

Γενική περίπτωση. Ας δούμε τώρα τι μπορούμε να πούμε για την παράσταση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (1.76) στη γενική περίπτωση κατά την οποία η αρχική τιμή $y^{(0)}$ *δεν* γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A. Αυτό συμβαίνει, τουλάχιστον για κάποια αρχική τιμή $y^{(0)}$, αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής του A είναι (γνήσια) μικρότερη της αντίστοιχης αλγεβρικής πολλαπλότητας. Τότε η λύση δεν μπορεί να παρασταθεί στη μορφή (1.81), οπότε πρέπει να αναζητήσουμε κάποια εναλλακτική παράστασή της.

Πάλι με κίνητρο το γεγονός ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

στη βαθμωτή περίπτωση, είναι $y(t) = \mathrm{e}^{at} y_0$, είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς μήπως και η διανυσματική συνάρτηση

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.82}$$

αποτελεί λύση του προβλήματος (1.76). Βεβαίως, πριν απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, πρέπει να πούμε τι εννοούμε με την έκφραση e^A, για κάποιον τετραγωνικό πίνακα A.

Ακριβώς αντίστοιχα με την εκθετική συνάρτηση $\mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$, ορίζεται και η *εκθετική συνάρτηση πινάκων* $A \in \mathbb{C}^{n,n}$,

$$\mathrm{e}^A := I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^\ell}{\ell!} + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell}{\ell!}.$$

Οι σχέσεις $\mathrm{e}^0 = I_n$ και $\mathrm{e}^{\lambda I_n} = \mathrm{e}^\lambda I_n$, για κάθε μιγαδικό αριθμό λ, είναι άμεση απόρροια του ορισμού. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η πινακοσυνάρτηση e^{tA} είναι παραγωγίσιμη και η αντίστοιχη σειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο, οπότε

$$\big(\mathrm{e}^{tA}\big)' = A\mathrm{e}^{tA}.$$

Σημειώνουμε ακόμα ότι $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$, αν οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται, $AB = BA$.

Ύστερα από αυτήν την προεργασία, ισχυριζόμαστε τώρα ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.76) δίνεται από την (1.82). Πράγματι, κατ' αρχάς ικανοποιείται η αρχική συνθήκη, αφού

$$y(0) = \mathrm{e}^{0A} y^{(0)} = \mathrm{e}^0 y^{(0)} = I_n y^{(0)} = y^{(0)}.$$

Επίσης,

$$y'(t) = \big(\mathrm{e}^{tA} y^{(0)}\big)' = \big(\mathrm{e}^{tA}\big)' y^{(0)} = A\mathrm{e}^{tA} y^{(0)} = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή ικανοποιείται και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων.

Σημείωση. Στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη τίθεται σε ένα σημείο a, $y(a) = y^{(0)}$, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται στη μορφή

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A} y^{(0)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.83}$$

Το ενδιαφέρον πρόβλημα είναι τώρα με ποιον τρόπο υπολογίζουμε την παράσταση $\mathrm{e}^{tA} y^{(0)}$ στην (1.82) (οπότε και την αντίστοιχη παράσταση στην (1.83)); Αφήνουμε, προς το παρόν, σε εκκρεμότητα αυτό το θέμα για να ασχοληθούμε εν συντομία με το πρόβλημα αρχικών τιμών για το μη ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Το μη ομογενές σύστημα. Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών για το μη ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.84}$$

με την αρχική τιμή δεδομένη στο σημείο μηδέν, πάλι για ευκολία.

Δεδομένου ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.76) είναι $\mathrm{e}^{tA} y^{(0)}$, βλ. την (1.82), θα προσπαθήσουμε, με την τεχνική της μεταβολής των σταθερών, να παραστήσουμε τη λύση του (1.84) στη μορφή

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} v(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

με κατάλληλη διανυσματική συνάρτηση v. Κατ' αρχάς, για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(0) = y^{(0)}$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $v(0) = y^{(0)}$. Επίσης,

$$y'(t) = \big(\mathrm{e}^{tA} v(t)\big)' = \big(\mathrm{e}^{tA}\big)' v(t) + \mathrm{e}^{tA} v'(t) = A\mathrm{e}^{tA} v(t) + \mathrm{e}^{tA} v'(t) = Ay(t) + \mathrm{e}^{tA} v'(t),$$

οπότε η $y'(t) = Ay(t) + f(t)$ ικανοποιείται, αν και μόνο αν $\mathrm{e}^{tA} v'(t) = f(t)$. Γράφουμε αυτή τη σχέση στη μορφή $\mathrm{e}^{sA} v'(s) = f(s)$ ή $v'(s) = \mathrm{e}^{-sA} f(s)$, ολοκληρώνουμε από 0 έως t και, χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $v(0) = y^{(0)}$, λαμβάνουμε

$$v(t) - y^{(0)} = \int_0^t \mathrm{e}^{-sA} f(s)\, ds,$$

δηλαδή

$$v(t) = y^{(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{-sA} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, συμπεραίνουμε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.84) είναι

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} v(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)} + \mathrm{e}^{tA} \int_0^t \mathrm{e}^{-sA} f(s)\, ds,$$

δηλαδή

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.85}$$

σε πλήρη αναλογία με την αντίστοιχη βαθμωτή διαφορική εξίσωση $y'(t) = ay(t) + f(t)$.

Σημείωση. Στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη τίθεται σε ένα σημείο a, $y(a) = y^{(0)}$, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών δίνεται στη μορφή

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A} y^{(0)} + \int_a^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.86}$$

Υπολογισμός της παράστασης $\mathrm{e}^{tA} y^{(0)}$ ***στην*** (1.82). Επιστρέφουμε τώρα στο θέμα που αφήσαμε σε εκκρεμότητα, δηλαδή με ποιον τρόπο υπολογίζουμε την παράσταση $\mathrm{e}^{tA} y^{(0)}$ στην (1.82).

Ισοδύναμα, θα ασχοληθούμε με τον υπολογισμό της έκφρασης

$$\mathrm{e}^{tA} x, \quad \text{για δεδομένο } x \in \mathbb{C}^n, \quad \text{για } t \in \mathbb{R}. \tag{1.87}$$

Αρχίζουμε με κάποια προεργασία, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις:

$1^{\underline{\eta}}$ περίπτωση: Το x είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ.

Τότε, αφού οι πίνακες $A - \lambda I_n$ και I_n, προφανώς, αντιμετατίθενται, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} x &= \mathrm{e}^{\lambda t I_n} \mathrm{e}^{t(A-\lambda I_n)} x = \mathrm{e}^{\lambda t} I_n \mathrm{e}^{t(A-\lambda I_n)} x = \mathrm{e}^{\lambda t} \mathrm{e}^{t(A-\lambda I_n)} x \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t} \Big[I_n x + t(A - \lambda I_n)x + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I_n)^2 x + \cdots \Big], \end{aligned}$$

οπότε, αφού $(A - \lambda I_n)x = 0$ και συνεπώς και $(A - \lambda I_n)^\ell x = 0$, για κάθε φυσικό αριθμό ℓ, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{e}^{tA} x = \mathrm{e}^{\lambda t} x. \tag{1.88}$$

Καταλήξαμε, έτσι, σε μια γνωστή μας παράσταση, για την περίπτωση που η αρχική τιμή $y^{(0)}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A.

$2^{\underline{\eta}}$ περίπτωση: Το x είναι τέτοιο ώστε $(A - \lambda I_n)^m x = 0$, για κάποια ιδιοτιμή λ του πίνακα A και έναν φυσικό αριθμό m.

Τότε, όπως προηγουμένως, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} x &= \mathrm{e}^{\lambda t} \mathrm{e}^{t(A-\lambda I_n)} x \\ &= \mathrm{e}^{\lambda t} \Big[I_n x + t(A - \lambda I_n)x + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I_n)^2 x + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda I_n)^{m-1} x \\ &\quad + \frac{t^m}{m!}(A - \lambda I_n)^m x + \cdots \Big], \end{aligned}$$

οπότε, αφού $(A-\lambda I_n)^\ell x = 0$, για κάθε φυσικό αριθμό $\ell \ge m$, συμπεραίνουμε ότι

$$\text{(1.89)}\quad \mathrm{e}^{tA}x = \mathrm{e}^{\lambda t}\Big[I_n x + t(A-\lambda I_n)x + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I_n)^2 x + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I_n)^{m-1}x\Big].$$

Στην περίπτωση που υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που παράγουν τον $\mathbb{C}^n$ (δηλαδή όταν η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A συμπίπτουν), ο υπολογισμός της λύσης $\mathrm{e}^{tA}y^{(0)}$ απαιτεί μόνο τις πράξεις που αναφέρονται στην $1\underline{\eta}$ περίπτωση. Αυτό ισχύει, ιδιαίτερα, όταν οι ιδιοτιμές του A είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους (οπότε η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ένα).

Σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή όταν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής του A είναι μικρότερη από την αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητα, δεν αρκούν τα ιδιοδιανύσματα του A για τον σχηματισμό μιας βάσης του $\mathbb{C}^n$ και χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε και τα λεγόμενα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα* του πίνακα A: Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A αλγεβρικής πολλαπλότητας m. Τότε τα μη μηδενικά διανύσματα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε

$$\text{(1.90)}\qquad (A-\lambda I_n)^m x = 0$$

λέγονται γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A ως προς την ιδιοτιμή λ. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι, για κάθε ιδιοτιμή λ του πίνακα A αλγεβρικής πολλαπλότητας m, υπάρχουν m αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα και ότι γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια, υπάρχει βάση του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενη από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Για να υπολογίσει κανείς m γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A ως προς την ιδιοτιμή λ, αρκεί να προσδιορίσει m γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του γραμμικού συστήματος (1.90). Εναλλακτικά, μπορεί να ακολουθήσει κανείς τα ακόλουθα βήματα για κάθε ιδιοτιμή λ:

1. Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα

$$\text{(1.91)}\qquad (A-\lambda I_n)x = 0$$

και προσδιορίζουμε τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A όση είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ (αυτός είναι ο ορισμός της γεωμετρικής πολλαπλότητας της ιδιοτιμής λ).

Αν η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ συμπίπτουν, σταματούμε εδώ. Έχουμε ήδη προσδιορίσει όσα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς την ιδιοτιμή

λ χρειαζόμαστε. Διαφορετικά, δηλαδή αν η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι μικρότερη της αντίστοιχης αλγεβρικής πολλαπλότητας, συνεχίζουμε στο δεύτερο βήμα:

2. Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα

$$(A - \lambda I_n)^2 x = 0 \tag{1.92}$$

και προσδιορίζουμε όσο περισσότερα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A μπορούμε, τα οποία μαζί με τα ιδιοδιανύσματα που βρήκαμε στο πρώτο βήμα να αποτελούν ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Είναι γνωστό ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A, οπότε ο συνολικός πληθικός αριθμός του συνόλου των λύσεων που προσδιορίσαμε στα βήματα ένα και δύο είναι (τουλάχιστον) η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ αυξημένη κατά ένα.

Αν ο πληθικός αριθμός του συνόλου των λύσεων που βρήκαμε στα δύο πρώτα βήματα ισούται με την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ, σταματούμε εδώ. Έχουμε ήδη προσδιορίσει όσα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς την ιδιοτιμή λ χρειαζόμαστε. Διαφορετικά, συνεχίζουμε στο τρίτο βήμα:

3. Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα

$$(A - \lambda I_n)^3 x = 0 \tag{1.93}$$

και προσδιορίζουμε όσο περισσότερα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A μπορούμε, τα οποία μαζί με τις λύσεις που βρήκαμε στα δύο πρώτα βήματα να αποτελούν ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Είναι γνωστό ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A, οπότε ο συνολικός πληθικός αριθμός του συνόλου των λύσεων που προσδιορίσαμε στα βήματα ένα, δύο και τρία είναι (τουλάχιστον) ο συνολικός πληθικός αριθμός του συνόλου των λύσεων που προσδιορίσαμε στα βήματα ένα και δύο αυξημένος κατά ένα.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Από τα προαναφερθέντα προκύπτει ότι αρκεί να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα το πολύ έως της μορφής

$$(A - \lambda I_n)^\ell x = 0,$$

όπου ℓ (το πολύ) όσο η διαφορά της αλγεβρικής μείον τη γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ, αυξημένη κατά ένα. Με άλλα λόγια, δεν είναι πάντα απαραίτητο να επιλύσουμε γραμμικά συστήματα της μορφής (1.90), με m την αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ήδη προσδιορίσει n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ του πίνακα A. Τότε, κάθε αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$,

$$y^{(0)} = c_1 x^{(1)} + \cdots + c_n x^{(n)},$$

οπότε η λύση $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.76) θα είναι

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)} = c_1 \mathrm{e}^{tA} x^{(1)} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{tA} x^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.94}$$

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στις περιπτώσεις $1\underline{\eta}$ και $2\underline{\eta}$ γνωρίζουμε πώς να υπολογίσουμε τα $\mathrm{e}^{tA} x^{(i)}$, αφού τα $x^{(i)}$ είναι (γενικευμένα) ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, συνεπώς γνωρίζουμε και πώς να υπολογίσουμε τη λύση $y(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)}$.

Στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη δίνεται σε ένα σημείο a, οι απαραίτητες τροποποιήσεις είναι προφανείς.

Σημείωση. Με τον συμβολισμό της (1.94), είναι προφανές ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\varphi^{(i)}(t) := \mathrm{e}^{tA} x^{(i)}, t \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$, αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του γραμμικού συστήματος Δ.Ε. $y'(t) = Ay(t)$. Μάλιστα, οι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των λύσεων αποτελούν τη γενική λύση του $y'(t) = Ay(t)$, αφού για αυθαίρετη αρχική τιμή $y^{(0)}$ η λύση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\varphi^{(i)}, i = 1, \dots, n$. Η σημαντική ιδιότητα εδώ είναι η γραμμική ανεξαρτησία των $x^{(i)}, i = 1, \dots, n$. Η επιλογή των $x^{(i)}, i = 1, \dots, n$, ως γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A γίνεται για πρακτικούς λόγους· μας διευκολύνει στον υπολογισμό των $\varphi^{(i)}, i = 1, \dots, n$. □

Θα ολοκληρώσουμε αυτή τη συνοπτική παρουσίαση με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.11 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γενική λύση του γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{με πίνακα } A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.95}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του πίνακα A είναι $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$. Αφού οι διαιρέτες του 6 είναι οι $1, 2, 3$, αν υπάρχουν *ακέραιες* ρίζες του p, τότε αυτές θα είναι κάποιες από τις $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. Δοκιμάζοντας, διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. (Σημειώστε ακόμα ότι, αφού το άθροισμα των συντελεστών του p είναι μηδέν, η μονάδα είναι ρίζα του p. Διαιρώντας το p με το $\lambda - 1$ οδηγούμαστε σε ένα τριώνυμο και προσδιορίζουμε και τις άλλες δύο ρίζες του p.) Οι ιδιοτιμές είναι, δηλαδή, όντως πραγματικές και ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους.

Θα προσδιορίσουμε, τώρα, αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

α) $\lambda_1 = 1$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$ ή $(A - I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \left.\begin{aligned} -v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 3v_1 + v_2 - \ v_3 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις λαμβάνουμε $v_1 + v_3 = 0$, δηλαδή $v_1 = -v_3$, ενώ η πρώτη δίνει $v_2 = 4v_3$. Επομένως, επιλέγοντας αυθαίρετα μια μη μηδενική τιμή για το v_3, προσδιορίζουμε τα v_1 και v_2. Ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι, φερ' ειπείν, το

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την (1.77), μια λύση του (1.95) είναι η

$$\varphi^{(1)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.96}$$

β) $\lambda_2 = 3$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_2 I_3)v = 0$ ή $(A - 3I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \left.\begin{aligned} -2v_1 - v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 3v_1 - v_2 - \ v_3 &= 0 \\ 2v_1 + v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

ή $v_1 = v_3, v_2 = 2v_3$. Επομένως, ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

οπότε μια μη τετριμμένη λύση του (1.95) είναι η

$$\varphi^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.97}$$

γ) $\lambda_3 = -2$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_3 I_3)v = 0$ ή $(A + 2I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \left.\begin{aligned} 3v_1 - \ \ v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 3v_1 + 4v_2 - \ \ v_3 &= 0 \\ 2v_1 + \ \ v_2 + \ \ v_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

ή $v_1 = -v_3$, $v_2 = v_3$. Επομένως, ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

οπότε μια μη τετριμμένη λύση του (1.95) είναι η

$$\varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.98}$$

Από τις (1.96), (1.97) και (1.98) προκύπτει, σύμφωνα με την (1.80), ότι η γενική λύση $y(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.95) είναι

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} - c_3\mathrm{e}^{-2t} \\ 4c_1\mathrm{e}^t + 2c_2\mathrm{e}^{3t} + c_3\mathrm{e}^{-2t} \\ c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + c_3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \tag{1.99}$$

$t \in \mathbb{R}$, με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές c_1, c_2 και c_3. □

Παράδειγμα 1.12 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γενική λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{με πίνακα } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.100}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του πίνακα A είναι $p(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2$, συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$ (απλή) και $\lambda_2 = 1$ (διπλή). (Σημειώστε ότι οι ιδιοτιμές άνω ή κάτω τριγωνικών πινάκων είναι, προφανώς, τα διαγώνια στοιχεία τους.)

α) $\lambda_1 = 2$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$ ή $(A - 2I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_1 = v_2 = 0$ και v_3 αυθαίρετος, μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Επιλέγοντας ως v_3 τη μονάδα, $v_3 = 1$, οδηγούμαστε, σύμφωνα με την (1.77), στη λύση

$$\varphi^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.101}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.100).

β) $\lambda_2 = 1$: Ζητούμε κατ' αρχάς αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_2 I_3)v = 0$ ή $(A - I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_2 = v_3 = 0$ και v_1 αυθαίρετος, μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Επιλέγοντας ως v_1 τη μονάδα, $v_1 = 1$, οδηγούμαστε, σύμφωνα με την (1.77), στη λύση

$$\varphi^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.102}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.100).

Τώρα, η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_2 είναι δύο ενώ, όπως είδαμε μόλις, υπάρχει μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα· με άλλα λόγια, η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_2 είναι ένα. Έτσι, αναζητούμε στη συνέχεια γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(A - I_3)^2 v = 0$ και $(A - I_3)v \neq 0$. Τώρα, $(A - I_3)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, οπότε το γραμμικό σύστημα $(A - I_3)^2 v = 0$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

από την οποία προκύπτει $v_3 = 0$ ενώ οι συνιστώσες v_1 και v_2 είναι αυθαίρετοι αριθμοί, όχι και οι δύο ίσοι με μηδέν. Φερ' ειπείν, για $v_1 = 0$ και $v_2 = 1$ οδηγούμαστε σε μια λύση, η οποία δεν είναι, όπως γνωρίζουμε, ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2. Αυτή η επιλογή οδηγεί στη λύση

$$\varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^{t}\big[v + t(A - I_2)v\big] = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.103}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.100)· βλ. την (1.89).

Από τις (1.101), (1.102) και (1.103) προκύπτει ότι η γενική λύση $y(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.100) είναι

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$y(t) = \begin{pmatrix} (c_2 + c_3 t)\mathrm{e}^t \\ c_3 \mathrm{e}^t \\ c_1 \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.104}$$

με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές c_1, c_2 και c_3. □

1.7.2 Η εκθετική συνάρτηση τετραγωνικών πινάκων

Ύστερα από τη συνοπτική παρουσίαση του θέματος της επίλυσης γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων στην προηγούμενη ενότητα, αρχίζουμε τη διεξοδική μελέτη του θέματος επεκτείνοντας τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης $\mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$, για τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες, ορίζουμε δηλαδή την εκθετική συνάρτηση τετραγωνικών πινάκων ως

$$\mathrm{e}^A := I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^\ell}{\ell!} + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell}{\ell!} \tag{1.105}$$

για $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ο πίνακας e^A είναι καλά ορισμένος· ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης ας ασχοληθεί με την Άσκηση 1.17 του [1].

Οι πίνακες e^A έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες: Για $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύουν

α) $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-tA}$.

β) $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}$.

γ) $\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$, αν οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται, $AB = BA$.

Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι οι ιδιότητες α) και β) έπονται από τη γ). Επίσης, η ιδιότητα γ) είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}$, αν οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται και θα χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο Cauchy για τον πολλαπλασιασμό σειρών (δεδομένου ότι οι εν λόγω σειρές συγκλίνουν απόλυτα) για να αποδείξουμε τη γ), χωρίς περιορισμό της γενικότητας για $t = 1$: Έχουμε

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{A^{\ell}}{\ell!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B^{\ell}}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\ell}\frac{A^{\ell-k}}{(\ell-k)!}\frac{B^{k}}{k!}\Big) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{\ell!}(A+B)^{\ell} = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Επίσης, αποδεικνύεται εύκολα ότι η παραγώγιση της e^{tA} μπορεί να γίνει όρο προς όρο (βλ. [1, Άσκηση 1.17]), οπότε έχουμε

$$\big(\mathrm{e}^{tA}\big)' = A + tA^2 + \cdots + t^{\ell}\frac{A^{\ell+1}}{\ell!} + \cdots = A\Big(I_n + tA^2 + \cdots + t^{\ell}\frac{A^{\ell}}{\ell!} + \cdots\Big),$$

δηλαδή, εντελώς αντίστοιχα προς τη βαθμωτή περίπτωση,

$$\big(\mathrm{e}^{tA}\big)' = A\mathrm{e}^{tA}. \tag{1.106}$$

Αυτή η σχέση μας οδηγεί πολύ εύκολα σε μια πρώτη παράσταση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών για το ομογενές σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad a \le t \le b,\\ y(a) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.107}$$

με $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ έναν σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο του t) πίνακα. Ισχυριζόμαστε ότι η λύση $y(t)$ του (1.107) είναι

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A}y^{(0)}, \quad a \le t \le b. \tag{1.108}$$

Πράγματι, σύμφωνα με την (1.106), διαπιστώνουμε αμέσως ότι αυτή η y ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων στην (1.107), αφού

$$y'(t) = \big(\mathrm{e}^{(t-a)A}\big)'y^{(0)} = \big(\mathrm{e}^{tA}\big)'\mathrm{e}^{-aA}y^{(0)} = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{-aA}y^{(0)} = A\mathrm{e}^{(t-a)A}y^{(0)} = Ay(t).$$

Επί πλέον, ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, αφού $\mathrm{e}^{0} = I_n$, οπότε $y(a) = \mathrm{e}^{0\cdot A}y^{(0)} = I_n y^{(0)} = y^{(0)}$.

Μικρή ακόμα προσπάθεια, μας οδηγεί και στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για το μη ομογενές σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές,

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \quad a \le t \le b,\\ y(a) = y^{(0)}. \end{cases} \tag{1.109}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η λύση $y(t)$ του (1.109) είναι

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A}\Big[y^{(0)} + \int_a^t \mathrm{e}^{-(s-a)A} f(s)\,ds\Big], \quad a \le t \le b, \tag{1.110}$$

ή ισοδύναμα

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A} y^{(0)} + \int_a^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\,ds, \quad a \le t \le b. \tag{1.111}$$

Σημειώστε την πλήρη αναλογία των (1.108) και (1.110) με τις αντίστοιχες παραστάσεις των λύσεων των προβλημάτων αρχικών τιμών για τις βαθμωτές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, την ομογενή $y'(t) = ay(t)$ και τη μη ομογενή $y'(t) = ay(t) + f(t)$, αντίστοιχα.

Στην (1.110) θα οδηγηθούμε με την τεχνική της *μεταβολής των σταθερών*: Έχοντας ως κίνητρο την παράσταση (1.108) της λύσης του ομογενούς προβλήματος, θα προσπαθήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε μια λύση του μη ομογενούς (1.109) της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-a)A} v(t), \quad a \le t \le b, \tag{1.112}$$

με μια κατάλληλη διανυσματική συνάρτηση $v(t)$. Σημειώστε τη διαφορά μεταξύ των (1.108) και (1.112): στην πρώτη το διάνυσμα $y^{(0)}$ είναι σταθερό, στη δεύτερη η $v(t)$ είναι διανυσματική συνάρτηση, μεταβάλλεται δηλαδή με το t. Σε αυτό το γεγονός οφείλει την ονομασία της η εν λόγω τεχνική.

Για να οδηγηθούμε τώρα στη λύση, αρκεί να προσδιορίσουμε τη διανυσματική συνάρτηση $v(t)$. Κατ' αρχάς, έχουμε $y(a) = v(a)$, συνεπώς $v(a) = y^{(0)}$. Επίσης, το σύστημα διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.109) γράφεται, χρησιμοποιώντας την (1.112), στη μορφή

$$A\mathrm{e}^{(t-a)A} v(t) + \mathrm{e}^{(t-a)A} v'(t) = A\mathrm{e}^{(t-a)A} v(t) + f(t),$$

δηλαδή $\mathrm{e}^{(t-a)A} v'(t) = f(t)$ ή

$$v'(t) = \mathrm{e}^{-(t-a)A} f(t), \quad a \le t \le b. \tag{1.113}$$

Η σημασία της αντικατάστασης (1.112) συνίσταται ακριβώς στο γεγονός ότι οδηγεί στην πολύ απλή διαφορική εξίσωση (1.113) για τη v, που μπορεί να επιλυθεί απλούστατα με ολοκλήρωση, αφού η v δεν εμφανίζεται στο δεξιό μέλος. Πράγματι, θεωρώντας την (1.113), με s στη θέση του t, ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[a, t]$, με $a \le t \le b$, και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $v(a) = y^{(0)}$, λαμβάνουμε

$$v(t) = y^{(0)} + \int_a^t \mathrm{e}^{-(s-a)A} f(s)\,ds, \quad a \le t \le b. \tag{1.114}$$

Οι (1.112) και (1.114) δίνουν αμέσως την επιθυμητή παράσταση (1.110).

Το μόνο μειονέκτημα της παράστασης (1.108) της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) για το ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές είναι ότι δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστη, αφού ο υπολογισμός του πίνακα $\mathrm{e}^{(t-a)A}$ απαιτεί τον υπολογισμό των δυνάμεων του πίνακα A.

Θα προσπαθήσουμε, στη συνέχεια, να απλουστεύσουμε λίγο αυτήν την παράσταση· περισσότερα θα δούμε στην επόμενη υποενότητα. Συγκεκριμένα, θα δούμε με ποιον τρόπο απλοποιείται ο υπολογισμός είτε του πίνακα e^{A} (ή, ισοδύναμα, του πίνακα $\mathrm{e}^{(t-a)A}$) είτε του γινομένου $\mathrm{e}^{A}v$, για δεδομένο διάνυσμα v, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό. Βεβαίως, θα χρειαστούν κάποιες πληροφορίες για τον πίνακα A, που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του, για να το επιτύχουμε αυτό.

Θυμίζουμε πρώτα ότι *αλγεβρική πολλαπλότητα* μιας ιδιοτιμής λ ενός πίνακα A καλείται η πολλαπλότητα του λ ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου p, $p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, του πίνακα A. *Γεωμετρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ καλείται το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων. Η γεωμετρική πολλαπλότητα δεν υπερβαίνει ποτέ την αλγεβρική πολλαπλότητα.

$1^{\underline{\eta}}$ περίπτωση: Ο A είναι *διαγωνιοποιήσιμος* πίνακας.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με μια ειδική υποπερίπτωση· συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι ο A είναι *διαγώνιος* πίνακας.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται διαγώνιος, αν τα μη διαγώνια στοιχεία του $a_{ij}, i \neq j$, είναι όλα μηδέν. Ας συμβολίσουμε τότε τα διαγώνια στοιχεία a_{ii} του A με λ_i και ας τον γράψουμε στη μορφή $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. (Σημειώστε, πάντως, ότι σε μια τέτοια περίπτωση δεν έχουμε ουσιαστικά να κάνουμε με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο πρόβλημα (1.107) αλλά με n αποσυνδεδεμένες διαφορικές εξισώσεις, αφού το εν λόγω σύστημα διασπάται σε εξισώσεις της μορφής $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$, οι οποίες επιλύονται πολύ εύκολα.) Τότε, όπως βλέπουμε αμέσως, ισχύει $A^\ell = \operatorname{diag}(\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_n^\ell)$, για κάθε $\ell \in \mathbb{N}_0$, οπότε από τον ορισμό (1.105) προκύπτει αμέσως η σχέση

$$\mathrm{e}^{A} = \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\big). \tag{1.115}$$

Στην εν λόγω περίπτωση η παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) λαμβάνει την απλούστατη μορφή

$$y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(t-a)} y_1^{(0)} \\ \mathrm{e}^{\lambda_2(t-a)} y_2^{(0)} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n(t-a)} y_n^{(0)} \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b, \tag{1.116}$$

όπου $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ οι συνιστώσες της αρχικής τιμής $y^{(0)}$.

Προχωρούμε τώρα στη γενικότερη περίπτωση που ο τετραγωνικός πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς δύο όμοιους τετραγωνικούς πίνακες A και B, δηλαδή τέτοιους ώστε να υπάρχει αντιστρέψιμος (μιγαδικός, γενικά) πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$ (οπότε, προφανώς, και $SAS^{-1} = B$), και ας δούμε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των πινάκων e^A και e^B. Προφανώς, $A^2 = (S^{-1}BS)(S^{-1}BS) = S^{-1}B^2S$ και, γενικά, $A^\ell = S^{-1}B^\ell S$, για κάθε $\ell \in \mathbb{N}_0$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (1.105), έχουμε

$$\mathrm{e}^A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{S^{-1}B^\ell S}{\ell!} = S^{-1}\Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B^\ell}{\ell!}\Big)S,$$

δηλαδή

$$\mathrm{e}^A = S^{-1}\mathrm{e}^B S. \tag{1.117}$$

Υπενθυμίζουμε τώρα ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται διαγωνιοποιήσιμος, αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει (μιγαδικός, γενικά) διαγώνιος πίνακας $\varLambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και αντιστρέψιμος (μιγαδικός, γενικά) πίνακας S τέτοιοι ώστε $S^{-1}AS = \varLambda$. Σημειώστε ότι η τελευταία αυτή σχέση γράφεται στη μορφή $AS = S\varLambda$, από την οποία συμπεραίνουμε αμέσως ότι τα διαγώνια στοιχεία του $\varLambda$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A και οι στήλες του πίνακα S αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Ιδιαίτερα, ένας $n \times n$ πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Αυτό ισχύει ακριβώς τότε, αν η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του A συμπίπτουν. (Ικανή, αλλά όχι αναγκαία, συνθήκη για να είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος, είναι να έχει διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές. Τα αντίστοιχα n ιδιοδιανύσματα είναι τότε, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, γραμμικά ανεξάρτητα.) Σημειώστε ακόμα ότι ο έλεγχος κατά πόσον ένας πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ο προσδιορισμός των πινάκων $\varLambda$ και S δεν είναι εύκολος, ειδικά για μεγάλο n, αφού απαιτεί πλήρη επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών για τον A. Υπάρχουν πάντως κατηγορίες πινάκων, όπως οι συμμετρικοί, που είναι γνωστό ότι είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

Σε αυτήν την περίπτωση, σύμφωνα με τις (1.115) και (1.117), έχουμε

$$\mathrm{e}^A = S \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\big) S^{-1}. \tag{1.118}$$

Έτσι, η παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) λαμβάνει τη μορφή

$$y(t) = S \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1(t-a)}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n(t-a)}\big) S^{-1} y^{(0)}, \quad a \le t \le b. \tag{1.119}$$

Σημειώστε, πάντως, ότι και στην περίπτωση διαγωνιοποιήσιμου πίνακα A το σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο πρόβλημα (1.107) διασπάται, ύστερα από κατάλληλο μετασχηματισμό, σε προβλήματα αρχικών τιμών για n αποσυνδεδεμένες διαφορικές εξισώσεις, που επιλύονται πολύ εύκολα και οδηγούν πάλι στην παράσταση (1.119). Πράγματι, χρησιμοποιώντας τη σχέση $S^{-1}AS = \Lambda$, μπορούμε να γράψουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.107) στη μορφή

$$y'(t) = Ay(t) \iff y'(t) = S\Lambda S^{-1}y(t) \iff S^{-1}y'(t) = \Lambda S^{-1}y(t),$$

οπότε, με $z(t) := S^{-1}y(t), z'(t) = \Lambda z(t)$. Όσον αφορά την αρχική συνθήκη, έχουμε

$$z(a) = S^{-1}y(a) = S^{-1}y^{(0)} =: z^{(0)}.$$

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα (1.107) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} z'(t) = \Lambda z(t), \quad a \le t \le b, \\ z(a) = z^{(0)}. \end{cases} \tag{1.120}$$

Το σύστημα αυτό διασπάται σε n διαφορικές εξισώσεις της μορφής $z_i'(t) = \lambda_i z_i(t)$, με αντίστοιχες αρχικές τιμές $z_i(a) = z_i^{(0)}$, που λύνονται απλούστατα, $z_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i(t-a)}z_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$, οπότε έχουμε

$$z(t) = \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{\lambda_1(t-a)}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n(t-a)}\big)z^{(0)}, \quad a \le t \le b. \tag{1.121}$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση τη $z(t)$ με $S^{-1}y(t)$ και το $z^{(0)}$ με $S^{-1}y^{(0)}$, οδηγούμαστε πάλι στην (1.119). □

2η περίπτωση: Γενική, ο A δεν είναι κατ' ανάγκη διαγωνιοποιήσιμος.

Ως προεργασία για τη γενική περίπτωση, ας επικεντρώσουμε πρώτα την προσοχή μας σε δύο ειδικές υποπεριπτώσεις.

Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι ο A είναι *μηδενοδύναμος* πίνακας.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται μηδενοδύναμος, αν υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε ο πίνακας A^m να είναι μηδενικός, $A^m = 0$. Βεβαίως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει και $A^\ell = 0$, για κάθε φυσικό αριθμό $\ell \ge m$, αφού $A^\ell = A^{\ell-m}A^m = A^{\ell-m} \cdot 0 = 0$. Ο μικρότερος φυσικός αριθμός m, για τον οποίο ισχύει $A^m = 0$, λέγεται *βαθμός* του μηδενοδύναμου πίνακα A. Αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, ότι ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι μηδενοδύναμος, αν και μόνο αν το μηδέν είναι η μοναδική ιδιοτιμή του. Επίσης, ο βαθμός m ενός $n \times n$ μηδενοδύναμου πίνακα A είναι το πολύ n, βλ. την Άσκηση 1.18. Στην περίπτωση που ο A είναι μηδενοδύναμος πίνακας βαθμού m, η

(1.105) λαμβάνει τη μορφή

$$\mathrm{e}^{A} = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{A^{\ell}}{\ell!} \tag{1.122}$$

και η παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) απλουστεύεται σε

$$y(t) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\ell}}{\ell!} A^{\ell} y^{(0)}, \quad a \le t \le b. \tag{1.123}$$

Στη δεύτερη υποπερίπτωση, υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι της μορφής $A = \lambda I_n + M$, με έναν μηδενοδύναμο πίνακα M βαθμού m.

Από τον ορισμό (1.105) έπεται αμέσως ότι $\mathrm{e}^{\lambda I_n} = \mathrm{e}^{\lambda} I_n$, με I_n τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα. Συνεπώς, αφού ο I_n αντιμετατίθεται με οποιονδήποτε $n \times n$ πίνακα M, έχουμε

$$\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{\lambda I_n + M} = \mathrm{e}^{\lambda I_n} \mathrm{e}^{M} = \mathrm{e}^{\lambda} I_n \mathrm{e}^{M} = \mathrm{e}^{\lambda} \mathrm{e}^{M},$$

οπότε, σύμφωνα με την (1.122),

$$\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{\lambda} \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{M^{\ell}}{\ell!}. \tag{1.124}$$

Επομένως, η παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) γράφεται στη μορφή

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)} \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\ell}}{\ell!} M^{\ell} y^{(0)}, \quad a \le t \le b. \tag{1.125}$$

Ας στραφούμε τώρα στη γενική περίπτωση (που περιλαμβάνει και την περίπτωση διαγωνιοποιήσιμων πινάκων). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα από τη Γραμμική Άλγεβρα, τη λεγόμενη *κανονική μορφή Jordan* ενός $n \times n$ πίνακα A: Ο A είναι όμοιος με έναν κατά μπλοκ διαγώνιο πίνακα $J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \dots, J_k)$, με J_0 έναν διαγώνιο πίνακα και πίνακες J_ℓ της μορφής

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\ell & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_\ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_\ell, n_\ell}, \quad \ell = 1, \dots, k, \tag{1.126}$$

δηλαδή, υπάρχει ένας (μιγαδικός γενικά) $n \times n$ πίνακας S τέτοιος ώστε

$$A = S^{-1}JS. \tag{1.127}$$

(Βεβαίως, ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνο αν $J = J_0$, δηλαδή αν και μόνο αν δεν εμφανίζονται οι πίνακες $J_1, \dots, J_k$.) Παρεμπιπτόντως, η κανονική μορφή Jordan ενός πίνακα περιέχει όλες τις πληροφορίες σχετικά με τις ιδιοτιμές του, την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητά τους, και αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα· βλ. τις Ασκήσεις 1.16 και 1.17 για λεπτομέρειες. Σημειώστε ότι οι πίνακες J_ℓ είναι της μορφής $J_\ell = \lambda_\ell I_{n_\ell} + M_{n_\ell}$ με $M_{n_\ell} \in \mathbb{R}^{n_\ell, n_\ell}$ έναν πίνακα με μονάδες στις θέσεις της υπερδιαγωνίου και μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις,

$$M_{n_\ell} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.128}$$

Ο πίνακας M_{n_ℓ} λέγεται *πίνακας μετατόπισης* γιατί, όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως, έχει την εξής ιδιότητα

$$M_{n_\ell} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_\ell - 1} \\ x_{n_\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n_\ell} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.129}$$

δηλαδή, εφαρμοζόμενος σε ένα διάνυσμα x μετατοπίζει τις συνιστώσες του κατά μία θέση προς τα επάνω, συμπληρώνοντας την τελευταία με μηδέν. Ιδιαίτερα, ισχύει $M_{n_\ell}^{n_\ell} x = 0$, για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^{n_\ell}$, οπότε $M_{n_\ell}^{n_\ell} = 0$. Συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας μετατόπισης M_{n_ℓ} είναι μηδενοδύναμος, βαθμού n_ℓ. Βεβαίως, στο ίδιο συμπέρασμα οδηγείται κανείς και σχηματίζοντας τις δυνάμεις $M_{n_\ell}^k$ του M_{n_ℓ}:

$$M_{n_\ell}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, M_{n_\ell}^{n_\ell - 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{n_\ell}^{n_\ell - 1} = 0.$$

Διακόπτουμε για λίγο τη ροή της συζήτησης και παραθέτουμε μια παρατήρηση:

Παρατήρηση 1.2 (Σχετικά με το γεγονός ότι ο πίνακας M_{n_ℓ} είναι μηδενοδύναμος.) Βεβαίως, αφού ο πίνακας M_{n_ℓ} είναι γνήσια άνω τριγωνικός, έχει ως μόνη ιδιοτιμή το μηδέν. Γνωρίζουμε, λοιπόν, ότι είναι και μηδενοδύναμος. Δώσαμε εδώ την απόδειξη αυτής της ιδιότητας του M_{n_ℓ} γιατί αυτή αποτελεί, ουσιαστικά, και την απόδειξη του ότι, γενικά, μηδενοδύναμοι είναι οι πίνακες με μόνη ιδιοτιμή το μηδέν. Βλ. την Άσκηση 1.19. Αναφέρουμε ακόμα ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ του M_{n_ℓ} είναι, προφανώς, η μεγαλύτερη δυνατή, δηλαδή n_ℓ, ενώ η γεωμετρική της πολλαπλότητα η μικρότερη δυνατή, δηλαδή ένα. Βλ. την Άσκηση 1.15. □

Ύστερα από αυτή τη μικρή διακοπή, ας συνεχίσουμε τώρα τη συζήτησή μας. Όπως στην περίπτωση διαγώνιων πινάκων, έχουμε και για τον κατά μπλοκ διαγώνιο πίνακα $J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \dots, J_k)$ ότι

$$J^\ell = \operatorname{diag}(J_0^\ell, J_1^\ell, \dots, J_k^\ell), \quad \ell \in \mathbb{N}_0,$$

συνεπώς, σύμφωνα με τις (1.127) και (1.117),

$$\mathrm{e}^A = S^{-1} \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{J_0}, \mathrm{e}^{J_1}, \dots, \mathrm{e}^{J_k}\right) S. \tag{1.130}$$

Τώρα, όπως είδαμε προηγουμένως, οι πίνακες e^{J_0}, βλ. την (1.115), και $\mathrm{e}^{J_i}, i = 1, \dots, k$, βλ. την (1.124), υπολογίζονται εύκολα. Έτσι, η (1.130) μας επιτρέπει να γράψουμε την παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107) στη μορφή

$$y(t) = B(t) y^{(0)}, \quad a \le t \le b, \tag{1.131}$$

με έναν πίνακα $B(t) \in \mathbb{C}^{n,n}, a \le t \le b$, με στοιχεία $b_{ij}(t)$ της μορφής

$$b_{ij}(t) = \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell^{(i,j)}(t) \mathrm{e}^{\lambda_\ell t}, \quad a \le t \le b, \tag{1.132}$$

όπου λ_ℓ ιδιοτιμή του A και $p_\ell^{(i,j)}(t)$ ένα πολυώνυμο, βαθμού το πολύ ίσου με τη διαφορά της αλγεβρικής μείον τη γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_ℓ. □

Θα ολοκληρώσουμε αυτήν την υποενότητα με λίγα σχόλια σχετικά με τον υπολογισμό του γινομένου $\mathrm{e}^A v$ (ή, ισοδύναμα, του γινομένου $\mathrm{e}^{(t-a)A} v$) για δεδομένο διάνυσμα v, και όχι του ίδιου του πίνακα e^A, σε αντιδιαστολή με αυτά που μας απασχόλησαν προηγουμένως. Το κίνητρο είναι βέβαια η παράσταση (1.108) της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107), στην οποία μας ενδιαφέρει το γινόμενο $\mathrm{e}^{(t-a)A} y^{(0)}$, και όχι καθαυτός ο πίνακας $\mathrm{e}^{(t-a)A}$. Βεβαίως, το πόσο απλοποιούνται τα πράγματα εξαρτάται από το διάνυσμα v, ή, αν προτιμάτε, από το διάνυσμα $y^{(0)}$. Σημαντικό ρόλο θα παίξει η παράσταση του $y^{(0)}$ ως γραμμικού συνδυασμού κατάλληλων διανυσμάτων $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$.

Για οποιαδήποτε $t, \lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\mathrm{e}^{(t-a)A} = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)I_n}\mathrm{e}^{(t-a)(A-\lambda I_n)} = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)}I_n\mathrm{e}^{(t-a)(A-\lambda I_n)} = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)}\mathrm{e}^{(t-a)(A-\lambda I_n)},$$

οπότε, για οποιοδήποτε διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{e}^{(t-a)A}v = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)}\big[v + (t-a)(A-\lambda I_n)v + \cdots + \frac{(t-a)^\ell}{\ell!}(A-\lambda I_n)^\ell v + \cdots\big]. \tag{1.133}$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A. Αν το v είναι αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε $(A-\lambda I_n)v = 0$ και η (1.133) λαμβάνει την απλούστατη μορφή

$$\mathrm{e}^{(t-a)A}v = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)}v. \tag{1.134}$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος (δηλαδή όταν η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής του συμπίπτουν) υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματά του, οπότε η αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων.

Στην περίπτωση που η γεωμετρική πολλαπλότητα κάποιας ιδιοτιμής του A είναι μικρότερη της αλγεβρικής πολλαπλότητας τα ιδιοδιανύσματα δεν παράγουν τον $\mathbb{C}^n$ και χρειάζεται να συμπληρωθούν με γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Έστω μ η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ του A. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^n$ λέγεται *γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα* του A ως προς την ιδιοτιμή λ, αν είναι τέτοιο ώστε $(A-\lambda I_n)^\mu v = 0$. Τότε θα ισχύει και $(A-\lambda I_n)^{\mu+\ell}v = 0$, για οποιοδήποτε $\ell \in \mathbb{N}_0$, αφού

$$(A-\lambda I_n)^{\mu+\ell}v = (A-\lambda I_n)^\ell(A-\lambda I_n)^\mu v = (A-\lambda I_n)^\ell 0 = 0.$$

Επομένως, και σε αυτήν την περίπτωση, η (1.133) απλοποιείται κάπως και γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{e}^{(t-a)A}v = \mathrm{e}^{\lambda(t-a)}\big[v + (t-a)(A-\lambda I_n)v + \cdots + \frac{(t-a)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}(A-\lambda I_n)^{\mu-1}v\big]. \tag{1.135}$$

Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι υπάρχουν τόσα γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς την ιδιοτιμή λ, όση και η αλγεβρική πολλαπλότητά της και ότι γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δηλαδή, κάθε $n \times n$ πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα· συνεπώς κάθε αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του A.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν ο A έχει k ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ με αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες $\mu_1, \dots, \mu_k$ και $\nu_1, \dots, \nu_k$, αντίστοιχα, τότε η αρχική τιμή $y^{(0)}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$y^{(0)} = v^{(1)} + \cdots + v^{(k)}, \tag{1.136}$$

με κάθε $v^{(i)}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς την ιδιοτιμή $\lambda_i, i = 1, \dots, k$.

Συνδυάζοντας τις (1.136), (1.135) και (1.108) καταλήγουμε στην ακόλουθη παράσταση της λύσης $y(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (1.107)

$$(1.137)\quad y(t) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{e}^{(t-a)A} v^{(\ell)} = \sum_{\ell=1}^{k} \mathrm{e}^{\lambda_\ell (t-a)} \sum_{m=1}^{\mu_k - 1} \frac{(t-a)^m}{m!} (A - \lambda I_n)^m v^{(\ell)}, \quad a \le t \le b.$$

Τονίζουμε και πάλι, ότι για να εφαρμοστούν τα προηγούμενα στην πράξη απαιτείται γνώση των ιδιοτιμών, ιδιοδιανυσμάτων, γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων ή της κανονικής μορφής Jordan του πίνακα A.

1.7.3 Ομογενή γραμμικά συστήματα

Η παρούσα ενότητα, καθώς και η επόμενη, είναι, σε πολύ μεγάλο βαθμό ανεξάρτητη της προηγούμενης, οπότε αναγκαστικά υπάρχουν κάποιες επικαλύψεις. Ένα *ομογενές* γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές, n διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με n αγνώστους, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(1.138)\qquad y'(t) = Ay(t),$$

όπου y μια διανυσματική συνάρτηση με n συνιστώσες και A ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας

$$(1.139)\qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Όπως γνωρίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο στο [1], για οποιαδήποτε $t_0 \in \mathbb{R}$ και $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, το πρόβλημα αρχικών τιμών, που αποτελείται από το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.138) και την αρχική συνθήκη $y(t_0) = y^{(0)}$, έχει ακριβώς μία λύση, που ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία.

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι, αν $y^{(1)}(t)$ και $y^{(2)}(t)$ είναι λύσεις της (1.138) και λ είναι μια πραγματική σταθερά, τότε και η συνάρτηση $\lambda y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t)$ (ή, αν προτιμάτε, οι συναρτήσεις $y^{(1)}(t) + y^{(2)}(t)$ και $\lambda y^{(1)}(t)$) αποτελεί επίσης λύση της (1.138). Με άλλα λόγια, το σύνολο λύσεων της (1.138) είναι ένας γραμμικός χώρος V. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η διάσταση του V είναι n, $\dim V = n$.

Θεώρημα 1.1 (Διάσταση του χώρου λύσεων της (1.138).) *Η διάσταση του χώρου λύσεων V του συστήματος διαφορικών εξισώσεων* (1.138) *είναι n, $\dim V = n$.*

Απόδειξη. Θα προσδιορίσουμε μια βάση του V με n στοιχεία. Για $i \in \{1, \dots, n\}$, συμβολίζουμε με $\varphi^{(i)}$ τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = e^{(i)}, \end{cases} \tag{1.140}$$

με $\{e^{(1)}, \dots, e^{(n)}\}$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, $e_j^{(i)} = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n$.

Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Πράγματι, αν

$$c_1\varphi^{(1)} + \cdots + c_n\varphi^{(n)} = 0,$$

με πραγματικές σταθερές $c_1, \dots, c_n$, τότε θα ισχύει, ειδικότερα,

$$c_1\varphi^{(1)}(0) + \cdots + c_n\varphi^{(n)}(0) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$c_1e^{(1)} + \cdots + c_ne^{(n)} = 0,$$

οπότε, προφανώς, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$, θα έχουμε $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Έστω τώρα y μια τυχούσα λύση της (1.138). Θα αποδείξουμε ότι η y γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$, και κατ' αυτόν τον τρόπο θα ολοκληρωθεί η απόδειξη. Έστω, λοιπόν, $c_1, \dots, c_n$ οι συνιστώσες του διανύσματος $y(0)$. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση z,

$$z := c_1\varphi^{(1)} + \cdots + c_n\varphi^{(n)}, \tag{1.141}$$

και παρατηρούμε ότι η z αποτελεί αφ' ενός λύση της (1.138) και αφ' ετέρου ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$z(0) = c_1\varphi^{(1)}(0) + \cdots + c_n\varphi^{(n)}(0) = c_1e^{(1)} + \cdots + c_ne^{(n)} = y(0),$$

οπότε, λόγω της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών, συμπίπτει με την y. Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι και η y είναι γραμμικός συνδυασμός των $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$, βλ. την (1.141), γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θα προσπαθήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1.138)· κάθε λύση της θα δίνεται τότε ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων. Γνωρίζοντας ότι οι λύσεις της βαθμωτής εξίσωσης $y'(t) = ay(t)$ είναι της μορφής $y(t) = c\mathrm{e}^{at}$, με τυχούσα πραγματική σταθερά c, φαίνεται λογικό να δοκιμάσουμε να προσδιορίσουμε πιθανές λύσεις της (1.138) της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v, \tag{1.142}$$

για κατάλληλη σταθερά λ και κατάλληλο (μη μηδενικό) διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^n$. Για τέτοιες συναρτήσεις έχουμε

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t} v,$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην (1.138), οδηγούμαστε στη σχέση

$$\lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v,$$

δηλαδή

$$Av = \lambda v. \tag{1.143}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι μια (μη μηδενική) συνάρτηση y της μορφής (1.142) αποτελεί λύση της (1.138), αν και μόνο αν το λ είναι *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το v αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα*.

Θεωρούμε τώρα το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* p του πίνακα A,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Η ευκολότερη περίπτωση, για το πρόβλημά μας, είναι όταν οι ιδοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι όλες πραγματικές και ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους. Έστω $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε, όπως είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα, αλλά και εύκολο να αποδειχθεί, τα διανύσματα $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ιδιαίτερα, και οι λύσεις

$$\varphi^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t} v^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.144}$$

της (1.138) είναι γραμμικά ανεξάρτητες, και συνεπώς αποτελούν βάση του χώρου λύσεων V της (1.138). Επομένως, η γενική λύση y της (1.138) δίνεται ως

$$y = c_1 \varphi^{(1)} + \dots + c_n \varphi^{(n)}, \tag{1.145}$$

με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές $c_1, \dots, c_n$.

Βλέπε το Παράδειγμα 1.11 στην ενότητα 1.7.1.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του πίνακα A είναι μεν και πάλι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά κάποιες από αυτές ενδέχεται να είναι μιγαδικές.

Έστω, λοιπόν, $\lambda = a + ib$ μια μιγαδική ιδιοτιμή του A και $v = u + iw$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. (Τότε, βεβαίως, και η συζυγής $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A και $\bar{v} = u - iw$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.) Αμέσως διαπιστώνουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση

$$y(t) = e^{(a+ib)t}(u + iw) \tag{1.146}$$

αποτελεί (μη τετριμμένη) λύση της (1.138) (βλ. και τις (1.142) και (1.143)). Παίρνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη στη σχέση $y'(t) = Ay(t)$, βλέπουμε αμέσως ότι τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος της y είναι επίσης λύσεις της (1.138). Τώρα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της y προσδιορίζονται εύκολα, αφού

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{at}\big[\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)\big](u + \mathrm{i}w) \\ &= \mathrm{e}^{at}\Big[\big[\cos(bt)u - \sin(bt)w\big] + \mathrm{i}\big[\sin(bt)u + \cos(bt)w\big]\Big]. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι συναρτήσεις $y^{(1)}$ και $y^{(2)}$,

$$y^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{at}\big[\cos(bt)u - \sin(bt)w\big], \quad y^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{at}\big[\sin(bt)u + \cos(bt)w\big], \tag{1.147}$$

αποτελούν λύσεις της (1.138). (Σημειώστε, παρεμπιπτόντως, ότι και η ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$ στις ίδιες λύσεις οδηγεί, αν χρησιμοποιήσουμε ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\bar{v} = u - \mathrm{i}w$.)

Επίσης, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι οι όροι της μορφής $\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$ και $\mathrm{e}^{at}\sin(bt)$ δεν εμφανίζονται σε λύσεις που αντιστοιχούν σε άλλες απλές ιδιοτιμές του πίνακα A, διαπιστώνουμε ότι όλες οι λύσεις που προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο, μία για κάθε πραγματική ιδιοτιμή και δύο για κάθε ζεύγος συζυγών μιδαγικών ιδιοτιμών, είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ανακεφαλαιώνοντας, στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει n απλές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, είτε όλες πραγματικές είτε και κάποιες μιγαδικές, με την ανωτέρω διαδικασία προσδιορίζουμε n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138), δηλαδή μια βάση του χώρου λύσεών του V, οπότε, βεβαίως, και τη γενική του λύση.

Παράδειγμα 1.13 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \quad \text{με } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } y^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.148}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του πίνακα A είναι

$$p(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 1],$$

οπότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}$. Οι ιδιοτιμές είναι, δηλαδή, όντως ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, μία είναι πραγματική και οι άλλες δύο μιγαδικές, συζυγείς μεταξύ τους.

Θα προσδιορίσουμε, τώρα, αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

α) $\lambda_1 = 1$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$ ή $(A - I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_2 = v_3 = 0$ και v_1 αυθαίρετος, μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Επιλέγοντας ως v_1 τη μονάδα, $v_1 = 1$, οδηγούμαστε, σύμφωνα με την (1.142), στη λύση

$$\varphi^{(1)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.149}$$

της διαφορικής εξίσωσης στο (1.148).

β) $\lambda_{2,3} = 1 \pm \mathrm{i}$: Θα εργασθούμε με την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$, η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i} = \overline{\lambda_2}$ οδηγεί στις ίδιες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο (1.148).

Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_2 I_3)v = 0$ ή $\big(A - (1 + \mathrm{i})I_3\big)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_1 = 0$ και $v_2 = \mathrm{i}v_3$. Επιλέγοντας $v_3 := 1$, έχουμε $v_2 = \mathrm{i}$, και οδηγούμαστε στη μη τετριμμένη μιγαδική λύση

$$y(t) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.150}$$

της διαφορικής εξίσωσης στο (1.148). Από αυτή τη μιγαδική λύση προκύπτουν δύο πραγματικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο (1.148), αν πάρουμε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος. Έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^t(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathrm{e}^t \left[\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \mathrm{i}\mathrm{e}^t \left[\sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \mathrm{i}\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στις λύσεις

$$\varphi^{(2)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.151}$$

της διαφορικής εξίσωσης στο (1.148)· βλ. την (1.147).

Από τις (1.149) και (1.151) προκύπτει ότι η γενική λύση $y(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.148) είναι

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.152}$$

με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές c_1, c_2 και c_3.

Απομένει τώρα να επιλέξουμε τις σταθερές c_1, c_2 και c_3 κατάλληλα ώστε να ικανοποιείται και η αρχική συνθήκη στην (1.148). Με $t = 0$ στην (1.152), βλέπουμε ότι η αρχική συνθήκη ικανοποιείται, αν και μόνο αν

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Με αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η (1.152) δίνει τη ζητούμενη λύση

$$y(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square \tag{1.153}$$

Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ του πίνακα A του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138) είναι απλές, είτε μόνο πραγματικές είτε κάποιες από αυτές μιγαδικές. Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη του (1.138) με την περίπτωση κάποιες από τις ιδιοτιμές του A να είναι *πολλαπλές*.

Στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, οι λύσεις του συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (1.138) προσδιορίζονται με διαδικασία ακριβώς αντίστοιχη αυτής που ακολουθήσαμε μέχρι τώρα. Σε κάθε ιδιοδιάνυσμα του A αντιστοιχεί μία λύση του (1.138) και οι εν λόγω λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε η γενική λύση του (1.138) είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων. Έστω, τώρα, ότι ο A έχει k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, με $k < n$. Τότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων (1.138) έχει *μόνο* k γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής $\mathrm{e}^{\lambda t}v$, με $v \in \mathbb{C}^n$. Το πρόβλημα τώρα είναι να προσδιορίσουμε $n-k$ λύσεις, έτσι ώστε οι προκύπτουσες n λύσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παραθέτουμε τώρα, χωρίς απόδειξη, ένα αποτέλεσμα Γραμμικής Άλγεβρας, που αναφέρεται στο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων v ενός πίνακα A ως προς μια ιδιοτιμή λ αλγεβρικής πολλαπλότητας μ, δηλαδή μη μηδενικών λύσεων του γραμμικού συστήματος $(A-\lambda I_n)^{\mu}v=0$.

Θεώρημα 1.2 (Πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων.) *Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ οι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, με αλγεβρικές και γεωμετρικές πολλαπλότητες $\mu_1,\dots,\mu_k$ $(\mu_1+\cdots+\mu_k=n)$ και $\nu_1,\dots,\nu_k$ $(\nu_j \le \mu_j)$, αντίστοιχα. Τότε, αν $\nu_j < \mu_j$, το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda_j I_n)^2 v = 0$ έχει τουλάχιστον ν_j+1 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Γενικότερα, αν το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda_j I_n)^m v = 0, m<\mu_j$, έχει m_j $(m_j<\nu_j)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τότε το γραμμικό σύστημα $(A-\lambda_j I_n)^{m+1}v=0$ έχει τουλάχιστον m_j+1 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Επομένως, υπάρχουν ακριβώς μ_j γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ_j. Επί πλέον, γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε, συνολικά υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A.* □

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, οδηγούμαστε στην εξής διαδικασία για τον προσδιορισμό n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων (δηλαδή, ουσιαστικά, της γενικής λύσης) του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138):

$1^{\underline{\text{ο}}}$ βήμα: Προσδιορίζουμε όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Αν ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.138) έχει n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της μορφής $\mathrm{e}^{\lambda t}v$, όπου λ ιδιοτιμή του A και v αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. (Σημειώνουμε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, όλοι οι όροι της σειράς στην (1.133) εκτός από τον πρώτο μηδενίζονται.) Επίσης, στην περίπτωση μιγαδικής ιδιοτιμής, μπορεί κανείς να οδηγηθεί σε πραγματικές λύσεις παίρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\mathrm{e}^{\lambda t}v$, αντίστοιχα.

$2^{\underline{\text{ο}}}$ βήμα: Έστω ότι ο A έχει $k, k<n$, γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Τότε, υπάρχουν μόνο k γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138) της μορφής $\mathrm{e}^{\lambda t}v$. Για κάθε ιδιοτιμή λ του A, με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη της γεωμετρικής, ζητούμε να προσδιορίσουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα v, σε πρώτη φάση τέτοια ώστε αφ' ενός $(A-\lambda I_n)^2 v = 0$ και αφ' ετέρου $(A-\lambda I_n)v \neq 0$. Για κάθε τέτοιο

διάνυσμα v, βλ. το Θεώρημα 1.2, οι συναρτήσεις

$$\mathrm{e}^{tA}v = \mathrm{e}^{\lambda t}\big[v + t(A-\lambda I_n)v\big] \tag{1.154}$$

αποτελούν λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138). (Σημειώστε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, όλοι οι όροι της σειράς στην (1.133) εκτός από τους δύο πρώτους μηδενίζονται.)

$3^{\underline{\text{ο}}}$ βήμα: Αν για κάποια ιδιοτιμή λ δεν έχουμε ακόμα προσδιορίσει πλήθος λύσεων ίσο με την αλγεβρική της πολλαπλότητα, στη δεύτερη φάση ζητούμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα τέτοια ώστε αφ' ενός $(A-\lambda I_n)^3v = 0$ και αφ' ετέρου $(A-\lambda I_n)^2v \neq 0$. Για κάθε τέτοιο διάνυσμα v, βλ. το Θεώρημα 1.2, οι συναρτήσεις

$$\mathrm{e}^{tA}v = \mathrm{e}^{\lambda t}\big[v + t(A-\lambda I_n)v + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I_n)^2v\big] \tag{1.155}$$

αποτελούν λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138).

$4^{\underline{\text{ο}}}$ βήμα: Συνεχίζουμε ανάλογα έως ότου προσδιορίσουμε το επιθυμητό πλήθος n γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων. Από κάθε ιδιοτιμή προκύπτουν τόσες λύσεις όση είναι η αλγεβρική της πολλαπλότητα.

Βλέπε το Παράδειγμα 1.12 στην ενότητα 1.7.1.

Παράδειγμα 1.14 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t\in\mathbb{R},\\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \quad \text{με } A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ και } y^{(0)} := \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}. \tag{1.156}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του πίνακα A είναι p, $p(\lambda) = (2-\lambda)^3$, οπότε η ιδιοτιμή $\lambda = 2$ του A είναι τριπλή, δηλαδή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα τρία. (Ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός και οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.)

Ζητούμε κατ' αρχάς αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή μη τετριμμένα διανύσματα $v\in\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(A-\lambda I_3)v = 0$ ή $(A-2I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = 0,$$

οπότε βλέπουμε ότι $v_2 = v_3 = 0$ και v_1 αυθαίρετος, μη μηδενικός πραγματικός αριθμός. Επιλέγοντας ως v_1 τη μονάδα, $v_1 = 1$, οδηγούμαστε, σύμφωνα με την (1.142), στη λύση

$$\varphi^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.157}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.156).

Άλλα, γραμμικά ανεξάρτητα προς το προηγούμενο, ιδιοδιανύσματα του A, προφανώς, δεν υπάρχουν· με άλλα λόγια, η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ένα. Έτσι, αναζητούμε στη συνέχεια, σε πρώτη φάση, γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(A-2I_3)^2v = 0$ και $(A-2I_3)v \neq 0$. Τώρα, $(A-2I_3)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, οπότε το γραμμικό σύστημα $(A-2I_3)^2v = 0$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

από την οποία προκύπτει $v_3 = 0$ ενώ οι συνιστώσες v_1 και v_2 είναι αυθαίρετοι αριθμοί, όχι και οι δύο ίσοι με μηδέν. Φερ' ειπείν, για $v_1 = 0$ και $v_2 = 1$ οδηγούμαστε σε μια λύση, η οποία δεν είναι, όπως γνωρίζουμε, ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A. Αυτή η επιλογή οδηγεί στη λύση

$$\varphi^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{2t}\big[v + t(A-2I_3)v\big] = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\varphi^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.158}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.156)· βλ. την (1.154).

(Ας σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι άλλες λύσεις του συστήματος $(A-2I_3)^2v = 0$, τέτοιες ώστε αυτές, η λύση που βρήκαμε ήδη και τα ιδιοδιανύσματα του A να είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, δεν υπάρχουν.)

Στο επόμενο, και τελευταίο, βήμα, αναζητούμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $(A-2I_3)^3v = 0$ και $(A-2I_3)^2v \neq 0$. Τώρα, $(A-2I_3)^3 = 0$, οπότε κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}$ αποτελεί λύση του γραμμικού συστήματος $(A-2I_3)^3v = 0$. Το διάνυσμα $v = (0,0,1)^T$ ικανοποιεί, επί πλέον, και την $(A-2I_3)^2v \neq 0$ (αφού αυτό και οι μη τετριμμένες λύσεις του $(A-2I_3)^2v = 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα). Οδηγούμαστε, έτσι, στη λύση

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}(t) &= \mathrm{e}^{2t}\Big[v + t(A-2I_3)v + \frac{t^2}{2}(A-2I_3)^2v\Big] \\ &= \mathrm{e}^{2t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.159}$$

του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.156)· βλ. την (1.155).

Από τις (1.157), (1.158) και (1.159) προκύπτει ότι η γενική λύση $y(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.157) είναι

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \right], \tag{1.160}$$

με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές c_1, c_2 και c_3.

Λαμβάνοντας εδώ υπ' όψιν και τις αρχικές τιμές οδηγούμαστε στη λύση

$$\varphi^{(3)}(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 5t - \frac{1}{2}t^2 \\ 2 - t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.161}$$

του προβλήματος αρχικών τιμών (1.156). □

1.7.4 Μη ομογενή γραμμικά συστήματα — Θεμελιώδεις πίνακες

Έστω $y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων $y'(t) = Ay(t)$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, βλ. την (1.138). Τότε, οι εν λόγω λύσεις αποτελούν βάση του χώρου λύσεων του συστήματος διαφορικών εξισώσεων, οπότε κάθε λύση του y γράφεται στη μορφή

$$y(t) = c_1 y^{(1)}(t) + \cdots + c_n y^{(n)}(t), \tag{1.162}$$

με αυθαίρετες πραγματικές σταθερές $c_1, \dots, c_n$, ή ισοδύναμα

$$y(t) = Y(t)c, \tag{1.163}$$

όπου $Y(t)$ ο $n \times n$ πίνακας με στήλες $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ και $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.1 (Θεμελιώδης πίνακας.) Ένας $n \times n$ πίνακας $Y(t)$ λέγεται *θεμελιώδης πίνακας* του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138), αν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (1.138). □

Στο επόμενο θεώρημα θα δούμε με ποιον τρόπο ένας θεμελιώδης πίνακας $Y(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138) σχετίζεται με την εκθετική συνάρτηση e^{tA}.

Θεώρημα 1.3 (Θεμελιώδης πίνακας και εκθετική συνάρτηση.) *Έστω $Y(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας του συστήματος διαφορικών εξισώσεων* (1.138). *Τότε ισχύει* $\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1}$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, ισχυριζόμαστε ότι ο πίνακας $Y(t)$ είναι αντιστρέψιμος, για οποιοδήποτε πραγματικό t. Πράγματι, αν σταθεροποιήσουμε ένα αυθαίρετο s και θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα $y'(t) = Ay(t), t \in \mathbb{R}$, με αρχική τιμή $y(s) = v$, με αυθαίρετο αλλά σταθεροποιημένο $v \in \mathbb{R}^n$, τότε, όπως γνωρίζουμε, αυτό έχει ακριβώς μία λύση. Τώρα, για $t = s$, η (1.163) γράφεται στη μορφή

$$Y(s)c = v.$$

Όπως προαναφέραμε, το γραμμικό αυτό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, για οποιοδήποτε $v \in \mathbb{R}^n$, βλ. και την (1.162). Ιδιαίτερα, ο πίνακας $Y(s)$ είναι αντιστρέψιμος. Αφού το s είναι αυθαίρετο, ο πίνακας $Y(t)$ είναι όντως αντιστρέψιμος, για οποιοδήποτε πραγματικό t.

Επί πλέον,

$$Y'(t) = \big(y^{(1)'}(t), \dots, y^{(n)'}(t)\big) = \big(Ay^{(1)}(t), \dots, Ay^{(n)}(t)\big) = AY(t),$$

συνεπώς

$$Y'(t) = AY(t). \tag{1.164}$$

Επίσης, ο πίνακας e^{tA} είναι θεμελιώδης πίνακας του (1.138), αφού $(\mathrm{e}^{tA})' = A\mathrm{e}^{tA}$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι, αν $Y(t)$ και $Z(t)$ θεμελιώδεις πίνακες του (1.138), τότε υπάρχει σταθερός πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n,n}$, τέτοιος ώστε $Z(t) = Y(t)C$. Πράγματι, εξ ορισμού οι στήλες $y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ του $Y(t)$ και $z^{(1)}(t), \dots, z^{(n)}(t)$ του $Z(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (1.138). Επομένως, κάθε στήλη του $Z(t)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του $Y(t)$, δηλαδή

$$z^{(j)}(t) = c_{1j}y^{(1)}(t) + \cdots + c_{nj}y^{(n)}(t), \quad j = 1, \dots, n,$$

δηλαδή

$$Z(t) = Y(t)C \quad \text{με} \quad C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Ιδιαίτερα, λοιπόν, ισχύει

$$\mathrm{e}^{tA} = Y(t)C.$$

Για $t = 0$, η σχέση αυτή δίνει $C = Y(0)^{-1}$, οπότε τελικά έχουμε όντως

$$\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1}.$$

□

Θεωρούμε τώρα το μη ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$y'(t) = Ay(t) + f(t), \tag{1.165}$$

με πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, όπως στην (1.138), και δεδομένη, συνεχή διανυσματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Κατ' αρχάς, αν y_γ είναι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος διαφορικών εξισώσεων (1.138) και y_ε είναι μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος (1.165), τότε, όπως διαπιστώνει κανείς πολύ εύκολα θεωρώντας τη διαφορά δύο λύσεων του (1.165), η γενική λύση του (1.165) δίνεται ως $y_\gamma + y_\varepsilon$. Αφού, λοιπόν, έχουμε ήδη μελετήσει τα ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές (1.138), για τη μελέτη του (1.165) αρκεί να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στον προσδιορισμό μιας ειδικής λύσης του y_ε.

Έστω τώρα $y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (1.138). Όπως γνωρίζουμε ήδη, η γενική λύση $y(t)$ του (1.138) δίνεται ως

$$y(t) = c_1 y^{(1)}(t) + \cdots + c_n y^{(n)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.166}$$

με $c_1, \dots, c_n$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Αντικαθιστούμε τώρα στην (1.166) τις σταθερές c_i με βαθμωτές συναρτήσεις v_i και ζητούμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση y_ε του μη ομογενούς συστήματος (1.165) της μορφής

$$y_\varepsilon(t) = v_1(t) y^{(1)}(t) + \cdots + v_n(t) y^{(n)}(t),$$

ή, ισοδύναμα,

$$y_\varepsilon(t) = Y(t) v(t), \tag{1.167}$$

με $Y(t) = \big(y^{(1)}(t), \dots, y^{(n)}(t)\big)$ και $v(t) = \big(v_1(t), \dots, v_n(t)\big)^T$. Αντικαθιστώντας την έκφραση στο δεξιό μέλος της (1.167) στην (1.165), παίρνουμε

$$Y'(t)v(t) + Y(t)v'(t) = AY(t)v(t) + f(t),$$

οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι ο $Y(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας του (1.138), και συνεπώς ικανοποιεί την εξίσωση (1.164), έχουμε

$$Y(t)v'(t) = f(t),$$

δηλαδή

$$v'(t) = Y(t)^{-1} f(t). \tag{1.168}$$

Αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων επιλύεται απλούστατα, με ολοκλήρωση, αφού η v εμφανίζεται μόνο στο αριστερό του μέλος, οπότε έχουμε

$$v(t) = \int Y(t)^{-1} f(t)\,dt. \tag{1.169}$$

Συνδυάζοντας τις (1.169) και (1.167), οδηγούμαστε στην ακόλουθη ειδική λύση y_ε

$$y_\varepsilon(t) = Y(t) \int Y(t)^{-1} f(t)\,dt \tag{1.170}$$

του μη ομογενούς συστήματος (1.165).

Τέλος, συνδυάζοντας τις (1.166) και (1.170), οδηγούμαστε στη γενική λύση y,

$$y(t) = Y(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + Y(t) \int Y(t)^{-1} f(t)\,dt, \tag{1.171}$$

του μη ομογενούς συστήματος (1.165), με $c_1, \dots, c_n$ αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Αν τώρα έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(t_0) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{1.172}$$

τότε, σύμφωνα με την (1.171), η λύση του δίνεται στη μορφή

$$y(t) = Y(t)Y(t_0)^{-1}y^{(0)} + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y(s)^{-1} f(s)\,ds. \tag{1.173}$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση $t_0 = 0$, έχουμε $Y(t)Y(0)^{-1} = \mathrm{e}^{tA}$, βλ. το Θεώρημα 1.3, και

$$\begin{aligned} Y(t)Y(s)^{-1} &= Y(t)Y(0)^{-1}Y(0)Y(s)^{-1} \\ &= Y(t)Y(0)^{-1}\big(Y(s)Y(0)^{-1}\big)^{-1} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{-sA} = \mathrm{e}^{(t-s)A}, \end{aligned}$$

οπότε η (1.173) γράφεται και στη μορφή

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} y^{(0)} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} f(s)\,ds. \tag{1.174}$$

Παράδειγμα 1.15 Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{cases} \qquad \text{με } A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } f(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^t \cos(2t) \end{pmatrix}, \tag{1.175}$$

$t \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τον τύπο (1.174) αρκεί να προσδιορίσουμε τον πίνακα e^{tA}. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του πίνακα A είναι

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5),$$

οπότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$.

Θα προσδιορίσουμε, τώρα, αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

α) $\lambda_1 = 1$: Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_1 I_3)v = 0$ ή $(A - I_3)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_1 = v_3$ και $v_2 = 3v_3/2$. Επιλέγοντας $v_3 = 2$, οδηγούμαστε, σύμφωνα με την (1.142), στη λύση

$$y^{(1)}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.176}$$

της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = Ay(t)$ της διαφορικής εξίσωσης στο (1.175).

β) $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$: Θα εργασθούμε με την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, η ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1 - 2\mathrm{i} = \overline{\lambda_2}$ οδηγεί στις ίδιες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς της διαφορικής εξίσωσης στο (1.175).

Ζητούμε ένα μη τετριμμένο διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^3$ τέτοιο ώστε $(A - \lambda_2 I_3)v = 0$ ή $\big(A - (1 + 2\mathrm{i})I_3\big)v = 0$ ή

$$\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 3 & 2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

δηλαδή $v_1 = 0$ και $v_3 = -\mathrm{i}v_2$. Επιλέγοντας $v_2 := 1$, έχουμε $v_3 = -\mathrm{i}$, και οδηγούμαστε στη μη τετριμμένη λύση μιγαδική λύση

$$y(t) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.177}$$

της αντίστοιχης ομογενούς της διαφορικής εξίσωσης στο (1.175). Από αυτή τη μιγαδική λύση προκύπτουν δύο πραγματικές λύσεις, αν πάρουμε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος. Έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\big[\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t)\big]\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]\\ &= \mathrm{e}^t\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right]+\mathrm{i}\mathrm{e}^t\left[\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$y(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \sin(2t)\\ -\cos(2t)\end{pmatrix}.$$

Έτσι, οδηγούμαστε στις πραγματικές λύσεις

$$y^{(2)}(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad y^{(3)}(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \sin(2t)\\ -\cos(2t)\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.178}$$

της αντίστοιχης ομογενούς της διαφορικής εξίσωσης στο (1.175)· βλ. την (1.147).

Από τις (1.176) και (1.178) προκύπτει ότι ένας θεμελιώδης πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $y'(t) = Ay(t)$ του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος (1.175) είναι ο

$$Y(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & \cos(2t) & \sin(2t)\\ 2 & \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}. \tag{1.179}$$

Τώρα,

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0\\ \frac32 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3,

$$\mathrm{e}^{tA} = Y(t)Y(0)^{-1} = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac32+\frac32\cos(2t)+\sin(2t) & \cos(2t) & -\sin(2t)\\ 1+\frac32\sin(2t)-\cos(2t) & \sin(2t) & \cos(2t)\end{pmatrix}. \tag{1.180}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, σύμφωνα με τον τύπο (1.174), ότι η λύση y του προβλήματος αρχικών τιμών (1.175) είναι

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{tA}\int_0^t \mathrm{e}^{-sA} f(s)\,ds\\
&= \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{tA}\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos(2s)-\sin(2s) & \cos(2s) & \sin(2s)\\ 1-\frac{3}{2}\sin(2s)-\cos(2s) & -\sin(2s) & \cos(2s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\ \mathrm{e}^{s}\cos(2s)\end{pmatrix} ds\\
&= \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos(2t)-\sin(2t)\\ \cos(2t)+\sin(2t)\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{tA}\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\begin{pmatrix}0\\ \sin(2s)\cos(2s)\\ \cos^2(2s)\end{pmatrix} ds\\
&= \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos(2t)-\sin(2t)\\ \cos(2t)+\sin(2t)\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1-\cos(4t)}{8}\\ \frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{8}\end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
y(t) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos(2t)-(1+\frac{t}{2})\sin(2t)\\ (1+\frac{t}{2})\cos(2t)+\frac{5}{4}\sin(2t)\end{pmatrix}. \qquad \square
$$

Ασκήσεις

1.1 Έστω $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι κάθε λύση της *ομογενούς* γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t)$, $t \in [a,b]$, είναι της μορφής

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}$$

με μια σταθερά C.
[*Υπόδειξη*: Με παραγώγιση διαπιστώνει κανείς αμέσως ότι οι συναρτήσεις της δεδομένης μορφής αποτελούν πράγματι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Για το αντίστροφο, υποθέστε ότι y είναι μια λύση της εξίσωσης, θεωρήστε τη συνάρτηση u,

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\int_a^t p(s)\,ds}y(t), \quad t \in [a,b],$$

και βεβαιωθείτε ότι $u' = 0$, δηλαδή ότι η u είναι σταθερή συνάρτηση.]

1.2 (Η μέθοδος της μεταβολής των σταθερών.) Έστω $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι οι λύσεις της *μη ομογενούς* γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $y'(t) = p(t)y(t) + q(t)$,

$t \in [a, b]$, είναι της μορφής

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds}\Big[C_0 + \int_a^t q(s)\mathrm{e}^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\Big], \quad a \le t \le b,$$

με μια σταθερά C_0, βλ. την (1.3).

[*Υπόδειξη*: Για να βεβαιωθείτε ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις, αρκεί να παρατηρήσετε ότι η διαφορά δύο λύσεων της μη ομογενούς εξίσωσης αποτελεί λύση της ομογενούς και να λάβετε υπ' όψιν την Άσκηση 1.1. Για να προσδιορίσετε λύσεις, δοκιμάστε λύσεις της μορφής

$$y(t) = C(t)\mathrm{e}^{\int_a^t p(s)\,ds},$$

όπως στην Άσκηση 1.1, αλλά τώρα με μια συνάρτηση C στη θέση της σταθεράς C· γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο αυτή η τεχνική λέγεται *μέθοδος της μεταβολής των σταθερών*. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση C πληροί μια απλή διαφορική εξίσωση, η οποία είναι εύκολο να επιλυθεί.]

1.3 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

α) Αποδείξτε ότι στην περίπτωση που το διάστημα $[a, b]$ είναι το $[1, 2]$, η συνάρτηση y που δίνεται στην (1.12) αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.10), αν και μόνο αν είτε $c < -1/\mathrm{e}$ είτε $c > -1/\mathrm{e}^2$.

β) Αποδείξτε ότι για την αρχική τιμή $y_0 = \sqrt{\mathrm{e}}/(\sqrt{\mathrm{e}} - 1)$ το εν λόγω πρόβλημα δεν έχει λύση. Ακριβέστερα, αποδείξτε ότι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών τείνει στο άπειρο καθώς το t αυξάνει προς το $3/2$.

[*Υπόδειξη*: Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δόθηκε στην (1.12). Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται για $c = -1/(\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}})$.]

γ) Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την αρχική τιμή $y_0 = -1$.

1.4 Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - [y(t)]^2, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

και προσδιορίστε το μεγαλύτερο δυνατό ανοικτό διάστημα I, στο οποίο ορίζεται η λύση y.

1.5 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, \quad 1 \le t \le 2, \\ y(1) = y_0. \end{cases}$$

α) Αποδείξτε ότι για την αρχική τιμή $y_0 = -1$ το εν λόγω πρόβλημα δεν έχει λύση. Ακριβέστερα, αποδείξτε ότι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών τείνει στο μείον άπειρο καθώς το t αυξάνει προς το $\sqrt{2}$.

[*Υπόδειξη*: Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δόθηκε στην (1.22). Η αρχική συνθήκη ικανοποιείται για $c = 1/4$.]

β) Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την αρχική τιμή $y_0 = 3$.

1.6 Προσδιορίστε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = \frac{1 + [y(t)]^2}{2ty(t)},$$

σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή.

1.7 Προσδιορίστε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = \frac{2t - 1}{[y(t)]^3 - y(t)},$$

σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή.

1.8 Θεωρούμε την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2ty(t)}.$$

α) Προσδιορίστε τη γενική λύση της ανωτέρω διαφορικής εξίσωσης, σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή.

β) Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την ανωτέρω διαφορική εξίσωση με αρχική τιμή $y(1) = 1$, καθώς και το μέγιστο ανοικτό διάστημα στο οποίο αυτή η λύση ορίζεται.

1.9 Προσδιορίστε τη γενική λύση της (πλήρους) διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = -\frac{2t + y(t)}{t + 2y(t)}.$$

1.10 Προσδιορίστε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(t) = -\frac{t + [y(t)]^2}{ty(t)},$$

σε έμμεση (πεπλεγμένη) μορφή.

[Η εν λόγω εξίσωση δεν είναι πλήρης αλλά ανάγεται σε πλήρη διαφορική εξίσωση με κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \mu(t)$.]

1.11 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \qquad \text{με } A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } y^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.12 Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \qquad \text{με } A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } y^{(0)} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.13 Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $p : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και A ένας $n \times n$ πίνακας.

α) Βεβαιωθείτε ότι $\big(\mathrm{e}^{p(t)A}\big)' = p'(t)A\mathrm{e}^{p(t)A}$, για $t \in I$.

[*Υπόδειξη*: Έχουμε

$$\mathrm{e}^{p(t)A} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{[p(t)A]^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} [p(t)]^\ell \frac{A^\ell}{\ell!}$$

και η παραγώγιση στη σειρά μπορεί να γίνει όρο προς όρο, οπότε

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{e}^{p(t)A}\big)' &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell p'(t)[p(t)]^{\ell-1} \frac{A^\ell}{\ell!} = p'(t)A \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{[p(t)A]^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ &= p'(t)A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[p(t)A]^k}{k!} = p'(t)A\mathrm{e}^{p(t)A}.\end{aligned}$$]

β) Βεβαιωθείτε ότι η λύση y του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y'(t) = p(t)Ay(t), \quad t \in I, \\ y(a) = y^{(0)}, \end{cases}$$

με a ένα σημείο του διαστήματος I, είναι $y(t) = \mathrm{e}^{(\int_a^t p(\tau)\,d\tau)A} y^{(0)}, t \in I$.

1.14 Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του A και $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Απόδείξτε, επαγωγικά, ότι τα $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

[*Υπόδειξη*: Το $v^{(1)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αφού είναι διάφορο του μηδενός. Έστω ότι τα $v^{(1)}, \dots,$ $v^{(\ell)}, \ell < k$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, αν ισχύει

$$c_1 v^{(1)} + \cdots + c_{\ell+1} v^{(\ell+1)} = 0,$$

θα έχουμε

$$c_1 A v^{(1)} + \cdots + c_{\ell+1} A v^{(\ell+1)} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad c_1 \lambda_1 v^{(1)} + \cdots + c_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} v^{(\ell+1)} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την αρχική σχέση επί $\lambda_{\ell+1}$ και αφαιρώντας από την τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$c_1(\lambda_{\ell+1} - \lambda_1) v^{(1)} + \cdots + c_\ell(\lambda_{\ell+1} - \lambda_\ell) v^{(\ell)} = 0.$$

Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση συμπεραίνουμε ότι $c_i(\lambda_{\ell+1} - \lambda_i) = 0, i = 1, \dots, \ell$, δηλαδή ότι $c_1 = \cdots = c_\ell = 0$. Η αρχική μας υπόθεση δίνει τότε $c_{\ell+1} v^{(\ell+1)} = 0$, οπότε και $c_{\ell+1} = 0$. Άρα και τα διανύσματα $v^{(1)}, \dots, v^{(\ell+1)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.]

1.15 Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα μετατόπισης M, δηλαδή τον πίνακα με μονάδες στις θέσεις της υπερδιαγωνίου και μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις, βλ. την (1.128). Προφανώς, το μηδέν είναι η μοναδική ιδιοτιμή του M και η αλγεβρική της πολλαπλότητα είναι η μέγιστη δυνατή, δηλαδή n. Βεβαιωθείτε, είτε κάνοντας πράξεις είτε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο εν λόγω πίνακας είναι πίνακας μετατόπισης, βλ. την (1.129), ότι οι μόνες λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $Mx = 0$ είναι οι $(x_1, 0, \dots, 0)^T$ (οπότε τα μόνα ιδιοδιανύσματα του M είναι το $(1, 0, \dots, 0)^T$ και τα πολλαπλάσιά του), και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ είναι η ελάχιστη δυνατή, δηλαδή ένα.

Αντίστοιχα, βεβαιωθείτε ότι οι μόνες λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $M^2x = 0$ είναι οι $(x_1, x_2, \dots, 0)^T$, δηλαδή ότι ο χώρος λύσεων είναι διδιάστατος, κ.λπ., και τέλος ότι η διάσταση του χώρου λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $M^n x = 0$ είναι n. Ιδιαίτερα, κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του M.

1.16 (Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμών ενός πίνακα Jordan.) Θεωρούμε έναν $n \times n$ πίνακα Jordan, δηλαδή κατά μπλοκ διαγώνιο πίνακα $J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \dots, J_k)$, με J_0 έναν διαγώνιο πίνακα, $J_0 = \operatorname{diag}(\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_m)$, και J_ℓ πίνακες της μορφής (1.126), για $\ell = 1, \dots, k$. Αφού ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $p(\lambda) := \det(J - \lambda I_n)$ είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα $J - \lambda I_n$, δηλαδή, με τον συμβολισμό της (1.126),

$$p(\lambda) = (\widetilde{\lambda}_1 - \lambda) \cdots (\widetilde{\lambda}_m - \lambda)(\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, αμέσως ότι οι ιδιοτιμές του J είναι τα διαγώνια στοιχεία του, $\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_m$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (κάποια από τα $\widetilde{\lambda}_i$ και/ή λ_j μπορούν κάλλιστα να συμπίπτουν), και ότι η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε μιας ιδιοτιμής του J είναι το *συνολικό πλήθος των φορών* που αυτή εμφανίζεται ως διαγώνιο στοιχείο του J. Όσον αφορά τη γεωμετρική τους πολλαπλότητα, παρατηρήστε ότι κάθε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προς μια ιδιοτιμή του J επιτρέπεται να έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στις συνιστώσες που αντιστοιχούν στις θέσεις της ιδιοτιμής ως διαγωνίου στοιχείου του J_0 και/ή σε θέση στη διαγώνιο του J στην οποία εμφανίζεται η εν λόγω ιδιοτιμή ως *πρώτο* στοιχείο κάποιου από τα μπλοκ $J_1, \dots, J_k$, δηλαδή συνολικά σε τόσες θέσεις όσο είναι το συνολικό πλήθος των μπλοκ στα οποία αυτή εμφανίζεται ως διαγώνιο στοιχείο, θεωρώντας το κάθε διαγώνιο στοιχείο του J_0 ως ξεχωριστό μπλοκ· βλ. και την Άσκηση 1.15. Οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής του J είναι το *συνολικό πλήθος των μπλοκ* στα οποία αυτή εμφανίζεται ως διαγώνιο στοιχείο, θεωρώντας το κάθε διαγώνιο στοιχείο του J_0 ως ξεχωριστό μπλοκ.

1.17 Θεωρούμε την κανονική μορφή Jordan ενός $n \times n$ πίνακα A, $A = S^{-1}JS$, βλ. την (1.127). Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του A και τι μπορείτε να πείτε για την αλγεβρική και τη γεωμετρική τους πολλαπλότητα; Ποια είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα κάθε ιδιοτιμής; (Βλ. την Άσκηση 1.16.)

1.18 (Για κάθε $n \times n$ μηδενοδύναμο πίνακα A ισχύει $A^n = 0$.)

α) Έστω A, B, C τρεις $n \times n$ πίνακες και έστω ότι οι A και C είναι αντιστρέψιμοι. Αν ισχύει $ABC = 0$, αποδείξτε ότι ο B είναι ο μηδενικός πίνακας, $B = 0$.

[*Υπόδειξη*: Πολλαπλασιάστε τη σχέση $ABC = 0$ από αριστερά με A^{-1} και από δεξιά με C^{-1}.]

β) Θεωρούμε έναν $n \times n$ κατά μπλοκ διαγώνιο πίνακα J, όπως στην Άσκηση 1.16, και υποθέτουμε ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι μηδέν. Αποδείξτε ότι ο J είναι μηδενοδύναμος, ακριβέστερα ότι $J^n = 0$.

[*Υπόδειξη*: Βεβαιωθείτε ότι, για οποιοδήποτε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, το γινόμενο $y := Jx$ είναι ένα διάνυσμα με τελευταία συνιστώσα μηδέν, $y_i = x_{i+1}$, αν το στοιχείο του J στη θέση $(i, i+1)$ είναι μονάδα, και $y_i = 0$, αν το στοιχείο του J στη θέση $(i, i+1)$ είναι μηδέν. Σχηματίστε τώρα τα $J^2x, \dots, J^n x$ και βεβαιωθείτε ότι $J^n x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, οπότε $J^n = 0$.]

γ) Έστω A ένας $n \times n$ μηδενοδύναμος πίνακας. (Σημειώστε ότι ο A μπορεί κάλλιστα να είναι πλήρης πίνακας, όπως οι

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{κ.λπ.]}$$

Αποδείξτε ότι $A^n = 0$.

[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε την κανονική μορφή Jordan του A, $S^{-1}AS = J$. Αφού ο A είναι μηδενοδύναμος, όλες οι ιδιοτιμές του είναι μηδέν, δηλαδή όλα τα διαγώνια στοιχεία του J είναι μηδέν. Τώρα, προφανώς, $S^{-1}A^nS = J^n$. Σύμφωνα με το β) ισχύει $J^n = 0$, οπότε, σύμφωνα με το α), ισχύει και $A^n = 0$.]

1.19 Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι ο A είναι μηδενοδύναμος, αν και μόνο αν η μόνη ιδιοτιμή του είναι το μηδέν.
[*Υπόδειξη*: Το γεγονός ότι οι πίνακες με μόνη ιδιοτιμή το μηδέν είναι μηδενοδύναμοι έπεται από το γ) στην προηγούμενη Άσκηση. Το αντίστροφο είναι πολύ εύκολο: Αν λ μια μη μηδενική ιδιοτιμή του A και x αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε $A^\ell x = \lambda^\ell x$. Το δεύτερο μέλος αυτής της σχέσης είναι πάντα διάφορο το μηδενός, άρα και το πρώτο. Επομένως, $A^\ell \neq 0$, για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$.]

1.20 (Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα Jordan.) Θεωρούμε έναν $n \times n$ κατά μπλοκ διαγώνιο πίνακα $J = \operatorname{diag}(J_0, J_1, \dots, J_k)$, με J_0 έναν διαγώνιο πίνακα, $J_0 = \operatorname{diag}(\widetilde{\lambda}_1, \dots, \widetilde{\lambda}_m)$, και J_ℓ πίνακες της μορφής (1.126), για $\ell = 1, \dots, k$. Συμβολίζουμε με n_0 τη διάσταση του J_0 και με n_ℓ τη διάσταση του πίνακα $J_\ell, \ell = 1, \dots, k$.

Έστω λ_κ μια ιδιοτιμή του πίνακα J, δηλαδή ένα διαγώνιο στοιχείο του J (το οποίο μπορεί να εμφανίζεται σε πολλές θέσεις του διαγώνιου πίνακα J_0 ή/και στις διαγωνίους πολλών μπλοκ J_ℓ). Υποθέτουμε ότι η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_κ είναι μ_κ και ν_κ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τώρα τον πίνακα $(J - \lambda_\kappa I_n)^{\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1}$. Αφού κανένα από τα μπλοκ J_ℓ με διαγώνιο στοιχείο το λ_κ δεν έχει διάσταση που υπερβαίνει το $\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1$ συμπεραίνουμε ότι για τους πίνακες μετατόπισης $J_\ell - \lambda_\kappa I_{n_\ell}$ ισχύει $(J_\ell - \lambda_\kappa I_{n_\ell})^{\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1} = 0$. Παρόμοια, μηδενίζονται, προφανώς, τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $J_0 - \lambda_\kappa I_{n_0}$, στις θέσεις των οποίων εμφανιζόταν το στοιχείο λ_κ στον διαγώνιο πίνακα J_0. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο πίνακας $(J - \lambda_\kappa I_n)^{\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1}$ είναι κατά μπλοκ διαγώνιος και έχει μηδενικά στις θέσεις όπου εμφανιζόταν το λ_κ στον διαγώνιο πίνακα J_0 καθώς και στις θέσεις όλων των μπλοκ (ολόκληρων, όχι μόνο των διαγωνίων τους) με διαγώνιο στοιχείο το λ_κ. Σε όλες τις άλλες θέσεις της διαγωνίου του πίνακα $(J - \lambda_\kappa I_n)^{\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1}$ εμφανίζονται μη μηδενικά στοιχεία. Επομένως, οι μόνες λύσεις του γραμμικού συστήματος $(J - \lambda_\kappa I_n)^{\mu_\kappa - \nu_\kappa + 1} v = 0$, δηλαδή τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του J ως προς την ιδιοτιμή λ_κ και το μηδενικό διάνυσμα, είναι εκείνα που έχουν μηδενικά στοιχεία στις θέσεις τους που στις αντίστοιχες θέσεις της διαγωνίου του J δεν εμφανιζόταν το λ_κ, δηλαδή συνολικά σε $n - \mu_\kappa$ θέσεις.

Τώρα, προφανώς, γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αφού στις θέσεις που έχουν μη μηδενικά στοιχεία γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή έχουν μηδενικά στοιχεία όλα τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις άλλες ιδιοτιμές).

Επομένως, υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του J (που αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$, αν ο J είναι μιγαδικός, και βάση του $\mathbb{R}^n$, αν ο J είναι πραγματικός).

1.21 (Πλήθος γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων οποιουδήποτε $n \times n$ πίνακα.)

α) Έστω S ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας και $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αποδείξτε ότι και τα διανύσματα $Sv^{(1)}, \dots, Sv^{(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Αποδείξτε ότι υπάρχουν n γραμμικά ανερξάτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A, και ότι σε κάθε ιδιοτιμή του λ_κ αντιστοιχούν τόσα από αυτά όση είναι η αλγεβρική της πολλαπλότητα.

[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε την κανονική μορφή Jordan $S^{-1}AS = J$ του A. Προφανώς οι A και J έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Επίσης, αφού $S^{-1}(A-\lambda I_n)S = J - \lambda I_n$, ισχύει και $S^{-1}(A-\lambda I_n)^\ell S = (J - \lambda I_n)^\ell$, δηλαδή $(A - \lambda I_n)^\ell S = S(J - \lambda I_n)^\ell$. Επομένως, αν $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του J, βλ. την Άσκηση 1.20, τότε τα $Sv^{(1)}, \dots, Sv^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A, βλ. το μέρος α).]

Βιβλιογραφία

1. Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής: *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2006. (β′ έκδοση, 2013.)
2. Ν. Δ. Αλικάκος, Γ. Η. Καλογερόπουλος: *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2003. (β′ έκδοση, 2011.)
3. G. Birkhoff, G.–C. Rota: *Ordinary Differential Equations*. 3rd ed., Wiley, New York, 1978.
4. E. A. Coddington, N. Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw–Hill, New York, 1955.
5. W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed., McGraw–Hill, Singapore, 1976. (Ελληνική μετάφραση με τίτλο *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα, 2000.)
6. Γ.–Σ. Σμυρλῆς: *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κύπρου, Λευκωσία, 2013.
7. W. Walter: *Ordinary Differential Equations.* Springer–Verlag, New York, 1998.

Λεξικό Βασικών Όρων

Α

αλγεβρική πολλαπλότητα	algebraic multiplicity

Γ

γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα	generalized eigenvector
γεωμετρική πολλαπλότητα	geometric multipliticity
γραμμική διαφορική εξίσωση	linear differential equation

Δ

διαγωνιοποιήσιμος πίνακας	diagonalizable matrix
διαγώνιος πίνακας	diagonal matrix
διαφορική εξίσωση	differential equation

Θ

θεμελιώδης πίνακας	fundamental matrix

Ι

ιδιάζουσα λύση	singular solution
ιδιοδιάνυσμα	eigenvector
ιδιοτιμή	eigenvalue

Κ

κανονική μορφή Jordan	Jordan normal form Jordan canonical form

Μ

μεταβολή των σταθερών	variation of constants
μηδενοδύναμος πίνακας	nilpotent matrix
μοναδικότητα	uniqueness

Ο

ολοκληρωτικός παράγων	integrating factor

ομογενής διαφορική εξίσωση	homogeneous differential equation
ομογενής συνάρτηση	homogeneous function
όμοιοι πίνακες	similar matrices

Π

πίνακας	matrix
πίνακας μετατόπισης	shift matrix
πλήρης διαφορική εξίσωση	exact differential equation
πρόβλημα αρχικών τιμών	initial value problem

Υ

ύπαρξη	existence

Χ

χαρακτηριστικό πολυώνυμο	characteristic polynomial

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Ονομάτων