

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

2^η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα FORTRAN ή σε MATLAB, σε διπλή ακρίβεια, για τη διακριτοποίηση προβλημάτων αρχικών τιμών της μορφής

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(t, y), & t \in [a, b], \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με την άμεση μέθοδο του Euler, την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο του τραπεζίου, καθώς και για την αριθμητική μελέτη της τάξης σύγκλισης.

Το πρόγραμμά σας πρέπει να έχει ως παραμέτρους τα a και b , τη συνάρτηση f , και έναν φυσικό αριθμό N , που δίνει το πλήθος των βημάτων κατά τη διακριτοποίηση. Η συνάρτηση f , καθώς και η ακριβής λύση y , στην περίπτωση που η τελευταία είναι γνωστή, πρέπει να δίνονται σε υποπρογράμματα. Με βήμα h , $h := (b - a)/N$, να υπολογίσετε προσεγγίσεις y^n των τιμών $y(t^n)$ της ακριβούς λύσης στους κόμβους t^n , $t^n := a + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, ξεκινώντας με την ακριβή αρχική τιμή y_0 στο σημείο a .

Εφαρμογή

Υπολογίστε με το πρόγραμμά σας προσεγγίσεις και μελετήστε αριθμητικά την τάξη σύγκλισης, με τον τρόπο που περιγράψουμε στη συνέχεια, για κάθε μια από τις μεθόδους, για το πρόβλημα

$$(2) \quad \begin{cases} y' = y, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με ακριβή λύση

$$y(t) = e^t, \quad t \in [0, 1].$$

1. Το πρόγραμμά σας πρέπει να υπολογίζει τις προσεγγίσεις y^n , $n = 0, 1, \dots, N$, για το πρόβλημα (2), με κάθε μια από τις μεθόδους που αναφέραμε, και να υπολογίζει και να τυπώνει τα σφάλματα $\varepsilon^N := |y(t^N) - y^N|$, για $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$, καθώς και τις ποσότητες

$$\frac{\log(\varepsilon^4/\varepsilon^8)}{\log(2)}, \frac{\log(\varepsilon^8/\varepsilon^{16})}{\log(2)}, \dots, \frac{\log(\varepsilon^{64}/\varepsilon^{128})}{\log(2)},$$

οι οποίες αποτελούν προσεγγίσεις της τάξης σύγκλισης της μεθόδου.

2. Σχόλιο για τον πειραματικό υπολογισμό της τάξης σύγκλισης: Συμβολίζουμε με $E(h)$ το σφάλμα μιας αριθμητικής μεθόδου, όταν το βήμα είναι h . Αν υποθέσουμε ότι το σφάλμα συμπεριφέρεται ως

$$E(h) \approx Ch^p,$$

τότε θα έχουμε

$$\frac{E(h)}{E(h/2)} \approx 2^p,$$

συνεπώς

$$p \approx \frac{\log(E(h)/E(h/2))}{\log(2)}.$$

3. Τυπώστε τα αποτελέσματά σας σε πίνακες, της παρακάτω μορφής

Άμεση μέθοδος του Euler

N	Σφάλμα	Τάξη
4	x.xxxxxxxxE-xx	
8	x.xxxxxxxxE-xx	x.xxx
⋮	⋮	⋮
128	x.xxxxxxxxE-xx	x.xxx

Παράδοση

- Θα παραδώσετε ένα πρωτόκολλο με το πρόγραμμά σας και τα αποτελέσματα. Κατά την παράδοση θα κληθείτε να εξηγήσετε πώς ακριβώς δουλεύει το πρόγραμμά σας, τι κάνει σε κάθε βήμα, να το τρέξετε στον υπολογιστή κ.λπ.
- Το πρόγραμμά σας πρέπει να περιέχει πολλά σχόλια, ώστε να μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει τι ακριβώς γίνεται σε κάθε βήμα.
- Η παράδοση της δεύτερης εργαστηριακής Άσκησης θα γίνει από τη Δευτέρα, 13-1-2014, έως την Τετάρτη, 22-1-2014, είτε σε έναν από τους βοηθούς στο μάθημα, στην κα Ευφροσύνη Γατσώρη (egatsori@cs.uoi.gr) ή στον κ. Θεόφιλο Χαμάλη (thchama@cs.uoi.gr), είτε στον διδάσκοντα. Κάθε φοιτητής πρέπει να επικοινωνήσει προκαταβολικά με όποιον επιθυμεί να παραλάβει την Άσκησή του ώστε από κοινού να καθορίσουν την ημερομηνία και ώρα της παράδοσης.